

遂宁市 2023 年初中毕业暨高中阶段学校招生考试

数学试卷

试卷满分 150 分 考试时间 120 分钟

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的学校、姓名、准考证号用 0.5 毫米的黑色墨迹签字笔填写在答题卡上，并检查条形码粘贴是否正确。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号；回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知算式 $5 \square (-5)$ 的值为 0，则“ $\square$ ”内应填入的运算符号为（ ）

- A. + B. - C. $\times$ D. $\div$

【答案】A

【解析】

【分析】根据相反数相加为 0 判断即可。

【详解】解： $\because 5 + (-5) = 0$, $\therefore$ “ $\square$ ”内应填入的运算符号为 +,

故选：A.

【点睛】题目主要考查有理数的加法运算，熟练掌握运算法则是解题关键。

2. 下列运算正确的是（ ）

- A. $(-a)^2 = -a^2$ B. $3a^2 - a^2 = 3$ C. $a^3 \cdot a = a^4$ D. $(a-1)^2 = a^2 - 1$

【答案】C

【解析】

【分析】根据积的乘方、完全平方公式、合并同类项，同底数幂的乘法，依次进行判断即可得出结果。

【详解】解：A、 $(-a)^2 = a^2 \neq -a^2$ ，本选项不符合题意；B、 $3a^2 - a^2 = 2a^2 \neq 3$ ，本选项不符合题意；

C、 $a^3 \cdot a = a^4$ ，本选项符合题意；

D、 $(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1 \neq a^2 - 1$ ，本选项不符合题意；

故选：C.

【点睛】题目主要考查积的乘方、完全平方公式、合并同类项，同底数幂的乘法，熟练掌握各个运算法则是解题关键.

3. 纳米是表示微小距离的单位，1 纳米 = 0.000001 毫米，而 1 毫米相当于我们通常使用的刻度尺上的一小格，可想而知 1 纳米是多么的小. 中科院物理所研究员解思深领导的研究组研制出世界上最细的碳纳米管——直径 0.5 纳米. 0.5 纳米相当于 0.0000005 毫米，数据 0.0000005 用科学记数法可以表示为 ()

A. 0.5×10^{-6}

B. 0.5×10^{-7}

C. 5×10^{-6}

D. 5×10^{-7}

【答案】D

【解析】

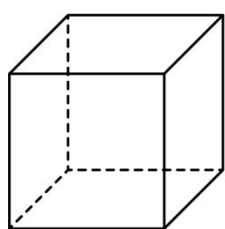
【分析】根据小于 1 的正数也可以利用科学记数法表示，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ， $1 \leq a < 10$ ， n 为第一位有效数字前面 0 的个数.

【详解】解：0.0000005 = 5×10^{-7}

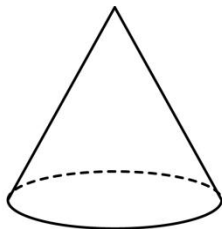
故选：D.

【点睛】此题主要考查了用科学记数法表示较小的数；一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ， $1 \leq a < 10$ ， n 为整数，确定 a 与 n 的值是解题的关键.

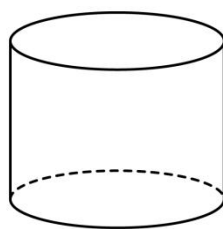
4. 生活中一些常见的物体可以抽象成立体图形，以下立体图形中三视图形状相同的可能是 ()



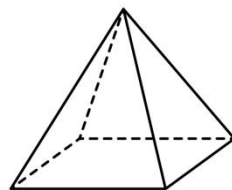
A. 正方体



B. 圆锥



C. 圆柱



D. 四棱锥

【答案】A

【解析】

【分析】根据几何体的三视图形状判定即可.

【详解】A. 正方体的三视图都是正方形，符合题意；

B. 圆锥的主视图是等腰三角形，左视图是等腰三角形，俯视图是圆（带圆心），不符合题意；

C. 圆柱的主视图是矩形，左视图是矩形，俯视图是圆，不符合题意；

D. 四棱锥主视图是三角形，左视图是三角形，俯视图是四边形，不符合题意；

故选 A.

【点睛】本题考查了几何体的三视图，熟练掌握三视图是解题的关键.

5. 《九章算术》是我国古代数学的经典书，书中有一个问题：“今有黄金九枚，白银一十一枚，称之重适等；交易其一，金轻十三两. 问金、银一枚各重几何？”意思是甲袋中装有黄金 9 枚（每枚黄金重量相同），乙袋中装有白银 11 枚（每枚白银重量相同），称重两袋相等. 两袋互相交换 1 枚后，甲袋比乙袋轻了 13 两（袋子重量忽略不计）. 问黄金、白银每枚各重多少两？设每枚黄金重 x 两，每枚白银重 y 两，则可列方程组为（ ）

A.
$$\begin{cases} 11x = 9y \\ (10y + x) - (8x + y) = 13 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} 9x = 11y \\ (8x + y) - (10y + x) = 13 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} 9x = 11y \\ (10y + x) - (8x + y) = 13 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} 11x = 9y \\ (8x + y) - (10y + x) = 13 \end{cases}$$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意第一个等量关系为 9 枚黄金和 11 枚白银的重量相等列二元一次方程；再根据第二个等量关系为 1 枚黄金和 10 枚白银重量和比 8 枚黄金和 1 枚白银重量和大 13 列二元一次方程，即可得二元一次方程组.

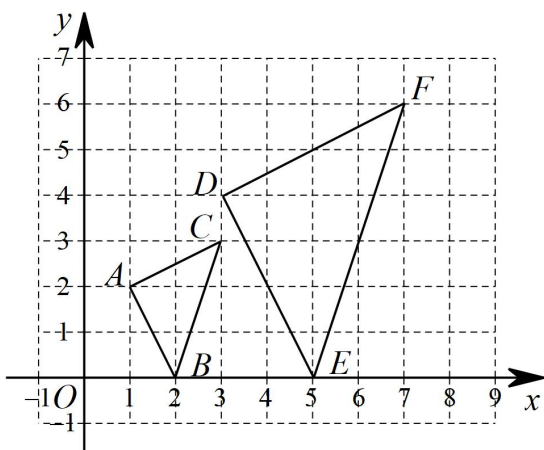
【详解】解：设每枚黄金重 x 两，每枚白银重 y 两，根据题意得，

$$\begin{cases} 9x = 11y \\ (10y + x) - (8x + y) = 13 \end{cases}$$

故选：C.

【点睛】本题考查二元一次方程组的实际应用，找出两个等量关系是列方程组的关键.

6. 在方格图中，以格点为顶点的三角形叫做格点三角形. 在如图所示的平面直角坐标系中，格点 $\triangle ABC$ 、 $\triangle DEF$ 成位似关系，则位似中心的坐标为（ ）

A. $(-1, 0)$ B. $(0, 0)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, 0)$

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意确定直线 AD 的解析式为： $y = x + 1$ ，由位似图形的性质得出 AD 所在直线与 BE 所在直线 x 轴的交点坐标即为位似中心，即可求解.

【详解】解：由图得： $A(1, 2), D(3, 4)$,

设直线 AD 的解析式为： $y = kx + b$ ，将点代入得：

$$\begin{cases} 2 = k + b \\ 4 = 3k + b \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = 1 \\ b = 1 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AD 的解析式为： $y = x + 1$,

AD 所在直线与 BE 所在直线 x 轴的交点坐标即为位似中心，

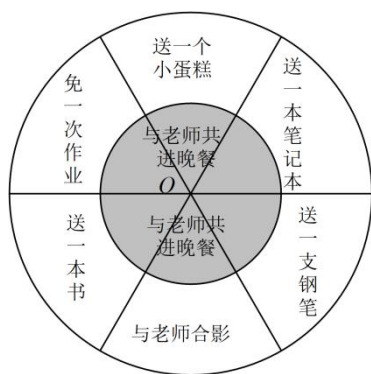
$\therefore$ 当 $y = 0$ 时， $x = -1$,

$\therefore$ 位似中心的坐标为 $(-1, 0)$,

故选：A.

【点睛】题目主要考查位似图形的性质，求一次函数的解析式，理解题意，掌握位似图形的特点是解题关键.

7. 为增强班级凝聚力，吴老师组织开展了一次主题班会. 班会上，他设计了一个如图的飞镖靶盘，靶盘由两个同心圆构成，小圆半径为 10cm ，大圆半径为 20cm ，每个扇形的圆心角为 60° . 如果用飞镖击中靶盘每一处是等可能的，那么小全同学任意投掷飞镖 1 次（击中边界或没有击中靶盘，则重投 1 次），投中“免一次作业”的概率是（ ）



- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{10}$ D. $\frac{1}{12}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据扇形面积公式求出免一次作业对应区域的面积，再根据投中“免一次作业”的概率 = 免一次作业对应区域的面积 ÷ 大圆面积进行求解即可

【详解】解：由题意得，大圆面积为 $\pi \times 20^2 = 400\pi \text{cm}^2$ ，

$$\text{免一次作业对应区域的面积为 } \frac{60 \times \pi \times 20^2}{360} - \frac{60 \times \pi \times 10^2}{360} = 50\pi \text{cm}^2,$$

$$\therefore \text{投中“免一次作业”的概率是 } \frac{50\pi}{400\pi} = \frac{1}{8},$$

故选 B.

【点睛】本题主要考查了几何概率，扇形面积，正确求出大圆面积和免一次作业对应区域的面积是解题的关键.

8. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 4(x-1) > 3x-1 \\ 5x > 3x+2a \end{cases}$ 的解集为 $x > 3$ ，则 a 的取值范围是 ()

- A. $a > 3$ B. $a < 3$ C. $a \geq 3$ D. $a \leq 3$

【答案】D

【解析】

【分析】分别求出各不等式的解集，再根据不等式组的解集是 $x > 3$ 求出 a 的取值范围即可.

$$\text{【详解】解：} \begin{cases} 4(x-1) > 3x-1 \text{ ①} \\ 5x > 3x+2a \text{ ②} \end{cases}$$

解不等式①得： $x > 3$,

解不等式②得： $x > a$,

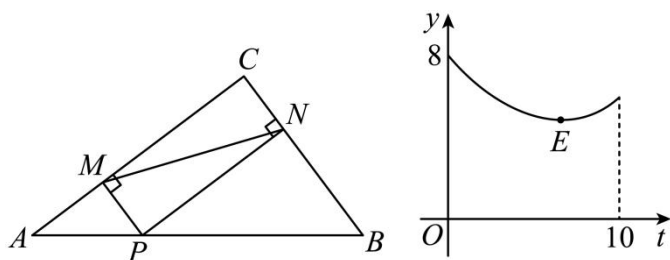
$\therefore$ 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 4(x-1) > 3x-1 \\ 5x > 3x+2a \end{cases}$ 的解集为 $x > 3$,

$\therefore a \leq 3$,

故选：D.

【点睛】本题考查的是解一元一次不等式组，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 10$ ， $BC = 6$ ， $AC = 8$ ，点 P 为线段 AB 上的动点，以每秒 1 个单位长度的速度从点 A 向点 B 移动，到达点 B 时停止. 过点 P 作 $PM \perp AC$ 于点 M 、作 $PN \perp BC$ 于点 N ，连接 MN ，线段 MN 的长度 y 与点 P 的运动时间 t (秒) 的函数关系如图所示，则函数图象最低点 E 的坐标为 ()



- A. $(5, 5)$ B. $\left(6, \frac{24}{5}\right)$ C. $\left(\frac{32}{5}, \frac{24}{5}\right)$ D. $\left(\frac{32}{5}, 5\right)$

【答案】C

【解析】

【分析】如图所示，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于 D ，连接 CP ，先利用勾股定理的逆定理证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形，即 $\angle C = 90^\circ$ ，进而利用等面积法求出 $CD = \frac{24}{5}$ ，则可利用勾股定理求出 $AD = \frac{32}{5}$ ；再证明四边形

$CM PN$ 是矩形，得到 $MN = CP$ ，故当点 P 与点 D 重合时， CP 最小，即 MN 最小，此时 MN 最小值为 $\frac{24}{5}$ ，

$AP = \frac{32}{5}$ ，则点 E 的坐标为 $\left(\frac{32}{5}, \frac{24}{5}\right)$.

【详解】解：如图所示，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于 D ，连接 CP ，

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 10$ ， $BC = 6$ ， $AC = 8$ ，

$\therefore AC^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = 10^2 = AB^2$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，即 $\angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CD$ ，

$$\therefore CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{24}{5},$$

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \frac{32}{5};$$

$$\because PM \perp AC, PN \perp BC, \angle C = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $CMPN$ 是矩形,

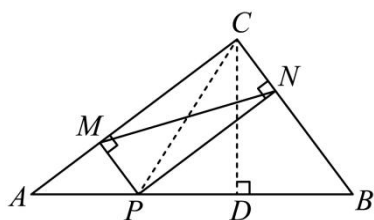
$$\therefore MN = CP,$$

$\therefore$ 当 MN 最小时, 即 CP 最小,

$\therefore$ 当点 P 与点 D 重合时, CP 最小, 即 MN 最小, 此时 MN 最小值为 $\frac{24}{5}$, $AP = AD = \frac{32}{5}$,

$$\therefore \text{点 } E \text{ 的坐标为 } \left(\frac{32}{5}, \frac{24}{5} \right),$$

故选 C.



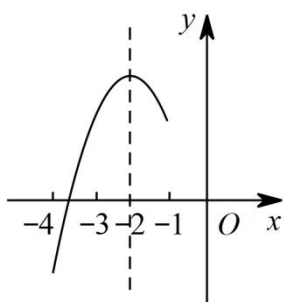
【点睛】 本题主要考查了勾股定理和勾股定理的逆定理, 矩形的性质与

判断, 垂线段最短, 坐标与图形等等, 正确作出辅助线是解题的关键.

10. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示, 对称轴为直线 $x = -2$. 下列说法: ① $abc < 0$;

② $c - 3a > 0$; ③ $4a^2 - 2ab \geq at(at + b)$ (t 为全体实数); ④ 若图象上存在点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$,

当 $m < x_1 < x_2 < m + 3$ 时, 满足 $y_1 = y_2$, 则 m 的取值范围为 $-5 < m < -2$. 其中正确的个数有 ()



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】 C

【解析】

【分析】 开口方向, 对称轴, 与 y 轴的交点位置判断①, 特殊点判断②, 最值判断③, 对称性判断④即可.

【详解】 $\because$ 抛物线的开口向下，对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = -2 < 0$ ，抛物线与 y 轴交点位于负半轴，

$$\therefore a < 0, b < 0, c < 0,$$

$$\therefore abc < 0,$$

故①正确；

由图象可知， $a - b + c > 0$ ，根据对称轴，得 $b = 4a$ ，

$$\therefore a - 4a + c > 0$$

$$\therefore c - 3a > 0,$$

故②正确；

$\because$ 抛物线的开口向下，对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = -2 < 0$ ，

$\therefore$ 抛物线的最大值为 $y = 4a - 2b + c$ ，

当 $x = t$ 时，其函数值为 $y = at^2 + bt + c$ ，

$$\therefore 4a - 2b + c \geq at^2 + bt + c,$$

$$\therefore 4a - 2b \geq at^2 + bt,$$

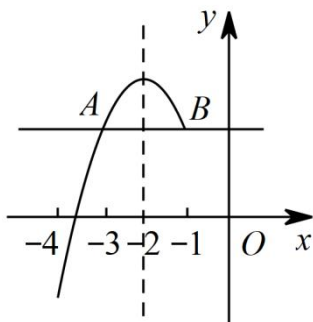
$$\because a < 0,$$

$$\therefore a(4a - 2b) \leq a(at^2 + bt),$$

$$\therefore 4a^2 - 2ab \leq at(at + b),$$

故③错误；

如图所示， $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 满足 $y_1 = y_2$ ，



$\therefore A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 关于对称轴对称，

$$\therefore x_1 < -2, x_2 > -2,$$

$$\therefore m < x_1 < x_2 < m + 3,$$

$$\therefore m < x_1 < -2, -2 < x_2 < m + 3,$$

解得 $-5 < m < -2$,

故④正确;

故选 C.

【点睛】本题考查了二次函数的图象和性质, 熟练掌握二次函数的性质, 是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 5 个小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

11. 若三角形三个内角的比为 1: 2: 3, 则这个三角形按角分类是_____三角形.

【答案】直角

【解析】

【分析】设一份为 k° , 则三个内角的度数分别为 k° , $2k^\circ$, $3k^\circ$, 然后根据三角形内角和进行求解即可.

【详解】解: 设一份为 k° , 则三个内角的度数分别为 k° , $2k^\circ$, $3k^\circ$.

$$\text{则 } k^\circ + 2k^\circ + 3k^\circ = 180^\circ,$$

$$\text{解得 } k^\circ = 30^\circ.$$

$$\text{所以 } 2k^\circ = 60^\circ, 3k^\circ = 90^\circ, \text{ 即 } \angle B = 60^\circ, \angle C = 90^\circ.$$

故这个三角形是直角三角形.

故答案是: 直角.

【点睛】本题主要考查三角形内角和, 熟练掌握三角形内角和是解题的关键.

12. 若 a 、 b 是一元二次方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两个实数根, 则代数式 $a + b - ab$ 的值为_____.

【答案】2

【解析】

【分析】根据根与系数的关系得到 $a + b = 3$, $ab = 1$, 由此即可得到答案.

【详解】解: $\because a$ 、 b 是一元二次方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两个实数根,

$$\therefore a + b = 3, ab = 1,$$

$$\therefore a + b - ab = 3 - 1 = 3 - 1 = 2,$$

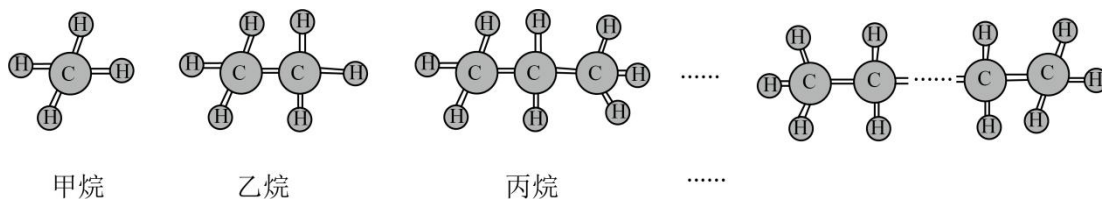
故答案为: 2.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系, 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 若

$$x_1, x_2 \text{ 是该方程的两个实数根, 则 } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

13. 烷烃是一类由碳、氢元素组成的有机化合物, 在生产生活中可作为燃料、润滑剂等原料, 也可用于动、

植物的养护。通常用碳原子的个数命名为甲烷、乙烷、丙烷、……、癸烷（当碳原子数目超过10个时即用汉文数字表示，如十一烷、十二烷……）等，甲烷的化学式为 CH_4 ，乙烷的化学式为 C_2H_6 ，丙烷的化学式为 C_3H_8 ……，其分子结构模型如图所示，按照此规律，十二烷的化学式为_____。



【答案】 $C_{12}H_{26}$

【解析】

【分析】 根据碳原子的个数，氢原子的个数，找到规律，即可求解。

【详解】 解：甲烷的化学式为 CH_4 ，

乙烷的化学式为 C_2H_6 ，

丙烷的化学式为 C_3H_8 ……，

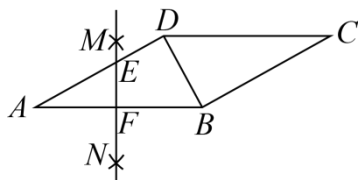
碳原子的个数为序数，氢原子的个数为碳原子个数的2倍多2个，

十二烷的化学式为 $C_{12}H_{26}$ ，

故答案为： $C_{12}H_{26}$ 。

【点睛】 本题考查了规律题，找到规律是解题的关键。

14. 如图， $ABCD$ 中， BD 为对角线，分别以点 A 、 B 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧，两弧相交于点 M 、 N ，作直线 MN 交 AD 于点 E ，交 AB 于点 F ，若 $AD \perp BD$ ， $BD = 4$ ， $BC = 8$ ，则 AE 的长为_____。



【答案】 5

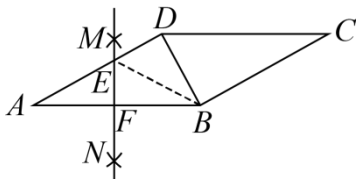
【解析】

【分析】 连接 BE ，根据基本作图，得到 $BE = AE = x$ ，利用平行四边形的性质，得

$ED = AD - AE = AD - BE = 8 - x$ ，在 $Rt\triangle BDE$ 中，利用勾股定理计算即可。

【详解】 解：如图所示，连接 BE ，

根据基本作图，可设 $BE = AE = x$ ，



$\therefore ABCD$, $AD \perp BD$, $BC = 8$,

$\therefore AD = BC = 8$, $\angle BDE = 90^\circ$, $ED = AD - AE = AD - BE = 8 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中, $BD = 4$, 由勾股定理得 $BD^2 + DE^2 = BE^2$,

$$\therefore x^2 = (8 - x)^2 + 4^2,$$

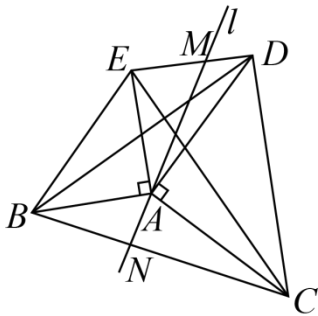
解得 $x = 5$,

即 $AE = 5$,

故答案为: 5.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，线段垂直平分线的基本作图，勾股定理，熟练掌握平行四边形的性质，勾股定理是解题的关键.

15. 如图，以 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 为腰分别向外作等腰直角 $\triangle ABE$ 、 $\triangle ACD$ ，连结 ED 、 BD 、 EC ，过点 A 的直线 l 分别交线段 DF 、 BC 于点 M 、 N ，以下说法：①当 $AB = AC = BC$ 时， $\angle AED = 30^\circ$ ；② $EC = BD$ ；③若 $AB = 3$ ， $AC = 4$ ， $BC = 6$ ，则 $DE = 2\sqrt{3}$ ；④当直线 $l \perp BC$ 时，点 M 为线段 DE 的中点. 正确的有_____。(填序号)



【答案】①②④

【解析】

【分析】①当 $AB = AC = BC$ 时， $\triangle ABC$ 是等边三角形，根据等角对等边，以及三角形的内角和定理即可得出 $\angle AED = \angle ADE = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$ ，进而判断①；证明 $\triangle BAD \cong \triangle EAC$ ，根据全等三角形的性质判断②；作直线 $MN \perp BC$ 于点 N ，过点 D 作 $DG \perp MN$ 于点 G ，过点 E 作 $EH \perp MN$ 于点 H ，证明 $\triangle ACN \cong \triangle DAG$ ， $\triangle ABN \cong \triangle EAH$ ， $\triangle EHM \cong \triangle DGM$ (AAS)，即可得 M 是 ED 的中点，故④正确，

证明 $\text{Rt}\triangle MEH \cong \text{Rt}\triangle MDG$ (HL), 可得 $MG = MH$, 在 $\text{Rt}\triangle ABN$ 中, $AN^2 = AB^2 - BN^2$, 在 $\text{Rt}\triangle ANC$ 中, $AN^2 = AC^2 - CN^2$, 得出 $a = \frac{29}{12}$, 在 $\text{Rt}\triangle MGD$ 中, 勾股定理即可求解.

【详解】解: ①当 $AB = AC = BC$ 时, $\triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ$$

$$\therefore \angle EAD = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$\therefore$ 等腰直角 $\triangle ABE$ 、 $\triangle ACD$,

$$\therefore BA = BE, BA = AD$$

$$\therefore AE = AD$$

$$\therefore \angle AED = \angle ADE = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ; \text{ 故①正确;}$$

② $\therefore$ 等腰直角 $\triangle ABE$ 、 $\triangle ACD$,

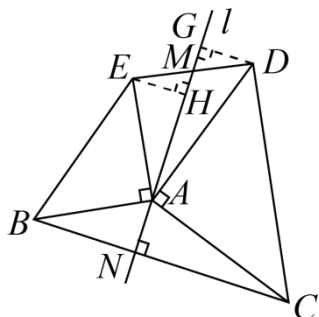
$$\therefore AB = AE, AD = AC, \angle BAE = \angle DAC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BAD = \angle EAC$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle EAC$$

$$\therefore EC = BD; \text{ 故②正确;}$$

④如图所示, 作直线 $MN \perp BC$ 于点 N , 过点 D 作 $DG \perp MN$ 于点 G , 过点 E 作 $EH \perp MN$ 于点 H ,



$$\therefore \angle BAE = 90^\circ, MN \perp BC$$

$$\therefore \angle ABN + \angle BAN = 90^\circ,$$

$$\text{又 } \angle EAM + \angle BAN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAM = \angle ABN$$

$$\text{又 } \therefore EA = AB,$$

$$\therefore \triangle EAH \cong \triangle ABN \text{ (AAS)}$$

同理得, $\triangle ACN \cong \triangle DAG$,

$$\therefore GD = AN, AG = CN, EH = AN, AH = BN,$$

$$\because \angle EMH = \angle DMG, \angle EHM = \angle DGM = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle EHM \cong \triangle DGM (\text{AAS}),$$

$$\therefore EM = DM, \text{ 即 } M \text{ 是 } ED \text{ 的中点, 故④正确,}$$

$$\therefore MG = MH,$$

$$\text{设 } BN = a, \text{ 则 } CN = BC - BN = 6 - a$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABN \text{ 中, } AN^2 = AB^2 - BN^2$$

$$\text{在 Rt}\triangle ANC \text{ 中, } AN^2 = AC^2 - CN^2$$

$$\therefore AB^2 - BN^2 = AC^2 - CN^2$$

$$\therefore 3^2 - a^2 = 4^2 - (6 - a)^2$$

$$\text{解得: } a = \frac{29}{12}$$

$$\therefore AG = CN = 6 - \frac{29}{12} = \frac{43}{12},$$

$$\therefore AN = \sqrt{AB^2 - BN^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{29}{12}\right)^2} = \frac{\sqrt{455}}{12},$$

$$\therefore GH = AG - AH = AN - BN = 6 - 2a = 6 - 2 \times \frac{29}{12} = \frac{7}{6}$$

$$\therefore MG = \frac{1}{2} \times \frac{7}{6} = \frac{7}{12}$$

$$\text{在 Rt}\triangle MGD \text{ 中, } MD = \sqrt{GD^2 + MG^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{12}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{455}}{12}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$\therefore ED = 2MD = \sqrt{14}, \text{ 故③错误}$$

故答案为: ①②④.

【点睛】 本题考查了等腰直角三角形的性质，勾股定理，全等三角形的性质与判定，等腰三角形的性质，等边三角形的性质与判定，熟练掌握全等三角形的性质与判定是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 10 个小题，共 90 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

$$16. \text{ 计算: } 2\sin 30^\circ - 8 + (2 - \pi)^0 + (-1)^{2023}$$

【答案】 -7

【解析】

【分析】根据特殊角的三角函数值，零指数幂，幂的运算法则计算即可.

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】} & 2\sin 30^\circ - 8 + (2 - \pi)^0 + (-1)^{2023} \\
 &= 2 \times \frac{1}{2} - 8 + 1 + (-1) \\
 &= 1 - 8 \\
 &= -7.
 \end{aligned}$$

【点睛】本题考查了特殊角的三角函数值，零指数幂，幂的运算，熟记三角函数值，零指数幂的运算公式是解题的关键.

17. 先化简，再求值： $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ ，其中 $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

【答案】 $\frac{x-1}{x}$, $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】先根据平方差公式，完全平方公式和分式的运算法则对原式进行化简，然后将 $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ 代入化简结果求解即可.

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】解：} & \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) \\
 &= \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x+1}{x} \\
 &= \frac{x-1}{x},
 \end{aligned}$$

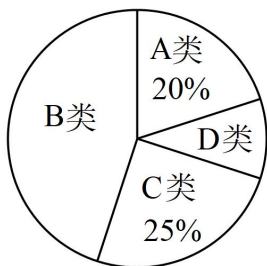
当 $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ 时，原式 $= \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查了分式的化简求值，掌握平方差公式，完全平方公式和分式的运算法则是解题关键.

18. 为贯彻落实党的二十大关于深化全民阅读活动的重要部署，教育部印发了《全国青少年学生读书行动实施方案》，于是某中学开展了以“书香润校园，好书伴成长”为主题的系列读书活动. 学校为了解学生周末的阅读情况，采用随机抽样的方式获取了若干名学生的周末阅读时间数据，整理后得到下列不完整的图表：

类别	A 类	B 类	C 类	D 类
阅读时长 t (小时)	$0 \leq t < 1$	$1 \leq t < 2$	$2 \leq t < 3$	$t \geq 3$

频数	8	m	n	4
----	---	-----	-----	---



请根据图表中提供的信息，解答下面的问题：

- (1) 此次调查共抽取了_____名学生， $m =$ _____， $n =$ _____；
- (2) 扇形统计图中， B 类所对应的扇形的圆心角是_____度；
- (3) 已知在 D 类的 4 名学生中有两名男生和两名女生，若从中随机抽取两人参加阅读分享活动，请用列表或画树状图的方法求出恰好抽到一名男生和一名女生的概率。

【答案】(1) 40, 18, 10

(2) 162 (3) $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据 A 类学生的人数及占比可求得抽取的学生人数，继而求得 m 、 n 的值；

(2) 用 360° 乘 B 类人数的占比即可求解；

(3) 列表法展示所有 12 种等可能的结果，找出一名男生和一名女生的结果数，然后根据概率公式求解。

【小问 1 详解】

解： $8 \div 20\% = 40$ (名)，

$n = 40 \times 25\% = 10$ ，

$m = 40 - 8 - 10 - 4 = 18$ ，

故答案为：40, 18, 10；

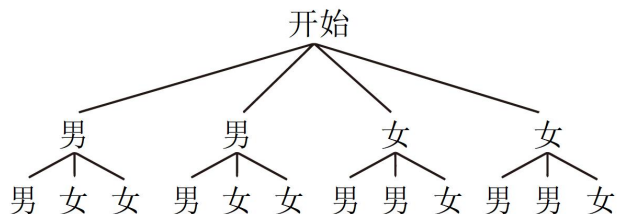
【小问 2 详解】

解： $360^\circ \times \frac{18}{40} = 162^\circ$ ，

故答案为：162；

【小问 3 详解】

解：画树状图为：

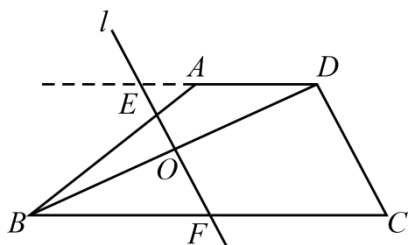


共有 12 种等可能的结果，其中一名男生和一名女生的结果数为 8，

所以恰好抽到一名男生和一名女生的概率 $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ 。

【点睛】本题考查了列表法与树状图法：利用列表法或树状图展示所有可能的结果求出 n ，再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m ，然后利用概率公式求出事件 A 或 B 的概率。也考查了统计图。

19. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，点 O 为对角线 BD 的中点，过点 O 的直线 l 分别与 AD 、 BC 所在的直线相交于点 E 、 F 。（点 E 不与点 D 重合）



(1) 求证： $\triangle DOE \cong \triangle BOF$ ；

(2) 当直线 $l \perp BD$ 时，连接 BE 、 DF ，试判断四边形 $EBFD$ 的形状，并说明理由。

【答案】(1) 见解析 (2) 四边形 $EBFD$ 为菱形；理由见解析

【解析】

【分析】(1) 根据 AAS 证明 $\triangle DOE \cong \triangle BOF$ 即可；

(2) 连接 EB 、 FD ，根据 $\triangle DOE \cong \triangle BOF$ ，得出 $ED = BF$ ，根据 $ED \parallel BF$ ，证明四边形 $EBFD$ 为平行四边形，根据 $EF \perp BD$ ，证明四边形 $EBFD$ 为菱形即可。

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 点 O 为对角线 BD 的中点，

$$\therefore BO = DO,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ODE = \angle OBF, \quad \angle OED = \angle OFB,$$

在 $\triangle DOE$ 和 $\triangle BOF$ 中，

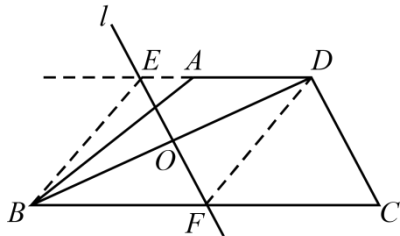
$$\begin{cases} \angle ODE = \angle OBF \\ \angle OED = \angle OFB, \\ BO = DO \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DOE \cong \triangle BOF (\text{AAS});$$

【小问 2 详解】

解：四边形 $EBFD$ 为菱形，理由如下：

连接 EB 、 FD ，如图所示：



根据解析 (1) 可知， $\triangle DOE \cong \triangle BOF$ ，

$$\therefore ED = BF,$$

$$\therefore ED \parallel BF,$$

$\therefore$ 四边形 $EBFD$ 为平行四边形，

$$\therefore l \perp BD, \text{ 即 } EF \perp BD,$$

$\therefore$ 四边形 $EBFD$ 为菱形.

【点睛】本题主要考查了三角形全等的判定和性质，菱形的判定，平行线的性质，解题的关键是熟练掌握三角形全等的判定方法和菱形的判定方法.

20. 我们规定：对于任意实数 a 、 b 、 c 、 d 有 $[a, b] * [c, d] = ac - bd$ ，其中等式右边是通常的乘法和减法运

算，如： $[3, 2] * [5, 1] = 3 \times 5 - 2 \times 1 = 13$.

(1) 求 $[-4, 3] * [2, -6]$ 的值；

(2) 已知关于 x 的方程 $[x, 2x - 1] * [mx + 1, m] = 0$ 有两个实数根，求 m 的取值范围.

【答案】(1) 10; (2) $m \leq \frac{1}{4}$ 且 $m \neq 0$.

【解析】

【分析】(1) 根据新定义计算即可求解；

(2) 根据新定义得到一元二次方程，利用根的判别式列式计算即可求解.

【小问 1 详解】

解： $\therefore [a, b] * [c, d] = ac - bd$,

$$\therefore [-4, 3] * [2, -6] = -4 \times 2 - 3 \times (-6) = -8 + 18 = 10;$$

【小问 2 详解】

解： $\because [x, 2x-1] * [mx+1, m] = 0$,

$$\therefore x \cdot (mx+1) - (2x-1) \cdot m = 0,$$

$$\text{整理得 } mx^2 + (1-2m)x + m = 0,$$

$\therefore$ 关于 x 的方程 $[x, 2x-1] * [mx+1, m] = 0$ 有两个实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (1-2m)^2 - 4m^2 \geq 0, \text{ 且 } m \neq 0,$$

$$\text{解得 } m \leq \frac{1}{4} \text{ 且 } m \neq 0.$$

【点睛】 本题考查了新定义运算，根的判别式，牢记“当 $\Delta \geq 0$ 时，方程有两个实数根”是解题的关键.

21. 端午节是我国入选世界非物质文化遗产的传统节日，端午节吃粽子是中华民族的传统习俗. 某超市为了满足人们的需求，计划在端午节前购进甲、乙两种粽子进行销售，经了解，每个乙种粽子的进价比每个甲种粽子的进价多 2 元，用 1000 元购进甲种粽子的个数与用 1200 元购进乙种粽子的个数相同.

(1) 甲、乙两种粽子每个的进价分别是多少元？

(2) 该超市计划购进这两种粽子共 200 个（两种都有），其中甲种粽子的个数不低于乙种粽子个数的 2 倍，若甲、乙两种粽子的售价分别为 12 元/个、15 元/个，设购进甲种粽子 m 个，两种粽子全部售完时获得的利润为 w 元.

①求 w 与 m 的函数关系式，并求出 m 的取值范围；

②超市应如何进货才能获得最大利润，最大利润是多少元？

【答案】 (1) 甲粽子每个的进价为 10 元，则乙粽子每个的进价为 12 元；

(2) ① w 与 m 的函数关系式为 $w = -m + 600 \left(m \geq 133\frac{1}{3} \right)$ ；② 购进甲粽子 134 个，乙粽子 66 个才能获得

最大利润，最大利润为 466 元.

【解析】

【分析】 (1) 设甲粽子每个的进价为 x 元，则乙粽子每个的进价为 $(x+2)$ 元，根据“用 1000 元购进甲种粽子的个数与用 1200 元购进乙种粽子的个数相同”列出分式方程，解方程即可；

(2) ① 设购进甲粽子 m 个，则乙粽子 $(200-m)$ 个，由题意得 $w = -m + 600$ ，再由甲种粽子的个数不低于乙种粽子个数的 2 倍，得 $m \geq 2(200-m)$ ；

② 由一次函数的性质即可得出结论.

【小问 1 详解】

解：设甲粽子每个的进价为 x 元，则乙粽子每个的进价为 $(x+2)$ 元，

$$\text{由题意得：} \frac{1000}{x} = \frac{1200}{x+2},$$

$$\text{解得：} x=10,$$

经检验： $x=10$ 是原方程的解，且符合题意，

$$\text{则 } x+2=12,$$

答：甲粽子每个的进价为 10 元，则乙粽子每个的进价为 12 元；

【小问 2 详解】

解：①设购进甲粽子 m 个，则乙粽子 $(200-m)$ 个，利润为 w 元，

$$\text{由题意得：} w = (12-10)m + (15-12)(200-m) = -m + 600,$$

$\because$ 甲种粽子的个数不低于乙种粽子个数的 2 倍，

$$\therefore m \geq 2(200-m),$$

$$\text{解得：} m \geq 133\frac{1}{3},$$

$$\therefore w \text{ 与 } m \text{ 的函数关系式为 } w = -m + 600 \left(m \geq 133\frac{1}{3} \right);$$

② $\because -1 < 0$ ，则 w 随 m 的增大而减小， $m \geq 133\frac{1}{3}$ ，即 m 的最小整数为 134，

$$\therefore \text{当 } m=134 \text{ 时，} w \text{ 最大，最大值} = -134 + 600 = 466,$$

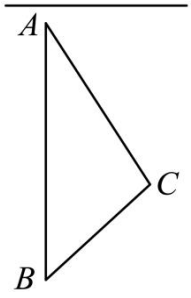
$$\text{则 } 200-m=66,$$

答：购进甲粽子 134 个，乙粽子 66 个才能获得最大利润，最大利润为 466 元.

【点睛】本题考查了分式方程的应用，一元一次不等式的应用以及一次函数的应用，解题的关键是：(1) 找准等量关系，正确列出分式方程；(2) 找出数量关系，正确列出一元一次不等式.

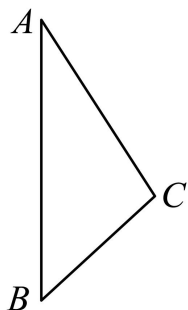
22. 某实践探究小组想测得湖边两处的距离，数据勘测组通过勘测，得到了如下记录表：

实践探究活动记录表		
活动内容	测量湖边 A 、 B 两处的距离	
成员	组长：xxx	组员：xxxxxxxxxxxx
测量工具	测角仪，皮尺等	

测量示意图		说明：因为湖边 A 、 B 两处的距离无法直接测量，数据勘测组在湖边找了一处位置 C ，可测量 C 处到 A 、 B 两处的距离，通过测角仪可测得 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的度数.
测量数据	角的度数	$\angle A = 30^\circ$
		$\angle B = 45^\circ$
		$\angle C = 105^\circ$
	边的长度	$BC = 40.0$ 米
		$AC = 56.4$ 米

数据处理组得到上面数据以后做了认真分析，他们发现不需要勘测组的全部数据就可以计算出 A 、 B 之间的距离，于是数据处理组写出了以下过程，请补全内容.

已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ，_____。（从记录表中再选一个条件填入横线）



求：线段 AB 的长。（为减小结果的误差，若有需要， $\sqrt{2}$ 取 1.41， $\sqrt{3}$ 取 1.73， $\sqrt{6}$ 取 2.45 进行计算，最后结果保留整数.）

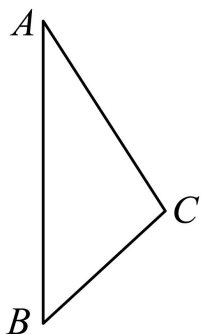
【答案】 $AC = 56.4$ 米，线段 AB 的约长为 77 米； $BC = 40.0$ 米，线段 AB 的约长为 77 米

【解析】

【分析】 填入数据 $AC = 56.4$ 米，作 $CD \perp AB$ 于点 D ，在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 和 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中，解直角三角形即可求解.

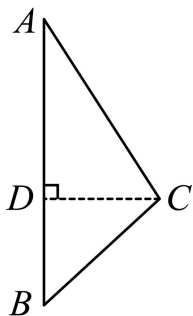
【详解】 (1) 当填入 $AC = 56.4$ 米时：

已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， $AC = 56.4$ 米。（从记录表中再选一个条件填入横线）



求：线段 AB 的长.

解：作 $CD \perp AB$ 于点 D ,



在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\angle A = 30^\circ$, $AC = 56.4$,

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AC = 28.2, \quad AD = \sqrt{3}CD = 28.2\sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $\angle B = 45^\circ$, $CD = 28.2$,

$$\therefore \angle BCD = 45^\circ,$$

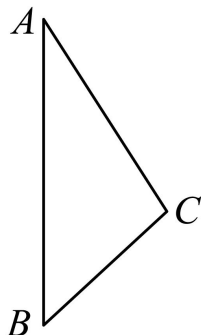
$$\therefore BD = CD = 28.2,$$

$$\therefore AB = AD + BD = 28.2\sqrt{3} + 28.2 \approx 77(\text{米}),$$

答：线段 AB 的约长为 77 米.

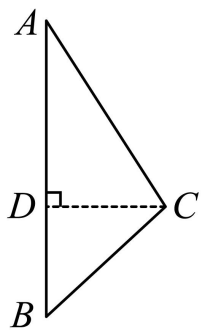
(2) 当填入 $BC = 40.0$ 米时:

已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$. $BC = 40.0$ 米. (从记录表中再选一个条件填入横线)



求：线段 AB 的长.

解：作 $CD \perp AB$ 于点 D ,



在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $\angle B = 45^\circ$, $BC = 40.0$,

$$\therefore \angle BCD = 45^\circ,$$

$$\therefore BD = CD = \frac{\sqrt{2}}{2} BC \approx 28.2,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\angle A = 30^\circ$, $DC = 28.2$,

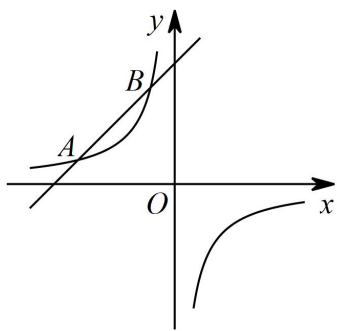
$$\therefore AD = \frac{CD}{\tan 30^\circ} = 28.2\sqrt{3},$$

$$\therefore AB = AD + BD = 28.2\sqrt{3} + 28.2 \approx 77(\text{米}),$$

答: 线段 AB 的约长为 77 米.

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用-其他问题, 根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键.

23. 如图, 一次函数 $y = k_1x + b$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{k_2}{x}$ 的图像交于 $A(-4, 1)$, $B(m, 4)$ 两点. (k_1 , k_2 , b 为常数)



- (1) 求一次函数和反比例函数的解析式;
- (2) 根据图像直接写出不等式 $k_1x + b > \frac{k_2}{x}$ 的解集;
- (3) P 为 y 轴上一点, 若 $\triangle PAB$ 的面积为 3, 求 P 点的坐标.

【答案】 (1) $y = x + 5$; $y = -\frac{4}{x}$

(2) $-4 < x < -1$

(3) $(0,3)$ **【解析】****【分析】**(1) 利用待定系数法即可求出函数解析式；

(2) 根据图像位置关系即可得解；

(3) 设 $P(0, m)$ ，根据 $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PDA} + S_{\triangle PDB}$ 关系列方程，然后解方程即可得解.**【小问 1 详解】**解：将点 $A(-4, 1)$ 代入 $y = \frac{k_2}{x}$ 得 $1 = \frac{k_2}{-4}$,

$$\therefore k_2 = -4,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = -\frac{4}{x};$$

将点 $B(m, 4)$ 代入 $y = -\frac{4}{x}$ 得 $4 = -\frac{4}{m}$,

$$\therefore m = -1,$$

将点 $A(-4, 1)$ 、 $B(-1, 4)$ 分别代入 $y = k_1x + b$ 得 $\begin{cases} 1 = -4k_1 + b \\ 4 = -k_1 + b \end{cases}$,

$$\text{解得 } \begin{cases} k_1 = 1 \\ b = 5 \end{cases},$$

$$\therefore \text{一次函数的解析式为 } y = x + 5;$$

【小问 2 详解】根据图像可知，当 $-4 < x < -1$ 时，直线在反比例函数图像的上方，满足 $k_1x + b > \frac{k_2}{x}$,

$$\therefore \text{不等式 } k_1x + b > \frac{k_2}{x} \text{ 的解集为 } -4 < x < -1;$$

【小问 3 详解】如图过点 P 作 x 轴平行线 l 与 AB 交于点 D ，分别过点 A 、 B 作直线 l 垂线，垂足分别为点 C 、 E ，设 $P(0, m)$ ，则 $D(m-5, m)$ ，

$$\therefore PD = 5 - m,$$

$$\text{则 } S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PDA} + S_{\triangle PDB}$$

$$= \frac{1}{2}PD \cdot CA + \frac{1}{2}PD \cdot BE$$

$$= \frac{1}{2}PD(BE + CA)$$

$$= \frac{3}{2}PD$$

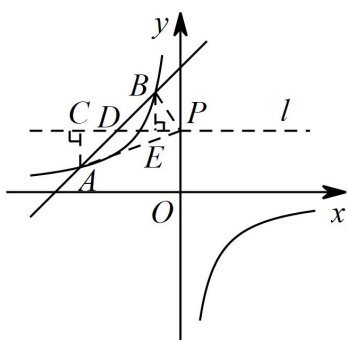
$$= \frac{3}{2}(5-m),$$

$\therefore \triangle PAB$ 的面积为 3,

$$\therefore \frac{3}{2}(5-m) = 3,$$

$$\therefore m = 3,$$

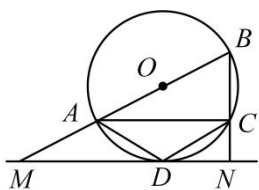
即 P 点的坐标为 $(0, 3)$.



【点睛】本题考查反比例函数与一次函数综合、待定系数法求解析式、利

用图像解不等式等知识，掌握反比例函数与一次函数图像与性质是解题关键.

24. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ， AB 为 $\odot O$ 的直径， $AD = CD$ ，过点 D 的直线 l 交 BA 的延长线于点 M ，交 BC 的延长线于点 N ，且 $\angle ADM = \angle DAC$.



(1) 求证: MN 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 求证: $AD^2 = AB \cdot CN$;

(3) 当 $AB = 6$, $\sin \angle DCA = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 求 AM 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 6

【解析】

【分析】(1) 连接 OD , OC , 根据圆心角, 弦, 弧的关系可得 $\angle AOD = \angle DOC$, 根据直径所对的圆周角是 90° 可得 $\angle ACB = 90^\circ$, 半径相等可得 $OC = OA = OB = OD$, 根据等腰的判定可得 $\triangle AOC$ 是等腰三

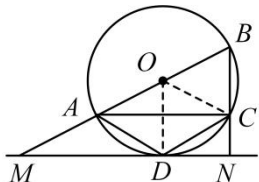
角形，根据等腰三角形三线合一的性质可得 OD 垂直平分 AC ，根据平行线的判定和性质可得 $OD \perp MN$ ，即可证明；

(2) 连接 BD ，根据同弧所对的圆周角相等可得 $\angle ABD = \angle ACD$ ，根据平行线的性质可得 $\angle ACB = \angle MNB = 90^\circ$ ， $\angle CDN = \angle ACD$ ，推得 $\angle DCN = \angle BAD$ ，根据相似三角形的判定和性质可得 $AD \cdot CD = AB \cdot CN$ ，即可求证；

(3) 令 OD 与 AC 交于点 H , 根据正弦的定义可求得 $CD=AD=2\sqrt{3}$, $DH=2$, 根据勾股定理可求得 $AC=2AH=4\sqrt{2}$, $BC=2$, 根据矩形的判定和性质可得 $CN=2$, $BN=4$, 根据相似三角形的判定和性质可求得 $BM=12$, 即可求得.

【小问 1 详解】

连接 OD , OC , 如图:



$$\therefore AD = CD,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle DOC.$$

∵ 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, AB 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore OC = OA = OB = OD,$$

$\therefore \triangle AOC$ 是等腰三角形,

又 $\because \angle AOD = \angle DOC$,

$\therefore OD$ 垂直平分 AC ,

$$\therefore \angle ADM = \angle DAC,$$

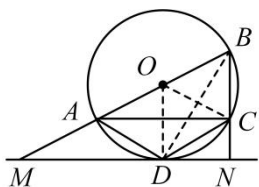
$$\therefore AC \parallel MN,$$

$$\therefore OD \perp MN,$$

即 MN 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

连接 BD ，如图：



$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{AD}$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACD,$$

$$\therefore AC \parallel MN,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle MNB = 90^\circ, \quad \angle CDN = \angle ACD,$$

$$\therefore \angle CDN = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle DCN = \angle BAD,$$

$$\because \angle CDN = \angle ABD, \quad \angle ADB = \angle DNC = 90^\circ, \quad \angle DCN = \angle BAD,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CDN,$$

$$\therefore \frac{CN}{AD} = \frac{CD}{AB},$$

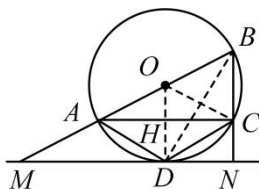
即 $AD \cdot CD = AB \cdot CN$,

又 $\because AD = CD$,

$$\therefore AD^2 = AB \cdot CN ;$$

【小问 3 详解】

令 OD 与 AC 交于点 H ，如图：



$$\therefore \angle DCA = \angle DBA,$$

$$\therefore \sin \angle DCA = \sin \angle DBA = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore AB = 6,$$

$$\therefore AD = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore CD=AD=2\sqrt{3},$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DCA,$$

$$\therefore \sin \angle DCA = \sin \angle DAC = \frac{DH}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore DH = 2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AHD \text{ 中, } AH = \sqrt{AD^2 - HD^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore AC = 2AH = 4\sqrt{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{6^2 - (4\sqrt{2})^2} = 2,$$

$$\therefore OD \perp MN, \quad BN \perp MN, \quad AC \perp BC,$$

$\therefore$ 四边形 $HCND$ 为矩形,

$$\therefore CN = DH = 2,$$

$$\therefore BN = BC + CN = 4$$

$$\therefore AC \parallel MN,$$

$$\therefore \angle BAC \sim \angle BMN,$$

$$\therefore \frac{BA}{BM} = \frac{BC}{BN}$$

$$\text{即 } \frac{6}{BM} = \frac{2}{4},$$

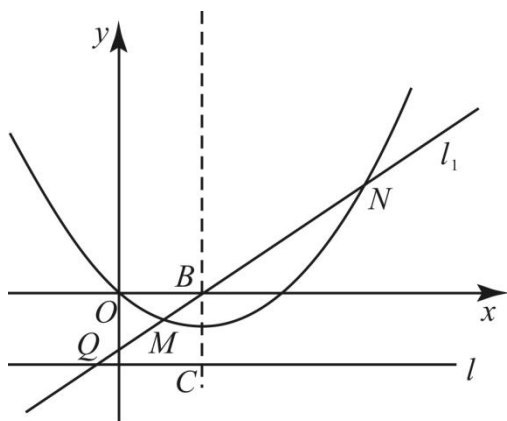
$$\therefore BM = 12,$$

$$\therefore AM = BM - BA = 12 - 6 = 6.$$

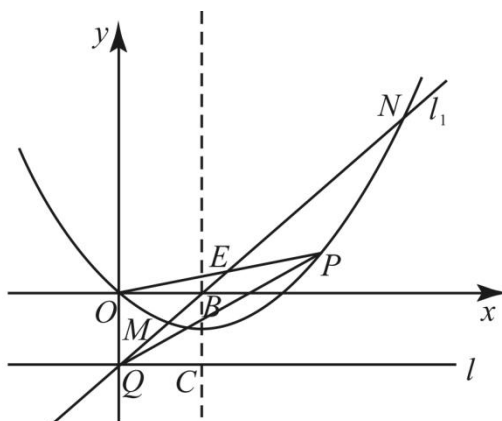
【点睛】本题考查了圆心角，弦，弧的关系，直径所对的圆周角是 90 度，圆内接四边形的性质，等腰的判定，等腰三角形三线合一的性质，平行线的判定和性质，同弧所对的圆周角相等，相似三角形的判定和性质，正弦的定义，勾股定理，矩形的判定和性质，熟练掌握以上性质是解题的关键。

25. 在平面直角坐标系中， O 为坐标原点，抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$ 经过点 $O(0, 0)$ ，对称轴过点 $B(2,$

$0)$ ，直线 l 过点 $C(2, -2)$ ，且垂直于 y 轴。过点 B 的直线 l_1 交抛物线于点 M 、 N ，交直线 l 于点 Q ，其中点 M 、 Q 在抛物线对称轴的左侧。



(图1)



(图2)

- (1) 求抛物线的解析式;
- (2) 如图 1, 当 $BM : MQ = 3 : 5$ 时, 求点 N 的坐标;
- (3) 如图 2, 当点 Q 恰好在 y 轴上时, P 为直线 l_1 下方的抛物线上一动点, 连接 PQ 、 PO , 其中 PO 交 l_1 于点 E , 设 $\triangle OQE$ 的面积为 S_1 , $\triangle PQE$ 的面积为 S_2 . 求 $\frac{S_2}{S_1}$ 的最大值.

【答案】(1) $y = \frac{1}{4}x^2 - x$

(2) $N(6, 3)$

(3) 1

【解析】

【分析】(1) 待定系数法求解析式即可求解;

(2), 过点 M 作 $MD \perp x = 2$, 垂足为 D 根据已知条件得出 $BD : CD = BM : MQ = 3 : 5$, 进而列出方程, 解方程, 即可求解;

(3) 先求得直线 QB 的解析式为 $y = x - 2$, 设 $P\left(n, \frac{1}{4}n^2 - n\right)$, 得出直线 OP 的解析式为 $y = \left(\frac{1}{4}n - 1\right)x$,

联立 $\begin{cases} y = \left(\frac{1}{4}n - 1\right)x \\ y = x - 2 \end{cases}$ 得出 $E\left(\frac{8}{8-n}, \frac{8}{8-n} - 2\right)$, 根据等底两三角形的面积比等于高之比, 得出

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{x_P - x_E}{x_E}$, 进而得出关于 n 的二次函数关系, 根据二次函数的性质即可求解.

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$ 经过点 $O(0, 0)$ ，对称轴过点 $B(2, 0)$ ，

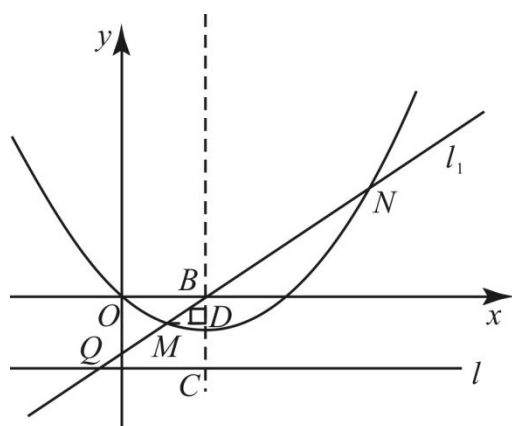
$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{4} \times 2^2 + 2b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$

∴ 抛物线解析式为 $y = \frac{1}{4}x^2 - x$ ；

【小问 2 详解】

解：如图所示，过点 M 作对称轴 $x = 2$ 的垂线 MD ，垂足为 D ，



(图1)

设 $M\left(m, \frac{1}{4}m^2 - m\right)$ ，则 $D\left(2, \frac{1}{4}m^2 - m\right)$ ，

∴ $MD \parallel QC$ ，

∴ $BD : CD = BM : MQ = 3 : 5$ ，

∴ $C(2, -2)$ ，

$$\therefore \frac{0 - \left(\frac{1}{4}m^2 - m\right)}{\frac{1}{4}m^2 - m - (-2)} = \frac{3}{5},$$

解得： $m = 1$ 或 $m = 3$ ，

∴ 其中点 MQ 在抛物线对称轴的左侧.

$$\therefore m=1,$$

$$\therefore M\left(1, -\frac{3}{4}\right),$$

设直线 BM 的解析式为 $y=kx+b$,

$$\therefore \begin{cases} k+b=-\frac{3}{4}, \\ 2k+b=0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k=\frac{3}{4} \\ b=-\frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } BM \text{ 的解析式为 } y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2},$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{4}x^2-x \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{3}{4} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases},$$

$$\therefore N(6,3);$$

【小问3详解】

解：依题意，点 Q 恰好在 y 轴上，则 $Q(0,-2)$,

设直线 QB 的解析式为 $y=tx-2$,

将 $B(0,2)$ 代入得 $2t-2=0$,

解得: $t=1$,

$\therefore$ 直线 QB 的解析式为 $y=x-2$,

设 $P\left(n, \frac{1}{4}n^2-n\right)$, 设直线 OP 的解析式为 $y=k_1x$,

$$\text{则 } k_1=\frac{1}{4}n-1,$$

∴ 直线 OP 的解析式为 $y = \left(\frac{1}{4}n - 1\right)x$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = \left(\frac{1}{4}n - 1\right)x, \\ y = x - 2 \end{cases},$$

$$\text{解得:} \begin{cases} x = \frac{8}{8-n} \\ y = \frac{8}{8-n} - 2 \end{cases},$$

$$\therefore E\left(\frac{8}{8-n}, \frac{8}{8-n} - 2\right),$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{x_P - x_E}{x_E} = \frac{n - \frac{8}{8-n}}{\frac{8}{8-n}} = \frac{8n - n^2}{8} - 1$$

$$= -\frac{1}{8}n^2 + n - 1$$

$$= -\frac{1}{8}(n^2 - 8n) - 1$$

$$= -\frac{1}{8}(n-4)^2 + 1,$$

∴ 当 $n = 4$ 时, 取得最大值为 1.

【点睛】 本题考查了二次函数综合问题, 平行线分线段比例, 面积问题, 待定系数法求解析式, 熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

