

达州市 2023 年高中阶段学校招生统一考试暨初中学业水平考试

数学

本考试为闭卷考试，考试时间 120 分钟，满分 150 分。本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 8 页。

温馨提示：

1. 答题前，考生需用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、准考证号、座位号正确填写在答题卡对应位置。待监考老师粘贴条形码后，再认真核对条形码上的信息与自己的准考证上的信息是否一致。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔在答题卡相应位置规范填涂。如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其他答案标号；非选择题用 0.5 毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡对应的框内，超出答题区答案无效；在草稿纸、试题卷上作答无效。
3. 保持答题卡整洁，不要折叠、弄破、弄皱，不得使用涂改液、修正带、刮纸刀。
4. 考试结束后，将试卷及答题卡一并交回。

第 I 卷（选择题 共 40 分）

一、单项选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1. -2023 的倒数是（ ）

- A. -2023 B. 2023 C. $-\frac{1}{2023}$ D. $\frac{1}{2023}$

【答案】C

【解析】

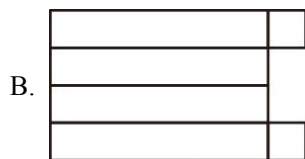
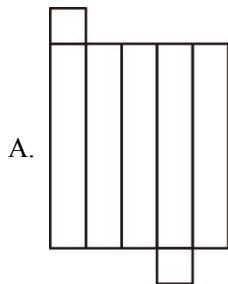
【分析】根据相乘等于 1 的两个数互为倒数，即可求解。

【详解】解： -2023 的倒数是 $-\frac{1}{2023}$ ，

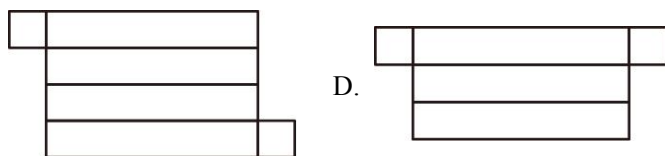
故选：C。

【点睛】本题考查了倒数，掌握倒数的定义是解题的关键。

2. 下列图形中，是长方体表面展开图的是（ ）



C.



【答案】C

【解析】

【分析】根据长方体有六个面，以及Z字型进行判断即可.

【详解】解：A 中展开图有 7 个面，不符合要求；

B 中展开图无法还原成长方体，不符合要求；

C 正确，故符合要求；

D 中展开图有 5 个面，不符合要求，

故选：C.

【点睛】本题考查了长方体的展开图. 解题的关键在于对知识的熟练掌握.

3. 某市政府在 2022 年着力稳定宏观经济大盘, 全市经济发展取得新成效, 全年生产总值实现 2502.7 亿元. 数据 2502.7 亿用科学记数法表示为 ()

- A. 2502.7×10^8 B. 2.5027×10^{11} C. 2.5027×10^{10} D. 2.5027×10^3

【答案】B

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同.

【详解】解：2502.7 亿元 = 250270000000 元

$$250270000000 = 2.5027 \times 10^{11}$$

故选：B.

【点睛】此题主要考查了科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. 一组数据 2, 3, 5, 2, 4, 则这组数据的众数和中位数分别为 ()

- A. 3 和 5 B. 2 和 5 C. 2 和 3 D. 3 和 2

【答案】C

【解析】

【分析】根据众数和中位数的概念求解.

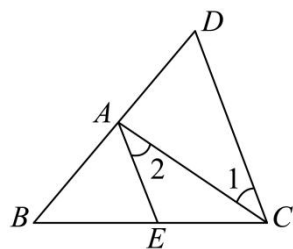
【详解】解：将数据重新排列为 2, 2, 3, 4, 5,

所以这组数据的众数为 2，中位数 3，

故选 C.

【点睛】本题考查了众数和中位数的概念：一组数据中出现次数最多的数据叫做众数；将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数；如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

5. 如图， $AE \parallel CD$ ， AC 平分 $\angle BCD$ ， $\angle 2 = 35^\circ$ ， $\angle D = 60^\circ$ 则 $\angle B =$ ()



A. 52°

B. 50°

C. 45°

D. 25°

【答案】B

【解析】

【分析】根据平行线的性质得出 $\angle 1 = \angle 2 = 35^\circ$ ，再由角平分线确定 $\angle BCD = 70^\circ$ ，利用三角形内角和定理求解即可.

【详解】解： $\because AE \parallel CD$,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 35^\circ,$$

$\because AC$ 平分 $\angle BCD$,

$$\therefore \angle BCD = 2\angle 1 = 70^\circ,$$

$$\because \angle D = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - \angle BCD - \angle D = 50^\circ,$$

故选：B.

【点睛】题目主要考查平行线的性质及角平分线的计算，三角形内角和定理，理解题意，综合运用这些知识点是解题关键.

6. 下列计算正确的是 ()

A. $a + a^2 = a^3$

B. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

C. $(2a^3b)^3 = 6a^9b^3$

D. $a^6 \div a^4 = a^2$

【答案】D

【解析】

【分析】分别利用合并同类项、同底数幂的乘法、积的乘方和幂的乘方、同底数幂的除法运算法则逐项判断即可作出选择.

【详解】解：A、 a 与 a^2 不能合并，故本选项计算错误，不符合题意；

B、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故本选项计算错误，不符合题意；

C、 $(2a^3b)^3 = 8a^9b^3$ ，故本选项计算错误，不符合题意；

D、 $a^6 \div a^4 = a^2$ ，故本选项计算正确，符合题意。

故选：D。

【点睛】本题考查合并同类项、同底数幂的乘法、积的乘方和幂的乘方、同底数幂的除法，熟练掌握相关运算法则是解答的关键。

7. 某镇的“脆红李”深受广大市民的喜爱，也是馈赠亲友的尚佳礼品，首批“脆红李”成熟后，当地某电商用12000元购进这种“脆红李”进行销售，面市后，线上订单猛增供不应求，该电商又用11000元购进第二批这种“脆红李”，由于更多“脆红李”成熟，单价比第一批每件便宜了5元，但数量比第一批多购进了40件，求购进的第一批“脆红李”的单价。设购进的第一批“脆红李”的单价为 x 元/件，根据题意可列方程为（ ）

A. $\frac{12000}{x} = \frac{11000}{x-5} - 40$

B. $\frac{12000}{x} - 40 = \frac{11000}{x+5}$

C. $\frac{12000}{x+5} + 40 = \frac{11000}{x}$

D. $\frac{11000}{x} + 40 = \frac{12000}{x-5}$

【答案】A

【解析】

【分析】设购进的第一批“脆红李”的单价为 x 元/件，则购进第二批“脆红李”的单价为 $(x-5)$ 元/件，根据购进的第二批这种“脆红李”比第一批多购进了40件，列出方程即可。

【详解】解：设购进的第一批“脆红李”的单价为 x 元/件，则购进第二批“脆红李”的单价为 $(x-5)$ 元/件，根据题意得：

$$\frac{12000}{x} = \frac{11000}{x-5} - 40, \text{ 故 A 正确.}$$

故选：A。

【点睛】本题主要考查了分式方程的应用，解题的关键是找出题目中的等量关系式。

8. 下列命题中，是真命题的是（ ）

A. 平行四边形是轴对称图形

B. 对角线互相垂直的四边形是菱形

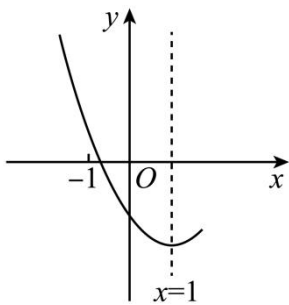
C. 到一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上

D. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$ ，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形

【详解】解：由图可知，曲线 $DA_1B_1C_1D_1A_2\cdots$ 是由一段段 90° 的弧组成的，半径每次比前一段弧半径 $+\frac{1}{2}$ ，
 $\therefore AD = AA_1 = \frac{1}{2}$ ， $BA_1 = BB_1 = 1$ ， $CB_1 = CC_1 = \frac{3}{2}$ ， $DC_1 = DD_1 = 2$ ，
 $AD_1 = AA_2 = 2 + \frac{1}{2}$ ， $BA_2 = BB_2 = 2 + 1$ ， $CB_2 = CC_2 = 2 + \frac{3}{2}$ ， $DC_2 = DD_2 = 2 + 2$ ，
 $\cdots$ ，
 $AD_{n-1} = AA_n = 4 \times \frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{2}$ ， $BA_n = BB_n = 4 \times \frac{1}{2}(n-1) + 1$ ，
 故 $\widehat{A_{2023}B_{2023}}$ 的半径为 $BA_{2023} = BB_{2023} = 4 \times \frac{1}{2} \times (2023-1) + 1 = 4045$ ，
 $\therefore \widehat{A_{2023}B_{2023}}$ 的弧长 $= \frac{90}{180} \times 4045\pi = \frac{4045}{2}\pi$ 。
 故选 A

【点睛】此题主要考查了弧长的计算，弧长的计算公式： $l = \frac{n\pi r}{180}$ ，找到每段弧的半径变化规律是解题关键。

10. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数) 关于直线 $x = 1$ 对称。下列五个结论：① $abc > 0$ ；
 ② $2a + b = 0$ ；③ $4a + 2b + c > 0$ ；④ $am^2 + bm > a + b$ ；⑤ $3a + c > 0$ 。其中正确的有 ()



A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

【答案】B

【解析】

【分析】由抛物线的开口方向、与 y 轴交点以及对称轴的位置可判断 a 、 b 、 c 的符号，由此可判断①正确；
 由抛物线的对称轴为 $x = 1$ ，得到 $-\frac{b}{2a} = 1$ ，即可判断②；可知 $x = 2$ 时和 $x = 0$ 时的 y 值相等可判断③正确；
 由图知 $x = 1$ 时二次函数有最小值，可判断④错误；由抛物线的对称轴为 $x = 1$ 可得 $b = -2a$ ，因此
 $y = ax^2 - 2ax + c$ ，根据图像可判断⑤正确。

【详解】① $\because$ 抛物线的开口向上，

$\therefore a > 0$ 。

$\because$ 抛物线与 y 轴交点在 y 轴的负半轴上，

$$\therefore c < 0.$$

$$\text{由 } -\frac{b}{2a} > 0 \text{ 得, } b < 0,$$

$$\therefore abc > 0,$$

故①正确;

② $\because$ 抛物线的对称轴为 $x = 1$,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 1,$$

$$\therefore b = -2a,$$

$$\therefore 2a + b = 0, \text{ 故②正确;}$$

③由抛物线的对称轴为 $x = 1$, 可知 $x = 2$ 时和 $x = 0$ 时的 y 值相等.

由图知 $x = 0$ 时, $y < 0$,

$$\therefore x = 2 \text{ 时, } y < 0.$$

$$\text{即 } 4a + 2b + c < 0.$$

故③错误;

④由图知 $x = 1$ 时二次函数有最小值,

$$\therefore a + b + c \leq am^2 + bm + c,$$

$$\therefore a + b \leq am^2 + bm,$$

$$a + b \leq m(ax + b),$$

故④错误;

$$\text{⑤由抛物线的对称轴为 } x = 1 \text{ 可得 } -\frac{b}{2a} = 1,$$

$$\therefore b = -2a,$$

$$\therefore y = ax^2 - 2ax + c,$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } y = a + 2a + c = 3a + c.$$

由图知 $x = -1$ 时 $y > 0$,

$$\therefore 3a + c > 0.$$

故⑤正确.

综上所述: 正确的是①②⑤, 有 3 个,

故选: B.

【点睛】 本题主要考查了二次函数的图像与系数的关系, 二次函数的对称轴及顶点位置. 熟练掌握二次函

数图像的性质及数形结合是解题的关键.

第Ⅱ卷（非选择题 共110分）

二、填空题（每小题4分，共20分）

11. 函数 $y = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$ 的自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x > 1$

【解析】

【详解】分析：一般地从两个角度考虑：分式的分母不为0；偶次根式被开方数大于或等于0；当一个式子中同时出现这两点时，应该是取让两个条件都满足的公共部分.

解答：解：根据题意得到： $x-1 > 0$,

解得 $x > 1$.

故答案为 $x > 1$.

点评：本题考查了函数式有意义的 x 的取值范围. 判断一个式子是否有意义，应考虑分母上若有字母，字母的取值不能使分母为零，二次根号下字母的取值应使被开方数为非负数. 易错易混点：学生易对二次根式的非负性和分母不等于0混淆.

12. 已知 x_1, x_2 是方程 $2x^2 + kx - 2 = 0$ 的两个实数根，且 $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = 10$ ，则 k 的值为_____.

【答案】 7

【解析】

【分析】根据根与系数的关系求出 $x_1 + x_2$ 与 $x_1 x_2$ 的值，然后整体代入求值即可.

【详解】 $\because x_1, x_2$ 是方程 $2x^2 + kx - 2 = 0$ 的两个实数根，

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{k}{2}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{2} = -1,$$

$$\because (x_1 - 2)(x_2 - 2) = 10,$$

$$\therefore x_1 x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = 10,$$

$$x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) - 6 = 0,$$

$$-1 - 2 \times \left(-\frac{k}{2}\right) - 6 = 0,$$

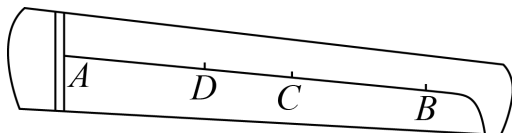
$\therefore$ 解得 $k = 7$.

故答案为：7.

【点睛】 本题考查一元二次方程根与系数的关系，代数式求值．熟记一元二次方程根与系数的关系：

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ 和 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ 是解题关键．

13. 如图，乐器上的一根弦 $AB = 80\text{cm}$ ，两个端点 A, B 固定在乐器板面上，支撑点 C 是靠近点 B 的黄金分割点，支撑点 D 是靠近点 A 的黄金分割点， C, D 之间的距离为_____．



【答案】 $(80\sqrt{5} - 160)\text{cm}$

【解析】

【分析】 黄金分割点是指把一条线段分割为两部分，使其中一部分与全长之比等于另一部分与这部分之比．其比值是一个无理数，用分数表示为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，由此即可求解．

【详解】 解：弦 $AB = 80\text{cm}$ ，点 C 是靠近点 B 的黄金分割点，设 $BC = x$ ，则 $AC = 80 - x$ ，

$$\therefore \frac{80-x}{80} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 解方程得, } x = 120 - 40\sqrt{5},$$

点 D 是靠近点 A 的黄金分割点，设 $AD = y$ ，则 $BD = 80 - y$ ，

$$\therefore \frac{80-y}{80} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 解方程得, } y = 120 - 40\sqrt{5},$$

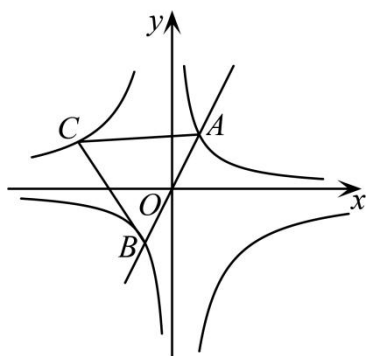
$$\therefore C, D \text{ 之间的距离为 } 80 - x - y = 80 - 120 + 40\sqrt{5} - 120 + 40\sqrt{5} = 80\sqrt{5} - 160,$$

故答案为： $(80\sqrt{5} - 160)\text{cm}$ ．

【点睛】 本题主要考查线段成比例，掌握线段成比例，黄金分割点的定义是解题的关键．

14. 如图，一次函数 $y = 2x$ 与反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象相交于 A, B 两点，以 AB 为边作等边三角形 ABC ，

若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象过点 C ，则 k 的值为_____．



【答案】 -6

【解析】

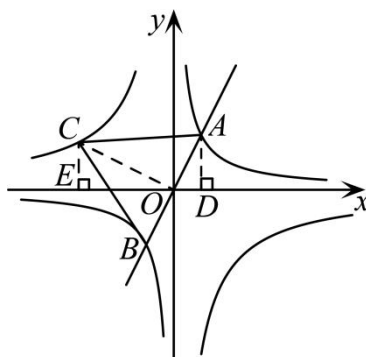
【分析】 过点 A 作 $AD \perp x$ 轴交 x 轴于点 D ，过点 C 作 $CE \perp x$ 轴于点 E ，连接 OC ，首先联立 $\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}$ 求

出 $A(1,2)$ ， $B(-1,-2)$ ，然后利用勾股定理求出 $AO = BO = \sqrt{5}$ ， $OC = \sqrt{AC^2 - OA^2} = \sqrt{15}$ ，然后证明

出 $OCE \sim AOD$ ，利用相似三角形的性质得到 $CE = \sqrt{3}$ ， $OE = 2\sqrt{3}$ ，最后将 $(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 求

解即可.

【详解】 如图所示，过点 A 作 $AD \perp x$ 轴交 x 轴于点 D ，过点 C 作 $CE \perp x$ 轴于点 E ，连接 OC ，



$\because$ 一次函数 $y = 2x$ 与反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象相交于 A, B 两点，

$$\therefore \text{联立} \begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}, \text{ 即 } 2x = \frac{2}{x},$$

$\therefore$ 解得 $x = \pm 1$,

$\therefore A(1,2)$ ， $B(-1,-2)$ ，

$\therefore OD = 1$ ， $AD = 2$ ，

$\therefore OA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ，

$$\therefore AO = BO = \sqrt{5},$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore CO \perp AB, \angle ACO = \angle BCO = \frac{1}{2} \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\therefore AC = 2OA = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore OC = \sqrt{AC^2 - OA^2} = \sqrt{15},$$

$$\therefore \angle AOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD + \angle COE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD + \angle OAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle COE,$$

$$\text{又} \because \angle CEO = \angle ODA = 90^\circ,$$

$$\therefore OCE \sim AOD,$$

$$\therefore \frac{OC}{AO} = \frac{CE}{OD} = \frac{OE}{AD}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = \frac{CE}{1} = \frac{OE}{2},$$

$$\therefore \text{解得 } CE = \sqrt{3}, OE = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (-2\sqrt{3}, \sqrt{3}),$$

$$\therefore \text{将 } (-2\sqrt{3}, \sqrt{3}) \text{ 代入 } y = \frac{k}{x} \text{ 得, } k = -2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = -6.$$

故答案为: -6 .

【点睛】 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征, 等边三角形的性质, 相似三角形的判定和性质等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造相似三角形解决问题.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4\sqrt{3}$, $\angle C = 60^\circ$, 在边 BC 上有一点 P , 且 $BP = \frac{1}{2}AC$, 连接 AP , 则 AP 的最小值为_____.

【答案】 $2\sqrt{13} - 2$

【解析】

【分析】 如图, 作 $\triangle ABC$ 的外接圆, 圆心为 M , 连接 AM 、 BM 、 CM , 过 M 作 $MD \perp AB$ 于 D , 过 B 作 $BN \perp AB$, 交 BP 的垂直平分线于 N , 连接 AN 、 BN 、 PN , 以 N 为圆心, $BN(PN)$ 为半径作圆; 结

合圆周角定理及垂径定理易得 $AM = BM = CM = 4$ ，再通过圆周角定理、垂直及垂直平分线的性质、三角形内角和定理易得 $\angle AMC = \angle PNB$ ，从而易证 $\triangle AMC \sim \triangle PNB$ 可得 $\frac{CM}{PN} = \frac{AC}{PB} = \frac{2}{1}$ 即 $PN = \frac{1}{2}CM = 2$ 勾股定理即可求得 $AN = 2\sqrt{13}$ 在 $\triangle APN$ 中由三角形三边关系 $AP \geq AN - PN$ 即可求解。

【详解】解：如图，作 $\triangle ABC$ 的外接圆，圆心为 M ，连接 AM 、 BM 、 CM ，过 M 作 $MD \perp AB$ 于 D ，过 B 作 $BN \perp AB$ ，交 BP 的垂直平分线于 N ，连接 AN 、 BN 、 PN ，以 N 为圆心， $BN(PN)$ 为半径作圆；

$\because \angle C = 60^\circ$ ， M 为 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心，

$\therefore \angle AMB = 120^\circ$ ， $AM = BM$ ，

$\therefore \angle MAB = \angle MBA = 30^\circ$ ，

$\therefore MD = \frac{1}{2}AM$ ，

$\because MD \perp AB$ ，

$\therefore AD = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{3}$ ，

在 $Rt\triangle ADM$ 中，

$\therefore AM^2 = MD^2 + AD^2$ ，

$\therefore AM^2 = \left(\frac{1}{2}AM\right)^2 + (2\sqrt{3})^2$ ，

$\therefore AM = 4$ ，

即 $AM = BM = CM = 4$ ，

由作图可知 $BN \perp AB$ ， N 在 BP 的垂直平分线上，

$\therefore \angle PBN = \angle BPN = 90^\circ - \angle ABC$ ，

$\therefore \angle PNB = 180^\circ - (\angle PBN + \angle BPN) = 2\angle ABC$ ，

又 $\because M$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心，

$\therefore \angle AMC = 2\angle ABC$ ，

$\therefore \angle AMC = \angle PNB$ ，

$\therefore \frac{CM}{PN} = \frac{AM}{BN}$ ，

$\therefore \triangle AMC \sim \triangle PNB$ ，

$\therefore \frac{CM}{PN} = \frac{AC}{PB}$ ，

$$\therefore BP = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore \frac{CM}{PN} = \frac{AC}{PB} = \frac{2}{1},$$

即 $PN = \frac{1}{2}CM = 2$,

$$\therefore PN = BN = 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABN$ 中,

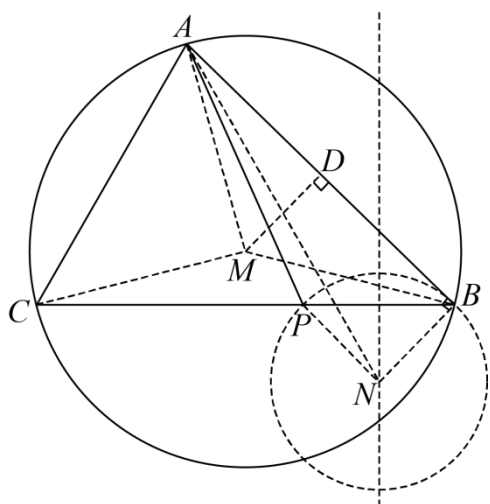
$$AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 2^2} = 2\sqrt{13},$$

在 $\triangle APN$ 中,

$$AP \geq AN - PN = 2\sqrt{13} - 2,$$

即 AP 最小值为 $2\sqrt{13}-2$.

故答案为: $2\sqrt{13}-2$.



【点睛】本题考查了圆周角定理，垂径定理，勾股定理，解直角三

角形, 相似三角形的判定和性质, 垂直平分线的性质, 30° 角所对的直角边等于斜边的一半, 三角形三边之间的关系; 解题的关键是结合 $\triangle ABC$ 的外接圆构造相似三角形.

三、解答题：解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤（共 90 分）

16. (1) 计算: $\sqrt{12} + |-4| - (2003 - \pi)^0 - 2\cos 30^\circ$;

(2) 先化简，再求值： $\left(a+2-\frac{5}{a-2}\right) \div \frac{3-a}{2a-4}$ ，其中 a 为满足 $0 < a < 4$ 的整数.

【答案】 (1) $\sqrt{3}+3$ (2) $-2a-6, -8$

【解析】

【分析】(1) 先将二次根式及绝对值、零次幂、特殊角的三角函数化简, 然后进行加减运算即可;

(2) 根据分式的运算法则化简，然后选择合适的值代入求解即可.

【详解】解：(1) $\sqrt{12} + |-4| - (2003 - \pi)^0 - 2\cos 30^\circ$

$$= 2\sqrt{3} + 4 - 1 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2\sqrt{3} + 3 - \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3} + 3;$$

$$(2) \left(a + 2 - \frac{5}{a-2} \right) \div \frac{3-a}{2a-4}$$

$$= \frac{(a+2)(a-2)-5}{a-2} \times \frac{2(a-2)}{3-a}$$

$$= \frac{a^2-9}{a-2} \times \frac{2(a-2)}{3-a}$$

$$= \frac{2(a+3)(a-3)}{3-a}$$

$$= -2a - 6$$

$\therefore a$ 为满足 $0 < a < 4$ 的整数且 $a-2 \neq 0, 3-a \neq 0$,

$\therefore a \neq 2, a \neq 3$,

$\therefore$ 取 $a = 1$, 原式 $= -2 \times 1 - 6 = -8$.

【点睛】题目主要考查实数的混合运算，特殊角的三角函数及分式的化简求值，熟练掌握运算法则是解题关键.

17. 在深化教育综合改革、提升区域教育整体水平的进程中，某中学以兴趣小组为载体，加强社团建设，艺术活动学生参与面达100%，通过调查统计，八年级二班参加学校社团的情况（每位同学只能参加其中一项）：A. 剪纸社团，B. 泥塑社团，C. 陶笛社团，D. 书法社团，E. 合唱社团，并绘制了如下两幅不完整的统计图.

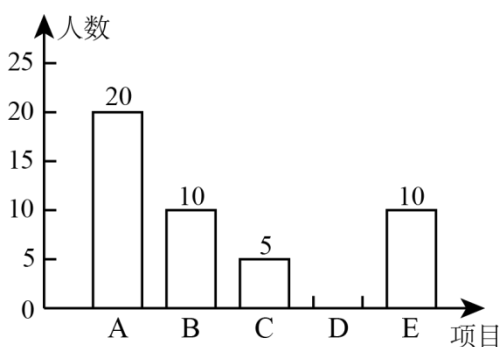


图1

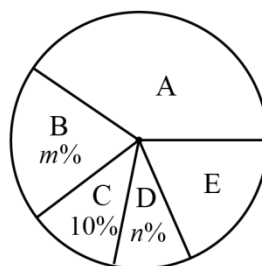


图2

- (1) 该班共有学生_____人，并把条形统计图补充完整；
- (2) 扇形统计图中， $m =$ _____, $n =$ _____, 参加剪纸社团对应的扇形圆心角为_____度；
- (3) 小鹏和小兵参加了书法社团，由于参加书法社团几位同学都非常优秀，老师将从书法社团的学生中选取 2 人参加学校组织的书法大赛，请用“列表法”或“画树状图法”，求出恰好是小鹏和小兵参加比赛的概率.

【答案】(1) 50，详见图示；

(2) 20，10，144；

(3) $\frac{1}{10}$ ；

【解析】

【分析】(1) 利用 C 类人数除以所占百分比可得调查的学生人数；用总人数减去其它四项的人数可得到 D 的人数，然后补图即可；

(2) 根据总数与各项人数比值可求出 m, n 的值，A 项目的人数与总人数比值乘 360° 即可得出圆心角的度数；

(3) 画树状图展示所有 20 种等可能的结果数，再找出恰好选中小鹏和小兵的结果数，然后利用概率公式求解.

【小问 1 详解】

本次调查的学生总数： $5 \div 10\% = 50$ (人)，

D、书法社团的人数为： $50 - 20 - 10 - 5 - 10 = 5$ (人)，如图所示

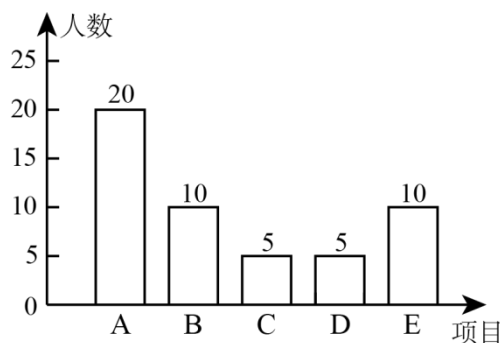


图1

故答案为：50；

【小问 2 详解】

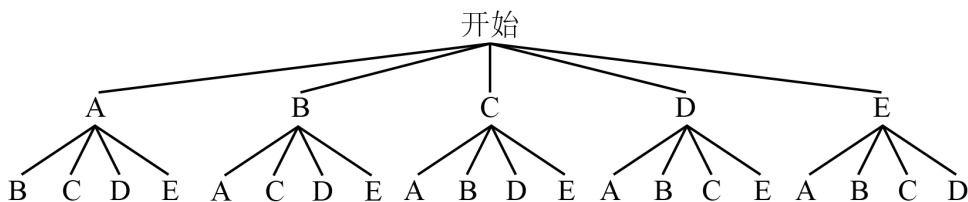
由图知， $10 \div 50 = 20\%$ ， $5 \div 50 = 10\%$ ， $20 \div 50 \times 360^\circ = 144^\circ$ ，

$\therefore m = 20, n = 10$ ，参加剪纸的圆心角度数为 144°

故答案为：20，10，144

【小问3详解】

用 A, B, C, D, E 表示社团的五个人，其中 A, B 分别代表小鹏和小兵树状图如下：

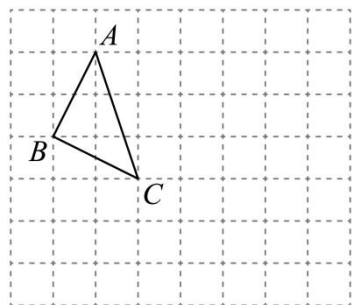


共 20 种等可能情况，有 $(A, B), (B, A)$ 2 种情况恰好是小鹏和小兵参加比赛，

故恰好选中小鹏和小兵的概率为 $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$ 。

【点睛】 本题考查条形统计图和扇形统计图的综合运用，列表法与画树状图法求概率，解题的关键是掌握列表法与画树状图法求概率的方法：先利用列表法或树状图法展示所有等可能的结果 n ，再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m ，然后利用概率公式求事件 A 或 B 的概率。

18. 如图，网格中每个小正方形的边长均为 1， $\triangle ABC$ 的顶点均在小正方形的格点上。



(1) 将 $\triangle ABC$ 向下平移 3 个单位长度得到 $\triangle A_1B_1C_1$ ，画出 $\triangle A_1B_1C_1$ ；

(2) 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A_2B_2C_2$ ，画出 $\triangle A_2B_2C_2$ ；

(3) 在 (2) 的运动过程中请计算出 $\triangle ABC$ 扫过的面积。

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

(3) $\frac{5+5\pi}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 先作出点 A, B, C 平移后的对应点 A_1, B_1, C_1 ，然后顺次连接即可；

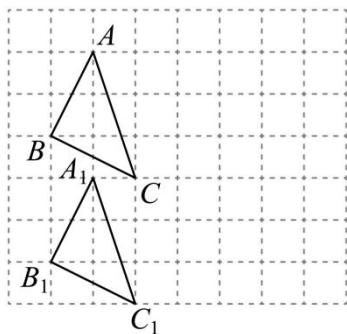
(2) 先作出点 A, B 绕点 C 顺时针旋转 90° 的对应点 A_2, B_2 ，然后顺次连接即可；

(3) 证明 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，求出 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{5}{2}$ ， $S_{\text{扇形}CAA_2} = \frac{90^\circ \times (\sqrt{10})^2}{360} = \frac{5\pi}{2}$ ，根

据旋转过程中 $\triangle ABC$ 扫过的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积加扇形 CAA_1 的面积即可得出答案.

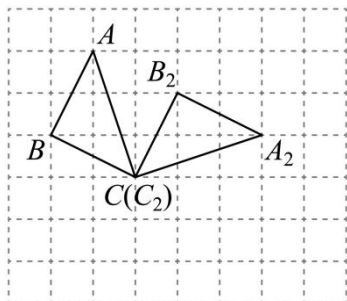
【小问 1 详解】

解：作出点 A 、 B 、 C 平移后的对应点 A_1 、 B_1 、 C_1 ，顺次连接，则 $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求，如图所示：



【小问 2 详解】

解：作出点 A 、 B 绕点 C 顺时针旋转 90° 的对应点 A_2 、 B_2 ，顺次连接，则 $\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求，如图所示：



【小问 3 详解】

解： $\because AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ， $AC = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ ， $BC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ，

$$\therefore AB = BC,$$

$$\therefore (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 = 10 = (\sqrt{10})^2,$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2,$$

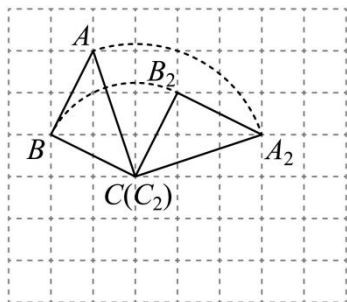
$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{5}{2},$$

根据旋转可知， $\angle ACA_2 = 90^\circ$ ，

$$\therefore S_{\text{扇形}CAA_2} = \frac{90 \times (\sqrt{10})^2}{360} = \frac{5\pi}{2},$$

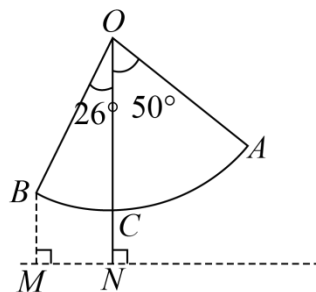
$$\therefore \text{在旋转过程中 } \triangle ABC \text{ 扫过的面积为 } S = S_{\triangle ABC} + S_{\text{扇形}CAA_2} = \frac{5 + 5\pi}{2}.$$



【点睛】本题主要考查了平移、旋转作图，勾股定理逆定理，扇形面积计算，

解题的关键是作出平移或旋转后的对应点.

19. 莲花湖湿地公园是当地人民喜爱的休闲景区之一，里面的秋千深受孩子们喜爱. 如图所示，秋千链子的长度为3m，当摆角 $\angle BOC$ 恰为 26° 时，座板离地面的高度 BM 为0.9m，当摆动至最高位置时，摆角 $\angle AOC$ 为 50° ，求座板距地面的最大高度为多少m？（结果精确到0.1m；参考数据： $\sin 26^\circ \approx 0.44$ ， $\cos 26^\circ \approx 0.9$ ， $\tan 26^\circ \approx 0.49$ ， $\sin 50^\circ \approx 0.77$ ， $\cos 50^\circ \approx 0.64$ ， $\tan 50^\circ \approx 1.2$ ）

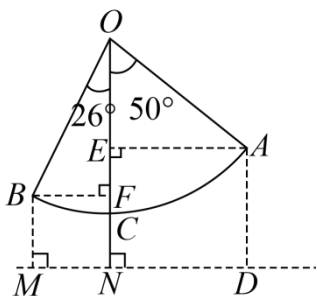


【答案】座板距地面的最大高度为1.7m.

【解析】

【分析】过点 A 作 $AD \perp MN$ 于点 D ，过点 A 作 $AE \perp ON$ 于点 E ，过点 B 作 $BF \perp ON$ 于点 F ，利用 26° 和 50° 的余弦值求出 $OF = OB \cdot \cos 26^\circ = 3 \times 0.9 = 2.7\text{m}$ ， $OE = OA \cdot \cos 50^\circ = 3 \times 0.64 = 1.92\text{m}$ ，然后利用线段的和差和矩形的性质求解即可.

【详解】如图所示，过点 A 作 $AD \perp MN$ 于点 D ，过点 A 作 $AE \perp ON$ 于点 E ，过点 B 作 $BF \perp ON$ 于点 F ，



由题意可得，四边形 $BMNF$ 和四边形 $ENDA$ 是矩形，

$$\therefore FN = BM = 0.9\text{m}, \quad EN = AD,$$

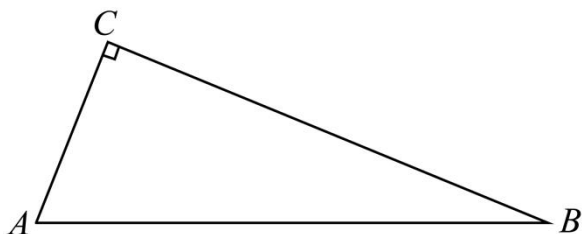
$\therefore$ 秋千链子的长度为3m，

$$\therefore OB = OA = 3\text{m},$$

$\because \angle BOC = 26^\circ, BF \perp ON,$
 $\therefore OF = OB \cdot \cos 26^\circ = 3 \times 0.9 = 2.7\text{m},$
 $\therefore ON = OF + FN = 2.7 + 0.9 = 3.6\text{m},$
 $\because \angle AOC = 50^\circ, AE \perp ON,$
 $\therefore OE = OA \cdot \cos 50^\circ = 3 \times 0.64 = 1.92\text{m},$
 $\therefore EN = ON - OE = 3.6 - 1.92 = 1.68\text{m},$
 $\therefore AD = EN = 1.68\text{m} \approx 1.7\text{m}.$
 $\therefore$ 座板距地面的最大高度为1.7m.

【点睛】本题考查解直角三角形的应用，解题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答问题.

20. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ, AB = 5, BC = \sqrt{21}.$



- (1) 尺规作图：作 $\angle BAC$ 的角平分线交 BC 于点 P （不写做法，保留作图痕迹）；
 (2) 在 (1) 所作图形中，求 $\triangle ABP$ 的面积.

【答案】(1) 见解析 (2) $S_{\triangle APB} = \frac{5\sqrt{21}}{7}$

【解析】

【分析】(1) 以 A 为圆心，任意长为半径画弧，分别交 AC 、 AB ，在以两交点为圆心，以大于它们 $\frac{1}{2}$ 长度为半径画弧，交于一点，过 A 于该点做射线交 BC 于点 P ，则 AP 即为所求；

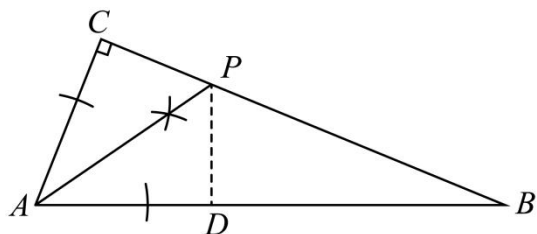
(2) 过点 P 作 $PD \perp AB$ ，根据 $S_{\triangle ACB} = S_{\triangle ACP} + S_{\triangle APB}$ 和题中条件可求出 $\triangle ABC$ 的面积，再结合角平分线的性质即可求解.

【小问1 详解】

解：以 A 为圆心，任意长为半径画弧，分别交 AC 、 AB ，在以两交点为圆心，以大于它们 $\frac{1}{2}$ 长度为半径画弧，交于一点，过 A 于该点做射线交 BC 于点 P ，则 AP 即为所求.

【小问2 详解】

解：过点 P 作 $PD \perp AB$ ，如图所示，



由 (1) 得: $PC = PD$,

$$\because \angle ACB = 90^\circ, AB = 5, BC = \sqrt{21},$$

$$\therefore AC = \sqrt{5^2 - (\sqrt{21})^2} = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle ACB} = S_{\triangle ACP} + S_{\triangle APB},$$

$$\therefore S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2} \times AC \times BC = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{21} = \sqrt{21},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times AC \times PC + \frac{1}{2} \times AB \times PD = \sqrt{21}, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times 2 \times PC + \frac{1}{2} \times 5 \times PD = \sqrt{21},$$

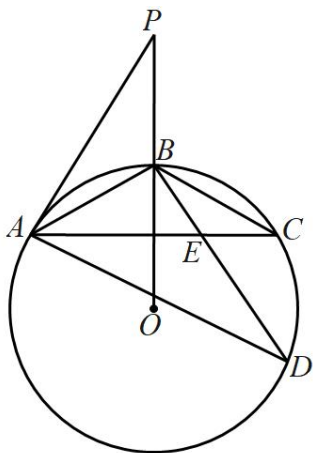
$$\therefore PC = PD,$$

$$\therefore PD = \frac{2\sqrt{21}}{7},$$

$$\therefore S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} \times AB \times PD = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{2\sqrt{21}}{7} = \frac{5\sqrt{21}}{7};$$

【点睛】 本题主要考查作图—基本作图，解题关键是掌握角平分线的尺规作图及角平分线的性质.

21. 如图, $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABD$ 内接于 $\odot O$, $AB = BC$, P 是 OB 延长线上的一点, $\angle PAB = \angle ACB$, AC 、 BD 相交于点 E .



(1) 求证: AP 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $BE = 2$, $DE = 4$, $\angle P = 30^\circ$, 求 AP 的长.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 6

【解析】

【分析】(1) 由 $AB = BC$ ， OB 为半径，可知 $OB \perp AC$ ， $\angle CAB = \angle ACB$ ，则 $\angle CAB + \angle ABO = 90^\circ$ ， $\angle ACB + \angle ABO = 90^\circ$ ， $\angle PAB + \angle ABO = 90^\circ$ ，如图 1，连接 OA ，由 $OA = OB$ ，可得 $\angle OAB = \angle ABO$ ，则 $\angle PAB + \angle OAB = 90^\circ$ ，即 $\angle OAP = 90^\circ$ ，进而结论得证；

(2) 如图 2，记 OB 与 AC 交点为 M ，连接 OD ，过 O 作 $ON \perp DB$ 于 N ，证明 $\triangle ABO$ 是等边三角形，

则 $AB = OB = OA$ ， $\angle ABM = 60^\circ$ ，设 $\odot O$ 半径为 r ，则 $BM = AB \cdot \cos \angle ABM = \frac{1}{2}r$ ，由 $OB = OD$ ，

$ON \perp DB$ ，可得 $BN = \frac{1}{2}BD = 3$ ，证明 $\triangle BME \sim \triangle BNO$ ，则 $\frac{BM}{BN} = \frac{BE}{BO}$ ，即 $\frac{\frac{1}{2}r}{3} = \frac{2}{r}$ ，解得 $r = 2\sqrt{3}$ 或

$r = -2\sqrt{3}$ (舍去)，根据 $AP = \frac{OA}{\tan \angle P}$ ，计算求解即可.

【小问 1 详解】

解：如图，连接 OA, OC ，

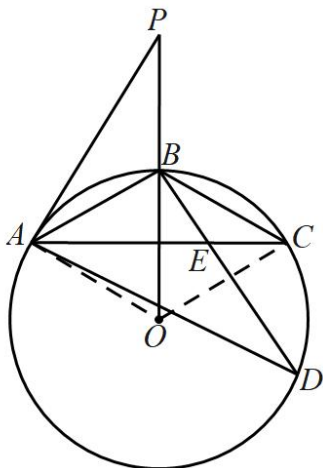


图1

$$\because AB = BC,$$

$$\therefore \overset{\diamond}{AB} = \overset{\diamond}{BC},$$

$$\therefore \angle AOB = \angle COB,$$

$$\therefore OB \perp AC, \text{ 由等边对等角可得 } \angle CAB = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle CAB + \angle ABO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB + \angle ABO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PAB = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle PAB + \angle ABO = 90^\circ,$$

$$\therefore OA = OB,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle ABO,$$

$$\therefore AP = \frac{OA}{\tan \angle P} = \frac{r}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 6,$$

$\therefore AP$ 的长为 6.

【点睛】本题考查了垂径定理，等腰三角形的判定与性质，切线的判定，等边三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，余弦、正切等知识. 解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用.

22. 某县著名传统土特产品“豆笋”、“豆干”以“浓郁豆香，绿色健康”享誉全国，深受广大消费者喜爱. 已知 2 件豆笋和 3 件豆干进货价为 240 元，3 件豆笋和 4 件豆干进货价为 340 元.

(1) 分别求出每件豆笋、豆干的进价；

(2) 某特产店计划用不超过 10440 元购进豆笋、豆干共 200 件，且豆笋的数量不低于豆干数量的 $\frac{3}{2}$ ，该特产店有哪几种进货方案？

(3) 若该特产店每件豆笋售价为 80 元，每件豆干售价为 55 元，在 (2) 的条件下，怎样进货可使该特产店获得利润最大，最大利润为多少元？

【答案】(1) 豆笋、豆干的进价分别是 60 元/件，40 元/件

(2) 有 3 种进货方案：豆干购进 78 件，则豆笋购进 122 件；豆干购进 79 件，则豆笋购进 121 件；豆干购进 80 件，则豆笋购进 120 件

(3) 购进豆干 78 件，则豆笋购进 122 件，获得最大利润为 3610 元

【解析】

【分析】(1) 设豆笋、豆干的进价分别是 a 元/件、 b 元/件，根据等量关系列出方程组，解方程组即可；

(2) 设豆干购进 n 件，则豆笋购进 $(200-n)$ 件，根据不等关系列出不等式组，解不等式组，再根据 n 取整数，即可求得进货方案；

(3) 设总利润为 W 元，豆干购进 n 件，求得 W 关于 x 的函数关系式为 $W = -5n + 4000$ ，根据一次函数的性质即可求得总利润最大的进货方案.

【小问 1 详解】

解：设豆笋、豆干的进价分别是 a 元/件、 b 元/件，

$$\text{则} \begin{cases} 2a + 3b = 240 \\ 3a + 4b = 340 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = 60 \\ b = 40 \end{cases},$$

故豆笋、豆干的进价分别是 60 元/件，40 元/件.

【小问 2 详解】

设豆干购进 n 件，则豆笋购进 $(200-n)$ 件，

$$\begin{cases} 40n + 60(200 - n) \leq 10440 \\ 200 - n \geq \frac{3}{2}n \end{cases},$$

解得 $78 \leq n \leq 80$,

$\therefore n = 78$ 时, $200 - n = 122$, 即豆干购进 78 件, 则豆笋购进 122 件,

$n = 79$ 时, $200 - n = 121$, 即豆干购进 79 件, 则豆笋购进 121 件,

$n = 80$ 时, $200 - n = 120$, 即豆干购进 80 件, 则豆笋购进 120 件.

【小问 3 详解】

设总利润为 W 元, 豆干购进 n 件,

$$\text{则 } W = (55 - 40)n + (80 - 60)(200 - n)$$

$$= -5n + 4000 \quad (78 \leq n \leq 80 \text{ 且 } n \text{ 为整数}),$$

$$\because -5 < 0,$$

当 $78 \leq n \leq 80$ 时, W 随 n 的增大而减小,

$$\therefore \text{当 } n = 78 \text{ 时, } W \text{ 取最大值, 为 } W = -5 \times 78 + 4000 = 3610.$$

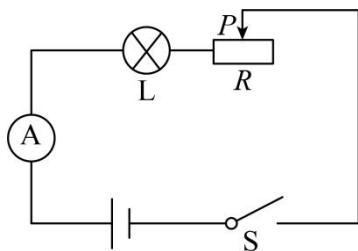
此时, 购进豆干购进 78 件, 则豆笋购进 122 件, 获得最大利润为 3610 元.

【点睛】本题是方程、不等式及函数的综合题, 考查了解二元一次方程组, 解一元一次不等式组, 一次函数的性质等知识, 涉及分类讨论思想, 属于常考题型.

23. 【背景】在一次物理实验中, 小冉同学用一固定电压为 12V 的蓄电池, 通过调节滑动变阻器来改变电流大小, 完成控制灯泡 L (灯丝的阻值 $R_L = 2\Omega$) 亮度的实验 (如图), 已知串联电路中, 电流与电阻 R 、 R_L

之间关系为 $I = \frac{U}{R + R_L}$, 通过实验得出如下数据:

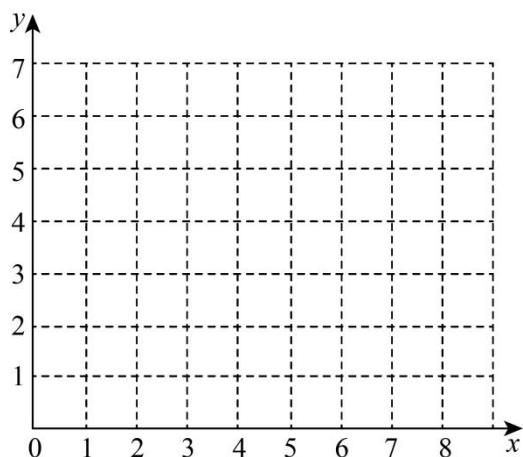
R / Ω	...	1	a	3	4	6	...
I / A	...	4	3	2.4	2	b	...



(1) $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 【探究】根据以上实验，构建出函数 $y = \frac{12}{x+2} (x \geq 0)$ ，结合表格信息，探究函数 $y = \frac{12}{x+2} (x \geq 0)$ 的图象与性质.

①在平面直角坐标系中画出对应函数 $y = \frac{12}{x+2} (x \geq 0)$ 的图象；



②随着自变量 x 的不断增大，函数值 y 的变化趋势是_____.

(3) 【拓展】结合 (2) 中函数图象分析，当 $x \geq 0$ 时， $\frac{12}{x+2} \geq -\frac{3}{2}x + 6$ 的解集为_____.

【答案】(1) 2, 1.5

(2) ①见解析；②函数值 y 逐渐减小

(3) $x \geq 2$ 或 $x = 0$

【解析】

【分析】(1) 根据解析式求解即可；

(2) ①根据表格数据，描点连线画出函数图象；②根据图象可得出结论；

(3) 求出第一象限的交点坐标，结合图象可得结论.

【小问 1 详解】

解：由题意， $I = \frac{12}{R+2}$ ，

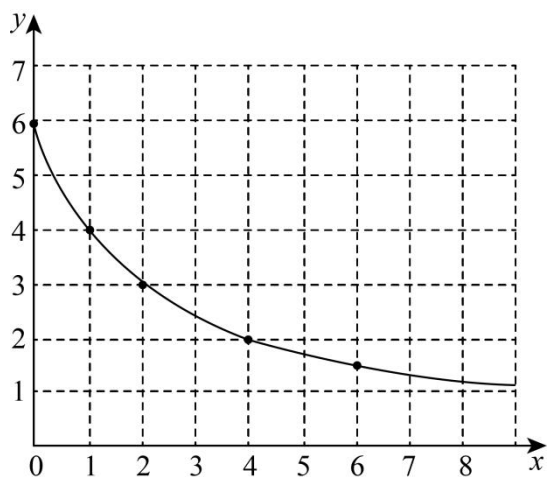
当 $I = 3$ 时，由 $3 = \frac{12}{a+2}$ 得 $a = 2$ ，

当 $R = 6$ 时， $b = \frac{12}{6+2} = 1.5$ ，

故答案为：2, 1.5；

【小问 2 详解】

解：①根据表格数据，描点、连线得到函数 $y = \frac{12}{x+2} (x \geq 0)$ 的图象如图：



②由图象可知，随着自变量 x 的不断增大，函数值 y 逐渐减小，

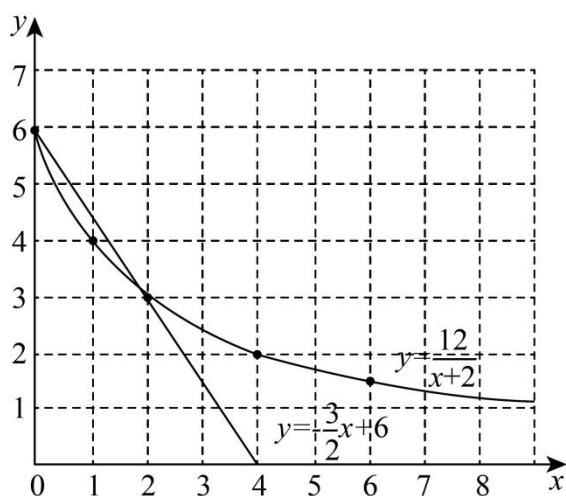
故答案为：函数值 y 逐渐减小；

【小问 3 详解】

解：当 $x=2$ 时， $y=-\frac{3}{2} \times 2 + 6 = 3$ ，当 $x=0$ 时， $y=6$ ，

$\therefore$ 函数 $y = \frac{12}{x+2} (x \geq 0)$ 与函数 $y = -\frac{3}{2}x + 6$ 的图象交点坐标为 $(2, 3)$ ， $(0, 6)$ ，

在同一平面直角坐标系中画出函数 $y = -\frac{3}{2}x + 6$ 的图象，如图，



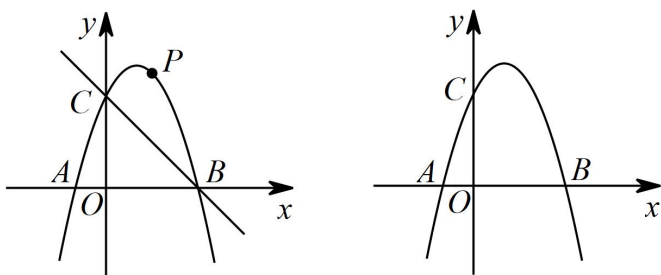
由图知，当 $x \geq 2$ 或 $x=0$ 时， $\frac{12}{x+2} \geq -\frac{3}{2}x + 6$ ，

即当 $x \geq 0$ 时， $\frac{12}{x+2} \geq -\frac{3}{2}x + 6$ 的解集为 $x \geq 2$ 或 $x=0$ ，

故答案为： $x \geq 2$ 或 $x=0$ 。

【点睛】本题考查函数的图象与性质、描点法画函数图象、两个函数图象的交点问题，根据表格画出函数的图象，并利用数形结合思想探究函数性质是解答的关键。

24. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ， $C(0, 3)$ 。



- (1) 求抛物线的解析式；
- (2) 设点 P 是直线 BC 上方抛物线上一点，求出 $\triangle PBC$ 的最大面积及此时点 P 的坐标；
- (3) 若点 M 是抛物线对称轴上一动点，点 N 为坐标平面内一点，是否存在以 BC 为边，点 B 、 C 、 M 、 N 为顶点的四边形是菱形，若存在，请直接写出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】(1) $y = -x^2 + 2x + 3$

(2) $\triangle PBC$ 的最大面积为 $\frac{27}{8}$ ， $P\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$

(3) 存在， $N(2, 2)$ 或 $(4, \sqrt{17})$ 或 $(4, -\sqrt{17})$ 或 $(-2, \sqrt{14} + 3)$ ， $(-2, -\sqrt{14} + 3)$ ，见解析

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法代入求解即可；

(2) 利用待定系数法先确定直线 BC 的解析式为 $y = -x + 3$ ，设点 $P(x, -x^2 + 2x + 3)$ ($0 < x < 3$)，过点 P 作 $PD \perp x$ 轴于点 D ，交 BC 于点 E ，得出 $PE = -x^2 + 3x$ ，然后得出三角形面积的函数即可得出结果；

(3) 分两种情况进行分析：若 BC 为菱形的边长，若 BC 为菱形的对角线，分别利用菱形的性质及全等三角形的判定和性质求解即可。

【小问 1 详解】

解：将点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 代入解析式得：

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$ ；

【小问 2 详解】

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$ ，将点 B 、 C 代入得：

$$\begin{cases} 3k + b = 0 \\ b = 3 \end{cases},$$

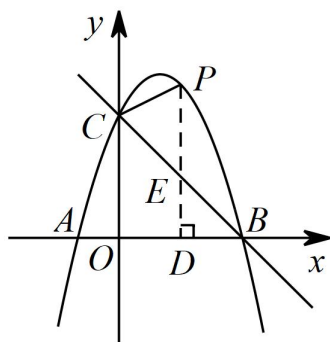
解得： $\begin{cases} k = -1 \\ b = 3 \end{cases},$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = -x + 3$,

$\therefore B(3, 0)$,

$\therefore OB = 3$,

设点 $P(x, -x^2 + 2x + 3)$ ($0 < x < 3$)，过点 P 作 $PD \perp x$ 轴于点 D ，交 BC 于点 E ，如图所示：



$\therefore E(x, -x + 3)$,

$\therefore PE = -x^2 + 2x + 3 - (-x + 3) = -x^2 + 3x$,

$$\therefore S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} \times PE \times OB = \frac{1}{2} \times (-x^2 + 3x) \times 3 = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{8},$$

$\therefore$ 当 $x = \frac{3}{2}$ 时， $\triangle PBC$ 的最大面积为 $\frac{27}{8}$,

$$-x^2 + 2x + 3 = -\frac{9}{4} + 3 + 3 = \frac{15}{4},$$

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$$

【小问 3 详解】

存在， $N(2, 2)$ 或 $(4, \sqrt{17})$ 或 $(4, -\sqrt{17})$ 或 $(-2, \sqrt{14} + 3)$ ， $(-2, -\sqrt{14} + 3)$ ，证明如下：

$\therefore B(3, 0), C(0, 3)$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$,

$\therefore$ 对称轴为: $x = 1$,

设点 $M(1, t)$, $N(x, y)$,

若 BC 为菱形的边长, 菱形 $BCMN$,

则 $BC^2 = CM^2$, 即 $18 = 1^2 + (t-3)^2$,

解得: $t_1 = \sqrt{17} + 3$, $t_2 = -\sqrt{17} + 3$,

$$\therefore \begin{cases} 3+1=0+x \\ 0+t=3+y \end{cases},$$

$\therefore x = 4, y = t - 3$,

$\therefore N_1(4, \sqrt{17}), N_2(4, -\sqrt{17})$;

若 BC 为菱形的边长, 菱形 $BCNM$,

则 $BC^2 = BM^2$, 即 $18 = (3-1)^2 + t^2$,

解得: $t_1 = \sqrt{14}$, $t_2 = -\sqrt{14}$,

$$\therefore \begin{cases} 3+x=0+1 \\ 0+y=3+t \end{cases},$$

$\therefore x = -2, y = 3 + t$,

$\therefore N_3(-2, \sqrt{14} + 3), N_4(-2, -\sqrt{14} + 3)$;

若 BC 为菱形的对角线,

$$\begin{cases} 3+0=x+1 \\ 0+3=y+t \end{cases},$$

$\therefore x = 2, y = 3 - t$,

$\therefore BM^2 = CM^2$, 即 $2^2 + t^2 = 1^2 + (3-t)^2$,

解得: $t = 1$,

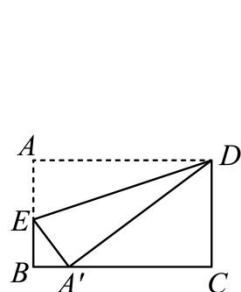
$\therefore y = 3 - 1 = 2$,

$\therefore N_5(2, 2)$;

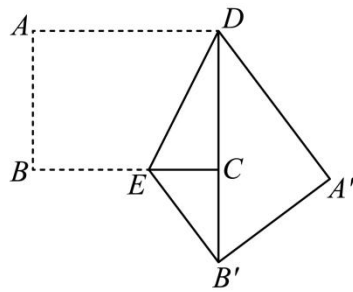
综上所述: $N(2, 2)$ 或 $(4, \sqrt{17})$ 或 $(4, -\sqrt{17})$ 或 $(-2, \sqrt{14} + 3)$, $(-2, -\sqrt{14} + 3)$.

【点睛】题目主要考查二次函数的综合应用，包括待定系数法确定函数解析式，三角形面积问题及特殊四边形问题，全等三角形的判定和性质等，理解题意，综合运用这些知识点是解题关键。

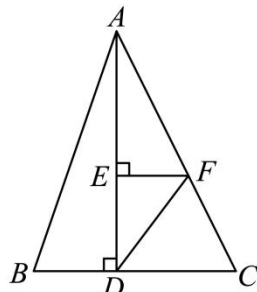
25. (1) 如图①，在矩形 $ABCD$ 的 AB 边上取一点 E ，将 ADE 沿 DE 翻折，使点 A 落在 BC 上 A' 处，若 $AB = 6, BC = 10$ ，求 $\frac{AE}{EB}$ 的值；



图①



图②



图③

(2) 如图②，在矩形 $ABCD$ 的 BC 边上取一点 E ，将四边形 $ABED$ 沿 DE 翻折，使点 B 落在 DC 的延长线上 B' 处，若 $BC \cdot CE = 24, AB = 6$ ，求 BE 的值；

(3) 如图③，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 45^\circ, AD \perp BC$ ，垂足为点 $D, AD = 10, AE = 6$ ，过点 E 作 $EF \perp AD$ 交 AC 于点 F ，连接 DF ，且满足 $\angle DFE = 2\angle DAC$ ，直接写出 $BD + \frac{5}{3}EF$ 的值。

【答案】(1) $\frac{5}{4}$ ；(2) 5；(3) $\frac{25}{3}$

【解析】

【分析】(1) 由矩形性质和翻折性质、结合勾股定理求得 $A'B = 2$ ，设 $AE = A'E = x$ 则 $BE = AB - AE = 6 - x$ ，在 $Rt\triangle A'BE$ 中利用勾股定理求得 $x = \frac{10}{3}$ ，则 $AE = \frac{10}{3}$ ， $BE = 6 - \frac{10}{3} = \frac{8}{3}$ ，进而求解即可；

(2) 由矩形的性质和翻折性质得到 $\angle EB'C = \angle B'DA'$ ，证明 $\triangle EB'C \sim \triangle B'DA'$ ，利用相似三角形的性质求得 $B'C = 4$ ，则 $B'D = 10$ ，在 $Rt\triangle A'B'D$ 中，利用勾股定理求得 $A'D = 8$ ，进而求得 $BC = 8$ ， $CE = 3$ 可求解；

(3) 证明 $\triangle AEF \sim \triangle ADC$ 得到 $CD = \frac{5}{3}EF$ ，则 $BD + \frac{5}{3}EF = BD + CD = BC$ ；设 $EF = 3k$ ， $CD = 5k$ ，过点 D 作 $DH \perp AC$ 于 H ，证明 $\triangle CHD \cong \triangle FHD$ (ASA) 得到 $DF = CD = 5k$ ，在 $Rt\triangle EFD$ 中，由勾股定理理解得 $k = 1$ ，进而可求得 $AC = 5\sqrt{5}$ ，在图③中，过 B 作 $BG \perp AC$ 于 G ，证明 $\angle CBG = \angle CDH = \angle DAC$ ，则 $\sin \angle CBG = \sin \angle DAC = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $\cos \angle CBG = \cos \angle DAC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，再证明 $AG = BG$ ，在 $Rt\triangle BCG$ 中利用锐角三角函数和 $AG + CG = BG + CG = AC$ 求得 BC 即可求解。

【详解】解：(1) 如图①， $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AD = BC = 10, \quad CD = AB = 6, \quad \angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ,$$

由翻折性质得 $A'D = AD = 10$, $AE = A'E$,

$$\text{在 Rt}\triangle A'CD \text{ 中, } A'C = \sqrt{A'D^2 - CD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

$$\therefore A'B = BC - A'C = 2,$$

设 $AE = A'E = x$, 则 $BE = AB - AE = 6 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle A'BE$ 中, 由勾股定理得 $BE^2 + A'B^2 = A'E^2$,

$$\therefore (6-x)^2 + 2^2 = x^2, \text{ 解得 } x = \frac{10}{3},$$

$$\therefore AE = \frac{10}{3}, \quad BE = 6 - \frac{10}{3} = \frac{8}{3},$$

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{5}{4};$$

(2) 如图②, $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore CD = AB = 6, \quad AD = BC, \quad \angle A = \angle B = \angle BCD = 90^\circ,$$

由翻折性质得, $A'B' = AB = 6$, $A'D = AD$, $\angle DA'B' = \angle A'B'E = \angle BCD = \angle 90^\circ$,

$$\therefore \angle EB'C + \angle A'B'D = 90^\circ = \angle A'B'D + \angle B'DA'$$

$$\therefore \angle EB'C = \angle B'DA',$$

$$\therefore \triangle EB'C \sim \triangle B'DA',$$

$$\therefore \frac{CE}{A'B'} = \frac{B'C}{A'D}, \text{ 即 } \frac{CE}{6} = \frac{B'C}{BC}, \text{ 又 } BC \cdot CE = 24,$$

$$\therefore B'C = \frac{BC \cdot CE}{6} = \frac{24}{6} = 4,$$

$$\therefore B'D = B'C + CD = 10,$$

$$\text{在 Rt}\triangle A'B'D \text{ 中, } A'D = \sqrt{B'D^2 - A'B'^2} = 8,$$

$$\therefore BC = AD = A'D = 8, \text{ 则 } CE = 3,$$

$$\therefore BE = BC - CE = 8 - 3 = 5;$$

(3) $\because AD \perp BC$, $EF \perp AD$,

$$\therefore EF \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ADC,$$

$$\therefore AD = 10, AE = 6,$$

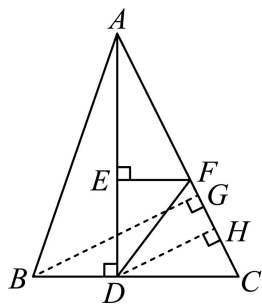
$$\therefore \frac{EF}{CD} = \frac{AE}{AD} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore CD = \frac{5}{3}EF, \text{ 则 } BD + \frac{5}{3}EF = BD + CD = BC;$$

设 $EF = 3k$, $CD = 5k$,

过点 D 作 $DH \perp AC$ 于 H , 如图③, 则 $\angle CHD = \angle ADC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CDH = \angle DAC = 90^\circ - \angle C;$$



图③

$$\therefore EF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle DFE = 2\angle DAC = 2\angle CDH,$$

$$\therefore \angle CDH = \angle FDH,$$

$$\text{又} \because DH = DH, \angle CHD = \angle FHD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CHD \cong \triangle FHD (\text{ASA}),$$

$$\therefore DF = CD = 5k,$$

在 $\text{Rt}\triangle EFD$ 中, 由勾股定理得 $EF^2 + DE^2 = DF^2$,

$$\therefore (3k)^2 + 4^2 = (5k)^2, \text{ 解得 } k = 1,$$

$$\therefore EF = 3, \quad DF = CD = 5,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ADC \text{ 中, } AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5},$$

在图③中, 过 B 作 $BG \perp AC$ 于 G , 则 $\angle BGA = \angle BGC = \angle CHD = 90^\circ$,

$$\therefore BG \parallel DH,$$

$$\therefore \angle CBG = \angle CDH = \angle DAC,$$

$$\therefore \sin \angle CBG = \sin \angle DAC = \frac{CD}{AC} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \cos \angle CBG = \cos \angle DAC = \frac{AD}{AC} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \angle BAC = 45^\circ, \quad \angle AGB = 90^\circ,$$

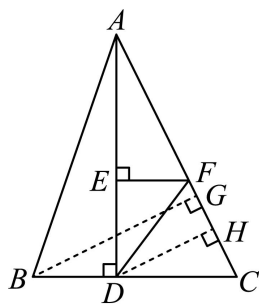
$$\therefore \angle ABG = 90^\circ - \angle BAC = 45^\circ = \angle BAC, \text{ 则 } AG = BG,$$

在 $\text{Rt}\triangle BCG$ 中， $BG = BC \cdot \cos \angle CBG = \frac{2\sqrt{5}}{5}BC$ ， $CG = BC \cdot \sin \angle CBG = \frac{\sqrt{5}}{5}BC$ ，

$$\therefore AG + CG = BG + CG = AC,$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{5}}{5}BC + \frac{\sqrt{5}}{5}BC = 5\sqrt{5}, \text{ 则 } BC = \frac{25}{3},$$

$$\therefore BD + \frac{5}{3}EF = BC = \frac{25}{3}.$$



图③

【点睛】 本题考查矩形的性质、翻折性质、勾股定理、相似三角形的判定与性质、

等腰三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、锐角三角函数等知识，综合性强，较难，属于中考压轴题，熟练掌握相关知识的联系与运用，添加辅助线求解是解答的关键.

