2023年天津市初中学业水平考试试卷

数学

本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）、第Ⅱ卷（非选择题）两部分．第Ⅰ卷为第1页至第3页，第Ⅱ卷为第4页至第8页，试卷满分120分．考试时间100分钟．

答卷前，请务必将自己的姓名、考生号、考点校、考场号、座位号填写在“答题卡”上，并在规定位置粘贴考试用条形码．答题时，务必将答案涂写在“答题卡”上，答案答在试卷上无效．考试结束后，将本试卷和“答题卡”一并交回．祝你考试顺利!

第Ⅰ卷

注意事项：

1. 每题选出答案后，用2B铅笔把“答题卡”上对应题目的答案标号的信息点涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号的信息点．

2．本卷共12题，共36分．

一、选择题（本大题共12小题，每小题3分，共36分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 计算 $\frac{1}{2}\times(-2)$ 的结果等于（　　）

A. $-\frac{5}{2}$　　B. -1　　C. $\frac{1}{4}$　　D. 1

【答案】D

【解析】

【分析】根据有理数的乘法法则，进行计算即可．

【详解】解：$\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-2)=1$；

故选D.

【点睛】本题考查有理数的乘法．熟练掌握有理数的乘法法则，是解题的关键．

2. 估计 $\sqrt{6}$ 的值应在　()

A. 1和2之间　　B. 2和3之间　　C. 3和4之间　　D. 4和5之

【答案】B

【解析】

【分析】由于 $4<6<9$，于是 $\sqrt{4}<\sqrt{6}<\sqrt{9}$，从而有 $2<\sqrt{6}<3$.

【详解】解：$\because 4<6<9$,

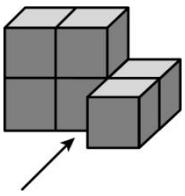
$\therefore \sqrt{4}<\sqrt{6}<\sqrt{9}$,

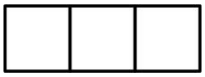
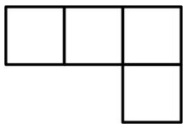
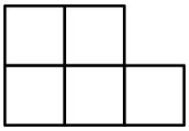
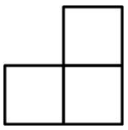
$\therefore 2<\sqrt{6}<3$,

故选 B.

【点睛】本题考查了无理数的估算，解题关键是确定无理数的整数部分即可解决问题.

3. 如图是一个由 6 个相同的正方体组成的立体图形，它的主视图是（　　）



A.  　B.  　C.  　D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据主视图的定义判断.

【详解】根据主视图的定义，从正面（图中箭头方向）看到的图形应为两层，上层有 2 个，下层有 3 个小正方形,

故答案为：C.

【点睛】本题考查主视图的定义，注意观察的方向，掌握主视图的定义判断是解题的关键.

4. 在一些美术字中，有的汉字是轴对称图形．下面 4 个汉字中，可以看作是轴对称图形的是（　　）

A. 全　　B. 面　　C. 发　　D. 展

【答案】A

【解析】

【分析】根据轴对称的定义判断即可；

【详解】解：全面发展四个字中，可以看作是轴对称图形的是全；

故选 A.

【点睛】本题考查了轴对称图形：如果一个平面图形沿着一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形，这条直线就是它的对称轴；掌握定义是解题关键.

5. 据 2023 年 5 月 21 日《天津日报》报道，在天津举办的第七届世界智能大会通过“百网同播、万人同屏、

亿人同观”，全球网友得以共享高端思想盛宴，总浏览量达到935000000人次，将数据935000000用科学记数法表示应为（　　）

A. 0.935×10^9　　B. 9.35×10^8　　C. 93.5×10^7　　D. 935×10^6

【答案】B

【解析】

【分析】根据科学记数法的表示方法进行表示即可.

【详解】解：$935000000=9.35\times10^8$；

故选 B.

【点睛】本题考查科学记数法．熟练掌握科学记数法的表示方法：$a\times10^n\left(1\le|a|<10\right)$，$n$为整数，是解题的关键.

6. $\sin45°+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$的值等于（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】先根据特殊角的三角函数值进行化简，再进行二次根式的加法运算即可.

【详解】解：$\sin45°+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，

故选：B.

【点睛】本题考查了特殊角的三角函数值和二次根式的加法运算，熟练掌握特殊角的三角函数值是解题的关键.

7. 计算$\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}$的结果等于（　　）

A. -1　　B. $x-1$　　C. $\dfrac{1}{x+1}$　　D. $\dfrac{1}{x^2-1}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据异分母分式加减法法则进行计算即可.

【详解】解：$\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{x+1-2}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}$；

故选：C.

【点睛】本题考查了异分母分式加减法法则，解答关键是按照相关法则进行计算.

8. 若点 $A(x_1,-2),B(x_2,1),C(x_3,2)$ 都在反比例函数 $y=-\dfrac{2}{x}$ 的图象上，则 x_1,x_2,x_3 的大小关系是（　　）

A. $x_3<x_2<x_1$　　B. $x_2<x_1<x_3$　　C. $x_1<x_3<x_2$　　D. $x_2<x_3<x_1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据反比例函数的性质，进行判断即可.

【详解】解：$y=-\dfrac{2}{x}$，$-2<0$，

∴双曲线在二，四象限，在每一象限，y 随 x 的增大而增大；

∵ $A(x_1,-2),B(x_2,1),C(x_3,2)$，

∴ $x_1>0,x_2<x_3<0$，

∴ $x_2<x_3<x_1$；

故选 D.

【点睛】本题考查反比例函数的图象和性质．熟练掌握反比例函数的性质，是解题的关键.

9. 若 x_1,x_2 是方程 $x^2-6x-7=0$ 的两个根，则（　　）

A. $x_1+x_2=6$　　B. $x_1+x_2=-6$　　C. $x_1\cdot x_2=\dfrac{7}{6}$　　D. $x_1\cdot x_2=7$

【答案】A

【解析】

【分析】根据一元二次方程的根与系数的关系即可得.

【详解】解：方程 $x^2-6x-7=0$ 中的 $a=1,b=-6,c=-7$，

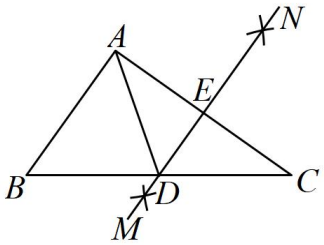
∵ x_1,x_2 是方程 $x^2-6x-7=0$ 的两个根，

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=6$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=-7$，

故选：A.

【点睛】本题考查了一元二次方程的根与系数的关系，熟练掌握一元二次方程的根与系数的关系是解题关键.

10. 如图，在$\triangle ABC$中，分别以点A和点C为圆心，大于$\dfrac{1}{2}AC$的长为半径作弧（弧所在圆的半径都相等），两弧相交于M,N两点，直线MN分别与边BC,AC相交于点D,E，连接AD．若$BD=DC,AE=4,AD=5$，则AB的长为（　　）



A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

【答案】D

【解析】

【分析】由作图可知直线MN为边AC的垂直平分线，再由$BD=DC$得到$AD=DC=BD=5$，则可知A,B,C三点在以D为圆心BC直径的圆上，进而得到$\angle BAC=90°$，由勾股定理求出AB即可.

【详解】解：由作图可知，直线MN为边AC的垂直平分线，

$\because AD=5$

$\therefore DC=AD=5$，

$\because BD=DC$，

$\therefore AD=DC=BD=5$，

$\therefore A,B,C$三点在以D为圆心BC直径的圆上，

$\therefore \angle BAC=90°$，

$\because AE=4$，

$\therefore AC=8$

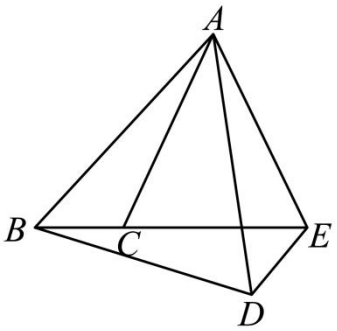
$\therefore AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=6$.

故选：D.

【点睛】本题考查了线段垂直平分线的尺规作图和性质，圆的基本性质和勾股定理，解答关键是熟练掌握

常用尺规作图的作图痕迹，由作图过程得到新的结论.

11. 如图，把 $\triangle ABC$ 以点 A 为中心逆时针旋转得到 ADE，点 B，C 的对应点分别是点 D，E，且点 E 在 BC 的延长线上，连接 BD，则下列结论一定正确的是（　　）



A. $\angle CAE=\angle BED$　　B. $AB=AE$　　C. $\angle ACE=\angle ADE$　　D. $CE=BD$

【答案】A

【解析】

【分析】根据旋转的性质即可解答.

【详解】根据题意，由旋转的性质，

可得 $AB=AD$，$AC=AE$，$BC=DE$，故 B 选项和 D 选项不符合题意，

$\angle ABC=\angle ADE$

$\because \angle ACE=\angle ABC+\angle BAC$

$\therefore \angle ACE=\angle ADE+\angle BAC$，故 C 选项不符合题意，

$\angle ACB=\angle AED$

$\because \angle ACB=\angle CAE+\angle CEA$

$\because \angle AED=\angle CEA+\angle BED$

$\therefore \angle CAE=\angle BED$，故 A 选项符合题意，

故选：A.

【点睛】本题考查了旋转的性质，熟练掌握旋转的性质和三角形外角运用是解题的关键.

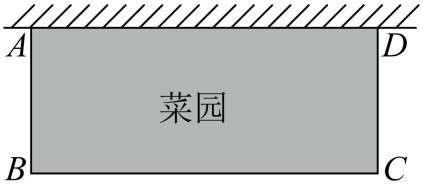
12. 如图，要围一个矩形菜园 $ABCD$，共中一边 AD 是墙，且 AD 的长不能超过 26m，其余的三边 AB,BC,CD 用篱笆，且这三边的和为 40m．有下列结论：

① AB 的长可以为 6m；

② AB 的长有两个不同的值满足菜园 $ABCD$ 面积为 192m^2；

③菜园 $ABCD$ 面积的最大值为 200m^2.

其中，正确结论的个数是（　　）



A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】设 AB 的长为 $x\text{m}$，矩形 $ABCD$ 的面积为 $y\text{m}^2$，则 BC 的长为 $(40-2x)\text{m}$，根据矩形的面积公式列二次函数解析式，再分别根据 AD 的长不能超过 26m，二次函数的最值，解一元二次方程求解即可.

【详解】设 AB 的长为 $x\text{m}$，矩形 $ABCD$ 的面积为 $y\text{m}^2$，则 BC 的长为 $(40-2x)\text{m}$，由题意得

$y=x(40-2x)=-2x^2+40x=-2(x-10)^2+200$，

其中 $0<40-2x\le 26$，即 $7\le x<20$，

① AB 的长不可以为 6m，原说法错误；

③菜园 $ABCD$ 面积的最大值为 200m^2，原说法正确；

②当 $y=-2(x-10)^2+200=192$ 时，解得 $x=8$ 或 $x=12$，

∴ AB 的长有两个不同的值满足菜园 $ABCD$ 面积为 192m^2，说法正确；

综上，正确结论的个数是 2 个，

故选：C.

【点睛】本题考查了二次函数的应用，解一元二次方程，准确理解题意，列出二次函数解析式是解题的关键.

第Ⅱ卷

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

13. 不透明袋子中装有 10 个球，其中有 7 个绿球、3 个红球，这些球除颜色外无其他差别. 从袋子中随机取出 1 个球，则它是绿球的概率为_____.

【答案】$\frac{7}{10}$##0.7

【解析】

【分析】直接利用概率公式求解即可.

【详解】解：由题意，从装有 10 个球的不透明袋子中，随机取出 1 个球，则它是绿球的概率为 $\frac{7}{10}$，

故答案为：$\frac{7}{10}$.

【点睛】本题考查求简单事件的概率，理解题意是解答的关键.

14. 计算$\left(xy^2\right)^2$的结果为_____.

【答案】x^2y^4

【解析】

【分析】直接利用积的乘方运算法则计算即可求得答案.

【详解】解：$\left(xy^2\right)^2=x^2y^4$

故答案为：x^2y^4.

【点睛】本题考查了积的乘方运算，解题的关键是熟练掌握运算法则.

15. 计算$\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)$的结果为_____.

【答案】1

【解析】

【分析】根据平方差公式，二次根式的性质及运算法则处理.

【详解】解：$\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{6})^2=7-6=1$

故答案为：1

【点睛】本题考查平方差公式、二次根式性质及运算，熟练掌握平方差公式是解题的关键.

16. 若直线$y=x$向上平移 3 个单位长度后经过点$\left(2,m\right)$，则m的值为_____.

【答案】5

【解析】

【分析】根据平移的规律求出平移后的解析式，再将点$\left(2,m\right)$代入即可求得m的值.

【详解】解：∵直线$y=x$向上平移 3 个单位长度，

∴平移后的直线解析式为：$y=x+3$.

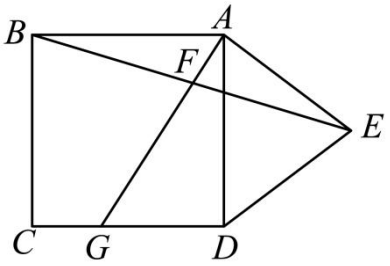
∵平移后经过$\left(2,m\right)$，

∴$m=2+3=5$.

故答案为：5.

【点睛】本题考查的是一次函数的平移，解题的关键在于掌握平移的规律：左加右减，上加下减.

17. 如图，在边长为 3 的正方形 $ABCD$ 的外侧，作等腰三角形 ADE，$EA=ED=\frac{5}{2}$.



(1) ADE 的面积为_____；

(2) 若 F 为 BE 的中点，连接 AF 并延长，与 CD 相交于点 G，则 AG 的长为_____.

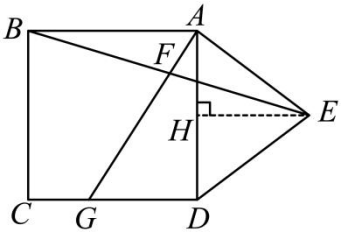
【答案】 ①. 3 ②. $\sqrt{13}$

【解析】

【分析】(1) 过点 E 作 $EH\perp AD$，根据正方形和等腰三角形的性质，得到 AH 的长，再利用勾股定理，求出 EH 的长，即可得到 ADE 的面积；

(2) 延长 EH 交 AG 于点 K，利用正方形和平行线的性质，证明 $\triangle ABF\cong\triangle KEF(\mathrm{ASA})$，得到 EK 的长，进而得到 KH 的长，再证明 $\triangle AHK\backsim\triangle ADG$，得到 $\frac{KH}{GD}=\frac{AH}{AD}$，进而求出 GD 的长，最后利用勾股定理，即可求出 AG 的长.

【详解】解：(1) 过点 E 作 $EH\perp AD$，



∵正方形 $ABCD$ 的边长为 3，

∴ $AD=3$，

∵$\triangle ADE$ 是等腰三角形，$EA=ED=\frac{5}{2}$，$EH\perp AD$，

∴ $AH=DH=\frac{1}{2}AD=\frac{3}{2}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AHE$ 中，$EH=\sqrt{AE^2-AH^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=2$，

∴ $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AD\cdot EH=\frac{1}{2}\times3\times2=3$，

故答案为：3；

（2）延长 EH 交 AG 于点 K,

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 3,

$\therefore \angle BAD=\angle ADC=90°$，$AB=3$，

$\therefore AB\perp AD$，$CD\perp AD$，

$\because EK\perp AD$，

$\therefore AB/\!/EK/\!/CD$，

$\therefore \angle ABF=\angle KEF$，

$\because F$ 为 BE 的中点,

$\therefore BF=EF$，

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle KEF$ 中,

$$\begin{cases}\angle ABF=\angle KEF\\ BF=EF\\ \angle AFB=\angle KFE\end{cases},$$

$\therefore \triangle ABF\cong\triangle KEF(\mathrm{ASA})$,

$\therefore EK=AB=3$，

由（1）可知，$AH=\dfrac{1}{2}AD$，$EH=2$，

$\therefore KH=1$，

$\because KH/\!/CD$，

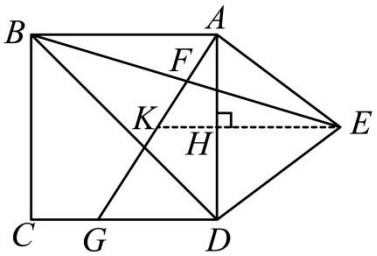
$\therefore \triangle AHK\backsim\triangle ADG$，

$\therefore \dfrac{KH}{GD}=\dfrac{AH}{AD}$，

$\backslash\ GD=2$，

在 Rt ADG 中，$AG=\sqrt{AD^2+GD^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，

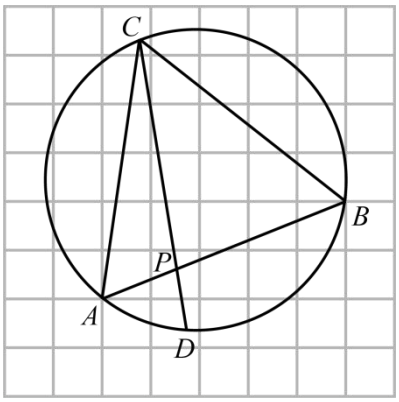
故答案为：$\sqrt{13}$.



【点睛】本题考查了正方形的性质，等腰三角形的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，勾股定理等知识，作辅助线构造全等三角形和相似三角形是解题关

键.

18. 如图，在每个小正方形的边长为 1 的网格中，等边三角形 ABC 内接于圆，且顶点 A，B 均在格点上.



(1) 线段 AB 的长为_____；

(2) 若点 D 在圆上，AB 与 CD 相交于点 P. 请用无刻度的直尺，在如图所示的网格中，画出点 Q，使 $\triangle CPQ$ 为等边三角形，并简要说明点 Q 的位置是如何找到的（不要求证明）_____.

【答案】(1) $\sqrt{29}$

(2) 画图见解析；如图，取 AC, AB 与网格线的交点 E，F，连接 EF 并延长与网格线相交于点 G；连接 DB 与网格线相交于点 H，连接 HF 并延长与网格线相交于点 I，连接 AI 并延长与圆相交于点 K，连接 CK 并延长与 GB 的延长线相交于点 Q，则点 Q 即为所求

【解析】

【分析】(1) 在网格中用勾股定理求解即可；

(2) 取 AC, AB 与网格线的交点 E，F，连接 EF 并延长与网格线相交于点 M，连接 MB；连接 DB 与网格线相交于点 G，连接 GF 并延长与网格线相交于点 H，连接 AH 并延长与圆相交于点 I，连接 CI 并延长与 MB 的延长线相交于点 Q，则点 Q 即为所求，连接 PQ，AD, BK，过点 E 作 $ET \perp$ 网格线，过点 G 作 $GS \perp$ 网格线，由图可得 $\mathrm{Rt}\triangle AJF \cong \mathrm{Rt}\triangle BLF(\mathrm{AAS})$，根据全等三角形的性质可得 $\mathrm{Rt}\triangle IMF \cong \mathrm{Rt}\triangle HNF(\mathrm{ASA})$ 和 $\triangle AIF \cong \triangle BHF(\mathrm{SAS})$，根据同弧所对圆周角相等可得 $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BK}$，进而得到 $\angle 1 = \angle 2$ 和 $\angle PCQ = 60°$，再通过证明 $\triangle CAP \cong \triangle CBQ(\mathrm{ASA})$ 即可得到结论.

【小问 1 详解】

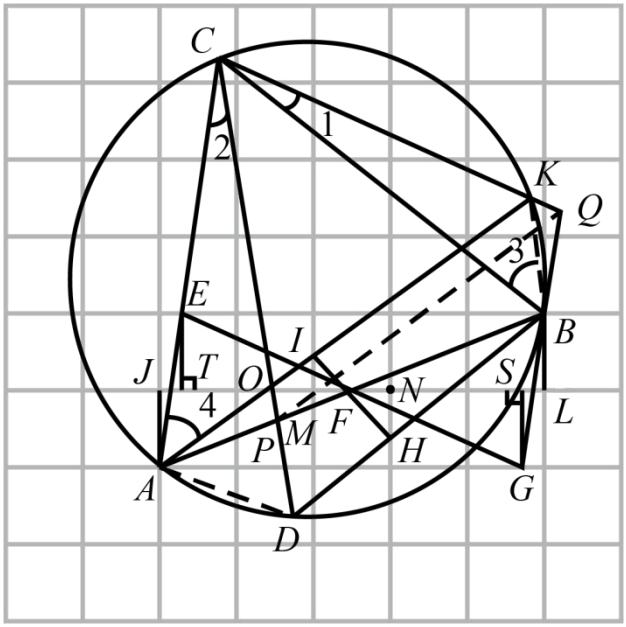
解：$AB = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$；

故答案为：$\sqrt{29}$.

【小问 2 详解】

解：如图，取 AC, AB 与网格线的交点 E，F，连接 EF 并延长与网格线相交于点 G；连接 DB 与网格线相交于点 H，连接 HF 并延长与网格线相交于点 I，连接 AI 并延长与圆相交于点 K，连接 CK 并延长与 GB 的延长线相交于点 Q，则点 Q 即为所求；

连接 PQ，AD, BK，过点 E 作 $ET \perp$ 网格线，过点 G 作 $GS \perp$ 网格线，



由图可得：$\because \angle AJF = \angle BLF$，$\angle AFJ = \angle BFL$，$AJ = BL$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AJF \cong \mathrm{Rt}\triangle BLF(\mathrm{AAS})$，

$\therefore FJ = FL$，$AF = BF$，

$\because MJ = NL$，

$\therefore FJ - MJ = FL - NL$，即 $FM = FN$，

$\because \angle IMF = \angle HNF$，$\angle IFM = \angle HFN$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle IMF \cong \mathrm{Rt}\triangle HNF(\mathrm{ASA})$，

$\therefore FI = FH$，

$\because \angle AFI = \angle BFH$，$AF = BF$，

$\therefore \triangle AIF \cong \triangle BHF(\mathrm{SAS})$，

$\therefore \angle FAI = \angle FBH$，

$\therefore \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BK}$，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$，

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle ACB = 60°$，即 $\angle 1 + \angle PCB = 60°$，

$\therefore \angle 2+\angle PCB=60°$，即 $\angle PCQ=60°$，

$\because ET=GS$，$\angle ETF=\angle GSF$，$\angle EFT=\angle GFS$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ETF\cong\mathrm{Rt}\triangle GSF(\mathrm{AAS})$，

$\therefore EF=GF$，

$\because AF=BF$，$\angle AFE=\angle BFG$，

$\therefore \triangle AFE\cong\triangle BFG(\mathrm{SAS})$，

$\therefore \angle EAF=\angle GBF$，

$\therefore \angle GBF=\angle EAF=\angle CBA=60°$，

$\therefore \angle CBQ=180°-\angle CBA-\angle GBF=60°$，

$\therefore \angle CBQ=\angle CAB$，

$\because CA=CB$，

$\therefore \triangle CAP\cong\triangle CBQ(\mathrm{ASA})$，

$\therefore CQ=CP$，

$\because \angle PCQ=60°$，

$\therefore \triangle PCQ$ 是等边三角形，此时点 Q 即为所求；

故答案为：如图，取 AC,AB 与网格线的交点 E，F，连接 EF 并延长与网格线相交于点 G；连接 DB 与网格线相交于点 H，连接 HF 并延长与网格线相交于点 I，连接 AI 并延长与圆相交于点 K，连接 CK 并延长与 GB 的延长线相交于点 Q，则点 Q 即为所求.

【点睛】本题考查作图—复杂作图，勾股定理、等边三角形的判定、全等三角形的判定与性质等知识，解题关键是理解题意，灵活运用所学知识是关键.

三、解答题（本大题共 7 小题，共 66 分．解答应写出文字说明、演算步骤或推理过程）

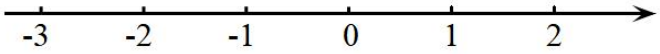
19. 解不等式组 $\begin{cases}2x+1\geq x-1①\\4x-1\leq x+2②\end{cases}$

请结合题意填空，完成本题的解答.

（1）解不等式①，得_____；

（2）解不等式②，得_____；

（3）把不等式①和②的解集在数轴上表示出来：



(4) 原不等式组的解集为_____.

【答案】(1) $x \geq -2$

(2) $x \leq 1$

(3) 见解析　　(4) $-2 \leq x \leq 1$

【解析】

【分析】分别解两个不等式，然后根据公共部分确定不等式组的解集，再利用数轴表示解集即可.

【小问 1 详解】

解：解不等式①，得 $x \geq -2$，

故答案为：$x \geq -2$；

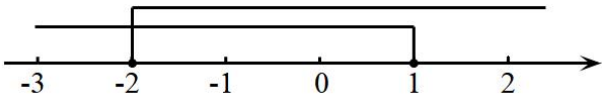
【小问 2 详解】

解：解不等式②，得 $x \leq 1$，

故答案为：$x \leq 1$；

【小问 3 详解】

解：把不等式①和②的解集在数轴上表示出来：



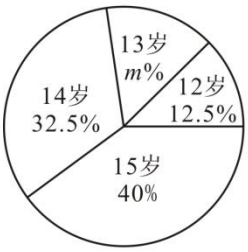
【小问 4 详解】

解：原不等式组的解集为 $-2 \leq x \leq 1$，

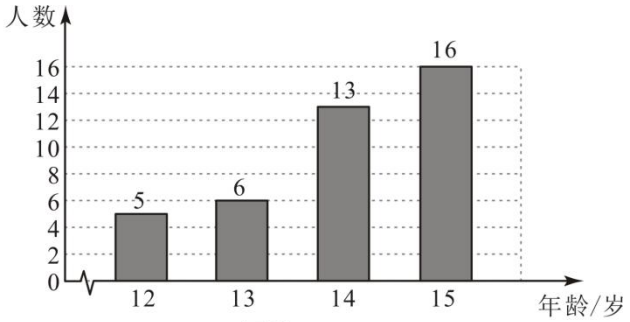
故答案为：$-2 \leq x \leq 1$.

【点睛】本题考查了解一元一次不等式组并把解集在数轴上表示，熟练掌握一元一次不等式的解法是解决本题的关键.

20. 为培养青少年的劳动意识，某校开展了剪纸、编织、烘焙等丰富多彩的活动，该校为了解参加活动的学生的年龄情况，随机调查了 a 名参加活动的学生的年龄（单位：岁）. 根据统计的结果，绘制出如下的统计图①和图②.



图①



图②

请根据相关信息，解答下列问题：

(1) 填空：a 的值为_____，图①中 m 的值为_____；

(2) 求统计的这组学生年龄数据的平均数、众数和中位数.

【答案】(1) 40，15；

(2) 平均数是14，众数是15，中位数是14.

【解析】

【分析】(1) 根据条形图求出各组数据总和可得到 a，再根据百分比的定义求 m 即可；

(2) 根据平均数，众数，中位数的定义求解即可；

【小问 1 详解】

解：由题意，$a=5+6+13+16=40$，

13 岁学生所占百分比为：$m\%=\dfrac{6}{40}\times100\%=15\%$，

故答案为：40，15；

【小问 2 详解】

观察条形统计图，

$\because \overline{x}=\dfrac{12\times5+13\times6+14\times13+15\times16}{5+6+13+16}=14$，

$\therefore$ 这组数据的平均数是14.

$\because$ 在这组数据中，15 出现了16次，出现的次数最多，

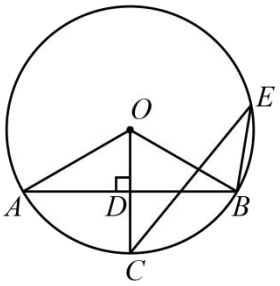
$\therefore$ 这组数据的众数是15.

$\because$ 将这组数据按由小到大的顺序排列，处于中间的两个数都是14，有 $\dfrac{14+14}{2}=14$，

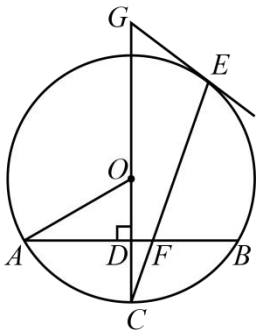
$\therefore$ 这组数据的中位数是14.

【点睛】本题考查的是条形统计图和扇形图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到信息是解决问题的关键.

21. 在 $\odot O$ 中，半径 OC 垂直于弦 AB，垂足为 D，$\angle AOC=60°$，E 为弦 AB 所对的优弧上一点.



图①



图②

(1) 如图①，求 $\angle AOB$ 和 $\angle CEB$ 的大小；

(2) 如图②，CE 与 AB 相交于点 F，$EF=EB$，过点 E 作 $\odot O$ 的切线，与CO的延长线相交于点 G，若 $OA=3$，求 EG 的长.

【答案】(1) $\angle AOB=120°$，$\angle CEB=30°$

(2) $\sqrt{3}$

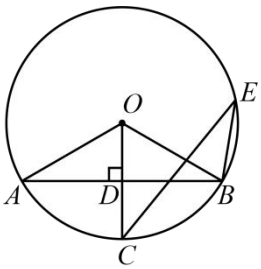
【解析】

【分析】(1) 根据半径 OC 垂直于弦 AB，可以得到 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，从而得到 $\angle AOC=\angle BOC$，结合已知条件 $\angle AOC=60°$ 即可得到 $\angle AOB=2\angle AOC=120°$，根据 $\angle CEB=\frac{1}{2}\angle AOC$ 即可求出 $\angle CEB=30°$；

(2) 根据 $\angle CEB=30°$，结合 $EF=EB$，推算出 $\angle EBF=\angle EFB=75°$，进一步推算出 $\angle GOE=\angle AOE-\angle AOG=30°$，在 $\mathrm{Rt}\triangle OEG$ 中，$\tan\angle GOE=\frac{EG}{OE}, OE=OA=3$，再根据 $EG=3\times\tan 30°$ 即可得到答案.

【小问 1 详解】

解：在 $\odot O$ 中，半径 OC 垂直于弦 AB，



$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，得 $\angle AOC=\angle BOC$.

$\because \angle AOC=60°$,

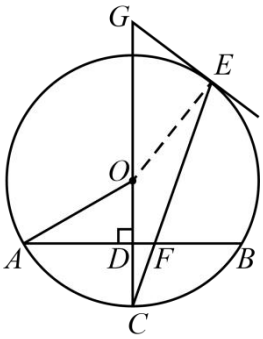
$\therefore \angle AOB=2\angle AOC=120°$.

$\because \angle CEB=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\angle AOC$,

$\therefore \angle CEB=30°$.

【小问 2 详解】

解：如图，连接OE.



同（1）得$\angle CEB=30°$.

$\because$在$\triangle BEF$中，$EF=EB$,

$\therefore \angle EBF=\angle EFB=75°$.

$\therefore \angle AOE=2\angle EBA=150°$.

又$\angle AOG=180°-\angle AOC=120°$,

$\therefore \angle GOE=\angle AOE-\angle AOG=30°$.

$\because GE$与$\odot O$相切于点 E,

$\therefore OE\perp GE$，即$\angle OEG=90°$.

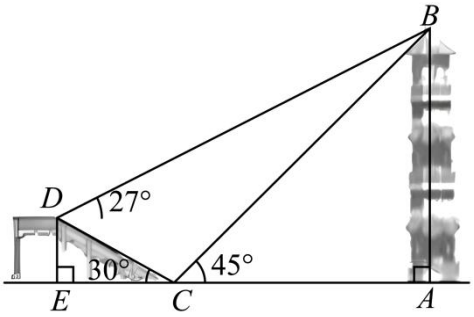
在$\mathrm{Rt}\triangle OEG$中，$\tan\angle GOE=\frac{EG}{OE}, OE=OA=3$,

$\therefore EG=3\times\tan 30°=\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查圆周角定理、切线的性质和直角三角函数，解题的关键是灵活运用相关知识.

22. 综合与实践活动中，要利用测角仪测量塔的高度.

如图，塔AB前有一座高为DE的观景台，已知$CD=6\mathrm{m}, \angle DCE=30°$，点$E$，$C$，$A$在同一条水平直线上.



某学习小组在观景台 C 处测得塔顶部 B 的仰角为 $45°$，在观景台 D 处测得塔顶部 B 的仰角为 $27°$.

(1) 求 DE 的长；

(2) 设塔 AB 的高度为 h（单位：m）.

①用含有 h 的式子表示线段 EA 的长（结果保留根号）；

②求塔 AB 的高度（$\tan 27°$ 取 0.5，$\sqrt{3}$ 取 1.7，结果取整数）.

【答案】(1) 3m

(2) ①$\left(h+3\sqrt{3}\right)\text{m}$；②$11\text{m}$

【解析】

【分析】(1) 根据含 30 度角的直角三角形的性质求解即可；

(2) ①分别在 $\text{Rt}\ \ DCE$ 和 $\text{Rt}\triangle BCA$ 中，利用锐角三角函数定义求得 $EC=3\sqrt{3}$，$CA=h$，进而可求解；

②过点 D 作 $DF\perp AB$，垂足为 F．可证明四边形 $DEAF$ 是矩形，得到 $DF=EA=\left(h+3\sqrt{3}\right)\text{m}$，

$FA=DE=3\text{m}$．在 $\text{Rt}\triangle BDF$ 中，利用锐角三角函数定义得到 $BF=DF\cdot\tan\angle BDF$，然后求解即可.

【小问 1 详解】

解：在 $\text{Rt}\ \ DCE$ 中，$\angle DCE=30°,CD=6$，

$\therefore DE=\dfrac{1}{2}CD=3$.

即 DE 的长为 3m.

【小问 2 详解】

解：①在 $\text{Rt}\ \ DCE$ 中，$\cos\angle DCE=\dfrac{EC}{CD}$，

$\therefore EC=CD\cdot\cos\angle DCE=6\times\cos 30°=3\sqrt{3}$.

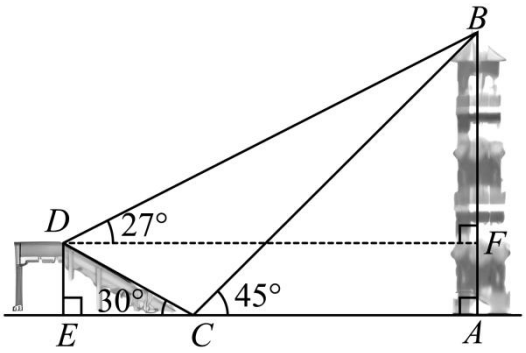
在 $\text{Rt}\triangle BCA$ 中，由 $\tan\angle BCA=\dfrac{AB}{CA}$，$AB=h$，$\angle BCA=45°$，

则 $CA=\dfrac{AB}{\tan 45°}=h$.

$\therefore EA = CA + EC = h + 3\sqrt{3}$.

即 EA 的长为 $\left(h + 3\sqrt{3}\right)\text{m}$.

②如图，过点 D 作 $DF \perp AB$，垂足为 F.



根据题意，$\angle AED = \angle FAE = \angle DFA = 90°$，

$\therefore$四边形 $DEAF$ 是矩形.

$\therefore DF = EA = \left(h + 3\sqrt{3}\right)\text{m}$，$FA = DE = 3\text{m}$.

可得 $BF = AB - FA = \left(h - 3\right)\text{m}$.

在 Rt△BDF 中，$\tan\angle BDF = \dfrac{BF}{DF}$，$\angle BDF = 27°$，

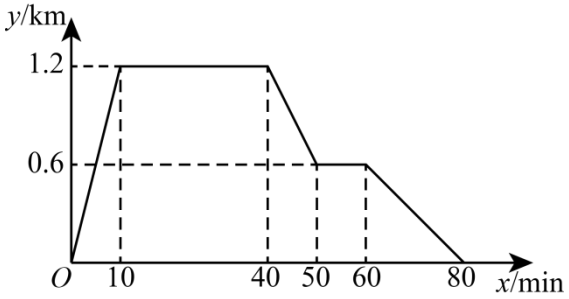
$\therefore BF = DF \cdot \tan\angle BDF$．即 $h - 3 = \left(h + 3\sqrt{3}\right) \times \tan 27°$.

$\therefore h = \dfrac{3 + 3\sqrt{3} \times \tan 27°}{1 - \tan 27°} \approx \dfrac{3 + 3 \times 1.7 \times 0.5}{1 - 0.5} \approx 11\left(\text{m}\right)$.

答：塔 AB 的高度约为 11m.

【点睛】本题考查解直角三角形的应用，涉及含 30 度角的直角三角形的性质、矩形判定与性质、锐角三角函数，理解题意，掌握作辅助线构造直角三角形解决问题是解答的关键.

23. 已知学生宿舍、文具店、体育场依次在同一条直线上，文具店离宿舍 0.6km，体育场离宿舍 1.2km，张强从宿舍出发，先用了 10min 匀速跑步去体育场，在体育场锻炼了 30min，之后匀速步行了 10min 到文具店买笔，在文具店停留 10min 后，用了 20min 匀速散步返回宿舍．下面图中 x 表示时间，y 表示离宿舍的距离．图象反映了这个过程中张强离宿舍的距离与时间之间的对应关系.



请根据相关信息，回答下列问题：

（1）①填表：

张强离开宿舍的时间/ min	1	10	20	60
张强离宿舍的距离/ km		1.2		

②填空：张强从体育场到文具店的速度为_____ km/min；

③当 $50 \le x \le 80$ 时，请直接写出张强离宿舍的距离 y 关于时间 x 的函数解析式；

（2）当张强离开体育场 $15\,\text{min}$ 时，同宿舍的李明也从体育场出发匀速步行直接回宿舍，如果李明的速度为 0.06km/min，那么他在回宿舍的途中遇到张强时离宿舍的距离是多少？（直接写出结果即可）

【答案】（1）①0.12，1.2，0.6；②0.06；③ $\begin{cases} y = 0.6 \left(50 \le x \le 60\right) \\ y = -0.03x + 2.4 \left(60 < x \le 80\right) \end{cases}$；

（2）0.3km

【解析】

【分析】（1）①根据图象作答即可；②根据图象，由张强从体育场到文具店的距离除以时间求解即可；③当 $50 \le x \le 60$ 时，直接根据图象写出解析式即可；当 $60 < x \le 80$ 时，设 y 与 x 的函数解析式为 $y = kx + b$，利用待定系数法求函数解析式即可；

（2）当张强离开体育场 $15\,\text{min}$ 时，即 $x = 55$ 时，同宿舍的李明也从体育场出发匀速步行直接回宿舍，当李明在回宿舍的途中遇到张强时，他俩离宿舍的距离是相等的，可列方程为 $-0.03x + 2.4 = 1.2 - 0.06\left(x - 55\right)$，求解即可.

【小问 1 详解】

①$1.2 \div 10 \times 1 = 0.12\text{km}$，

由图填表：

张强离开宿舍的时间/ min	1	10	20	60
张强离宿舍的距离/ km	0.12	1.2	1.2	0.6

故答案为：0.12，1.2，0.6；

②张强从体育场到文具店的速度为$0.6\div(50-40)=0.06\text{km/min}$，

故答案为：0.06；

当$50\le x\le 60$时，

$y=0.6$；

当$60<x\le 80$时，设y与x的函数解析式为$y=kx+b$，

把$(60,0.6),(80,0)$代入，得$\begin{cases}0.6=60k+b\\0=80k+b\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=-0.03\\b=2.4\end{cases}$，

$\therefore y=-0.03x+2.4$；

综上，张强离宿舍的距离y关于时间x的函数解析式为$\begin{cases}y=0.6(50\le x\le 60)\\y=-0.03x+2.4(60<x\le 80)\end{cases}$；

【小问2详解】

当张强离开体育场15min时，即$x=55$时，同宿舍的李明也从体育场出发匀速步行直接回宿舍，

当李明在回宿舍的途中遇到张强时，他俩离宿舍的距离是相等的，

$\therefore -0.03x+2.4=1.2-0.06(x-55)$

解得$x=70$，

当$x=70$时，$1.2-0.06\times(70-55)=0.3\text{km}$，

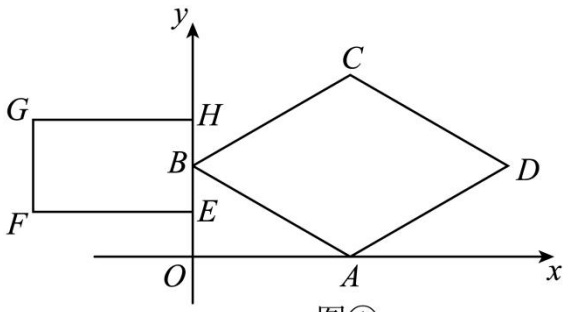
所以，他在回宿舍的途中遇到张强时离宿舍的距离是0.3km.

【点睛】本题考查了从函数图象获取信息，求函数的解析式，列一元一次方程解决实际问题，准确理解题意，熟练掌握知识点是解题的关键.

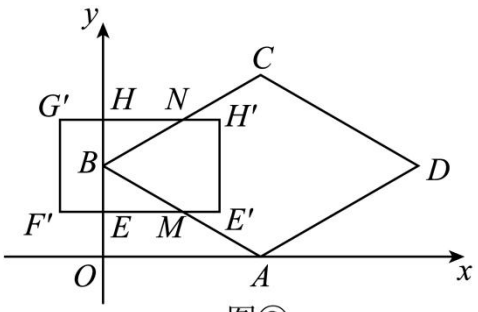
24. 在平面直角坐标系中，O为原点，菱形$ABCD$的顶点$A(\sqrt{3},0),B(0,1),D(2\sqrt{3},1)$，矩形$EFGH$的顶点$E\left(0,\frac{1}{2}\right),F\left(-\sqrt{3},\frac{1}{2}\right),H\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

(1) 填空：如图①，点C的坐标为_____，点G的坐标为_____；

(2) 将矩形$EFGH$沿水平方向向右平移，得到矩形$E'F'G'H'$，点E，F，G，H的对应点分别为E'，F'，G'，H'．设$EE'=t$，矩形$E'F'G'H'$与菱形$ABCD$重叠部分的面积为S.



图①



图②

①如图②，当边 $E'F'$ 与 AB 相交于点 M、边 $G'H'$ 与 BC 相交于点 N，且矩形 $E'F'G'H'$ 与菱形 $ABCD$ 重叠部分为五边形时，试用含有 t 的式子表示 S，并直接写出 t 的取值范围：

②当 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\le t\le\frac{11\sqrt{3}}{4}$ 时，求 S 的取值范围（直接写出结果即可）.

【答案】(1) $\left(\sqrt{3},2\right)$，$\left(-\sqrt{3},\frac{3}{2}\right)$.

(2) ① $\frac{\sqrt{3}}{2}<t\le\sqrt{3}$；② $\frac{\sqrt{3}}{16}\le S\le\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据矩形及菱形的性质可进行求解；

(2) ①由题意易得 $EF=E'F'=\sqrt{3},EH=E'H'=1$，然后可得 $\angle ABO=60°$，则有 $EM=\frac{\sqrt{3}}{2}$，进而根据割补法可进行求解面积 S；②由①及题意可知当 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\le t\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 时，矩形 $E'F'G'H'$ 和菱形 $ABCD$ 重叠部分的面积S是增大的，当 $\frac{3\sqrt{3}}{2}<t\le\frac{11\sqrt{3}}{4}$ 时，矩形 $E'F'G'H'$ 和菱形 $ABCD$ 重叠部分的面积S是减小的，然后根据题意画出图形计算面积的最大值和最小值即可.

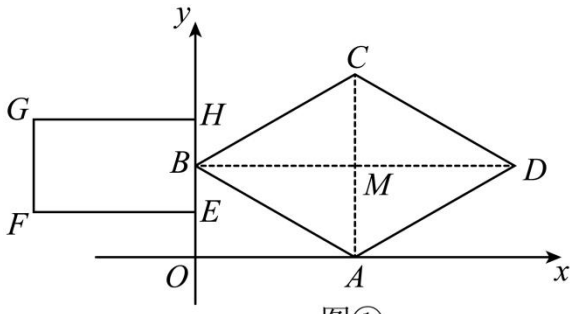
【小问 1 详解】

解：$\because$ 四边形 $EFGH$ 是矩形，且 $E\left(0,\frac{1}{2}\right),F\left(-\sqrt{3},\frac{1}{2}\right),H\left(0,\frac{3}{2}\right)$，

$\therefore EF=GH=\sqrt{3},EH=FG=1$，

$\therefore G\left(-\sqrt{3},\frac{3}{2}\right)$；

连接 AC,BD，交于一点 H，如图所示：



图①

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，且 $A(\sqrt{3},0),B(0,1),D(2\sqrt{3},1)$，

∴ $AB=AD=\sqrt{\left(\sqrt{3}-0\right)^2+\left(0-1\right)^2}=2$，$AC\perp BD,CM=AM=OB=1,BM=MD=OA=\sqrt{3}$，

∴ $AC=2$，

∴ $C\left(\sqrt{3},2\right)$，

故答案为$\left(\sqrt{3},2\right)$，$\left(-\sqrt{3},\frac{3}{2}\right)$；

【小问 2 详解】

解：①∵点 $E\left(0,\frac{1}{2}\right)$，点 $F\left(-\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$，点 $H\left(0,\frac{3}{2}\right)$，

∴矩形 $EFGH$ 中，$EF\parallel x$ 轴，$EH\perp x$ 轴，$EF=\sqrt{3},EH=1$.

∴矩形 $E'F'G'H'$ 中，$E'F'\parallel x$ 轴，$E'H'\perp x$ 轴，$E'F'=\sqrt{3},E'H'=1$.

由点 $A\left(\sqrt{3},0\right)$，点 $B\left(0,1\right)$，得 $OA=\sqrt{3},OB=1$.

在 Rt△ ABO 中，$\tan\angle ABO=\frac{OA}{OB}=\sqrt{3}$，得 $\angle ABO=60°$.

在 $Rt\triangle BME$ 中，由 $EM=EB\cdot\tan 60°,EB=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，得 $EM=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∴ $S_{\triangle BME}=\frac{1}{2}EB\cdot EM=\frac{\sqrt{3}}{8}$. 同理，得 $S_{\triangle BNH}=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

∵ $EE'=t$，得 $S_{矩形EE'H'H}=EE'\cdot EH=t$.

又 $S=S_{矩形EE'H'H}-S_{\triangle BME}-S_{\triangle BNH}$，

∴ $S=t-\frac{\sqrt{3}}{4}$，

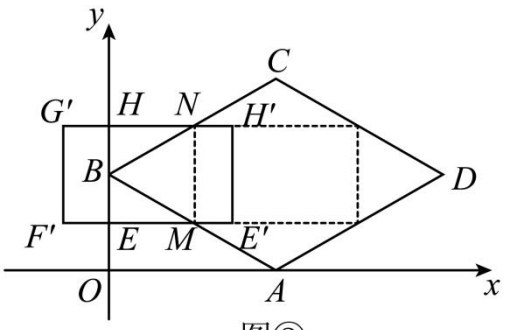
当 $EE'=EM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，则矩形 $E'F'G'H'$ 和菱形 $ABCD$ 重叠部分为 $\triangle BE'H'$，

$\therefore t$ 的取值范围是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<t\le\sqrt{3}$.

②由①及题意可知当 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\le t\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 时，矩形 $E'F'G'H'$ 和菱形 $ABCD$ 重叠部分的面积S是增大的，当

$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}<t\le\dfrac{11\sqrt{3}}{4}$ 时，矩形 $E'F'G'H'$ 和菱形 $ABCD$ 重叠部分的面积S是减小的，

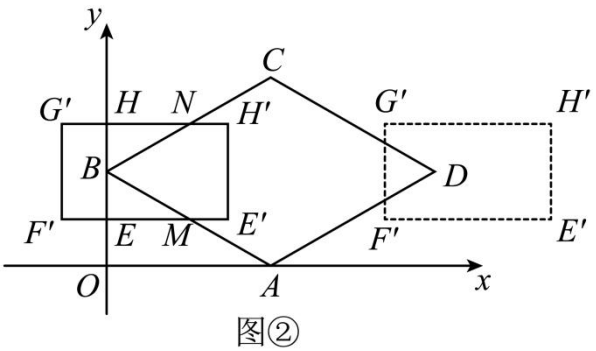
$\therefore$ 当 $t=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 时，矩形 $E'F'G'H'$ 和菱形 $ABCD$ 重叠部分如图所示：



图②

此时面积 S 最大，最大值为 $S=1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$；

当 $t=\dfrac{11\sqrt{3}}{4}$ 时，矩形 $E'F'G'H'$ 和菱形 $ABCD$ 重叠部分如图所示：



图②

由（1）可知 B、D 之间的水平距离为 $2\sqrt{3}$，则有点 D 到 $G'F'$ 的距离为 $\sqrt{3}-\left(\dfrac{11\sqrt{3}}{4}-2\sqrt{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

由①可知：$\angle D=\angle B=60°$，

$\therefore$ 矩形 $E'F'G'H'$ 和菱形 $ABCD$ 重叠部分为等边三角形，

∴该等边三角形的边长为 $2\times\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}{\tan 60^\circ}=\dfrac{1}{2}$，

∴此时面积 S 最小，最小值为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{16}$；

综上所述：当 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\le t\le\dfrac{11\sqrt{3}}{4}$ 时，则 $\dfrac{\sqrt{3}}{16}\le S\le\sqrt{3}$.

【点睛】本题主要考查矩形、菱形的性质及三角函数、图形与坐标，熟练掌握矩形、菱形的性质及三角函数、图形与坐标是解题的关键.

25. 已知抛物线 $y=-x^2+bx+c$（b，c 为常数，$c>1$）的顶点为 P，与 x 轴相交于 A，B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴相交于点 C，抛物线上的点 M 的横坐标为 m，且 $-c<m<\dfrac{b}{2}$，过点 M 作 $MN\perp AC$，垂足为 N.

（1）若 $b=-2,c=3$.

①求点 P 和点 A 的坐标；

②当 $MN=\sqrt{2}$ 时，求点 M 的坐标；

（2）若点 A 的坐标为 $(-c,0)$，且 $MP/\!/AC$，当 $AN+3MN=9\sqrt{2}$ 时，求点 M 的坐标.

【答案】（1）①点 P 的坐标为 $(-1,4)$；点 A 的坐标为 $(-3,0)$；②点 M 的坐标为 $(-2,3)$

（2）$\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{21}{4}\right)$

【解析】

【分析】（1）①待定系数法求解析式，然后化为顶点式，即可求得 P 的坐标，令 $y=0$，解方程，即可求得 A 的坐标；

②过点 M 作 $ME\perp x$ 轴于点 E，与直线 AC 相交于点 F．得出 $OA=OC$．可得 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 中，$\angle OAC=45^\circ$．$\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中，$EF=AE$．设点 $M\left(m,-m^2-2m+3\right)$，点 $E(m,0)$．根据 $MN=\sqrt{2}$，解方程即可求解；

（2）根据题意得出抛物线的解析式为 $y=-x^2+(1-c)x+c$．得点 $M\left(m,-m^2+(1-c)m+c\right)$，其中 $-c<m<\dfrac{1-c}{2}$．则顶点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{1-c}{2},\dfrac{(1+c)^2}{4}\right)$，对称轴为直线 $l:x=\dfrac{1-c}{2}$．过点 M 作 $MQ\perp l$ 于

点 Q，则 $\angle MQP=90°$，点 $Q\left(\frac{1-c}{2},-m^2+(1-c)m+c\right)$．由 $MP//AC$，得 $\angle PMQ=45°$．于是 $MQ=QP$．得出 $c_1=-2m-1, c_2=-2m+1$(舍)．，同(Ⅰ)，过点 M 作 $ME\perp x$ 轴于点 E，与直线 AC 相交于点 F，则点 $E(m,0)$，点 $F(m,-m-1)$，点 $M\left(m,m^2-1\right)$．根据已知条件式，建立方程，解方程即可求解.

【小问 1 详解】

解：①由 $b=-2,c=3$，得抛物线的解析式为 $y=x^2-2x+3$.

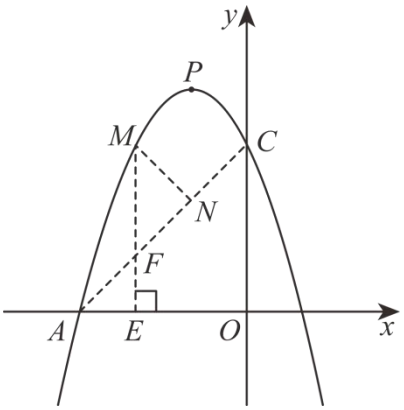
$\because y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$，

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-1,4)$.

当 $y=0$ 时，$-x^2-2x+3=0$．解得 $x_1=-3, x_2=1$．又点 A 在点 B 的左侧，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-3,0)$.

②过点 M 作 $ME\perp x$ 轴于点 E，与直线 AC 相交于点 F.



$\because$ 点 $A(-3,0)$，点 $C(0,3)$，

$\therefore OA=OC$．可得 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 中，$\angle OAC=45°$.

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中，$EF=AE$.

$\because$ 抛物线 $y=-x^2-2x+3$ 上的点 M 的横坐标为 m，其中 $-3<m<-1$，

$\therefore$ 设点 $M\left(m,-m^2-2m+3\right)$，点 $E(m,0)$.

得 $EF=AE=m-(-3)=m+3$．即点 $F(m,m+3)$.

$\therefore FM=\left(-m^2-2m+3\right)-(m+3)=-m^2-3m$.

$\mathrm{Rt}\triangle FMN$ 中，可得 $\angle MFN=45°$.

$\therefore FM=\sqrt{2}MN$．又 $MN=\sqrt{2}$，

得 $FM=2$．即 $-m^2-3m=2$．解得 $m_1=-2, m_2=-1$ (舍).

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(-2,3)$.

【小问 2 详解】

$\because$ 点 $A(-c,0)$ 在抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 上，其中 $c>1$，

$\therefore -c^2-bc+c=0$．得 $b=1-c$．

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-x^2+(1-c)x+c$.

得点 $M\left(m,-m^2+(1-c)m+c\right)$，其中 $-c<m<\dfrac{1-c}{2}$.

$\because y=-x^2+(1-c)x+c=-\left(x-\dfrac{1-c}{2}\right)^2+\dfrac{(1+c)^2}{4}$，

$\therefore$ 顶点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{1-c}{2},\dfrac{(1+c)^2}{4}\right)$，对称轴为直线 $l: x=\dfrac{1-c}{2}$.

过点 M 作 $MQ\perp l$ 于点 Q，则 $\angle MQP=90°$，点 $Q\left(\dfrac{1-c}{2},-m^2+(1-c)m+c\right)$.

由 $MP/\!/AC$，得 $\angle PMQ=45°$．于是 $MQ=QP$.

$\therefore \dfrac{1-c}{2}-m=\dfrac{(1+c)^2}{4}-\left[-m^2+(1-c)m+c\right]$.

即 $(c+2m)^2=1$．解得 $c_1=-2m-1, c_2=-2m+1$ (舍).

同(Ⅰ)，过点 M 作 $ME\perp x$ 轴于点 E，与直线 AC 相交于点 F，

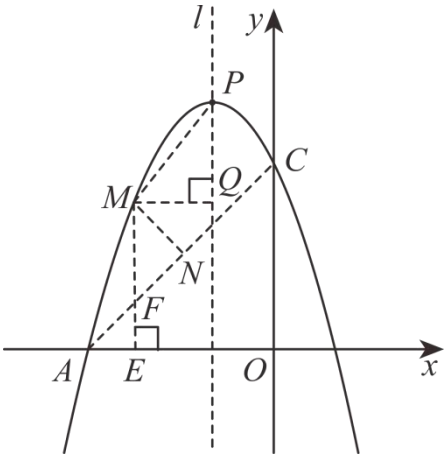
则点 $E(m,0)$，点 $F(m,-m-1)$，点 $M\left(m,m^2-1\right)$.

$\because AN+3MN=AF+FN+3MN=\sqrt{2}EF+2\sqrt{2}FM=9\sqrt{2}$，

$\therefore \sqrt{2}(-m-1)+2\sqrt{2}\left(m^2-1+m+1\right)=9\sqrt{2}$.

即 $2m^2+m-10=0$．解得 $m_1=-\dfrac{5}{2}, m_2=2$ (舍).

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{21}{4}\right)$.



【点睛】本题考查了二次函数的综合运用，角度问题，线段问题，待定系数法求解析式，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】