

## 眉山市 2023 年初中学业水平暨高中阶段学校招生考试数学试卷

## 第 I 卷 (选择题 共 48 分)

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 4 分，共 48 分，在每个小题给出的四个选项中，只有一项是正确的，请把答题卡上相应题目的正确选项涂黑.

1.  $-\frac{1}{2}$  的倒数是 ( )

- A.  $-\frac{1}{2}$                       B.  $-2$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $2$

【答案】B

【解析】

【分析】根据倒数的概念，乘积为 1 的两个数互为倒数，由此即可求解.

【详解】解：  $-\frac{1}{2}$  的倒数是  $-2$ ,

故选：B.

【点睛】本题主要考查求一个数的倒数，掌握倒数的概念是解题的关键.

2. 生物学家发现了某种花粉的直径约为 0.0000021 毫米，数据 0.0000021 用科学记数法表示正确的是 ( )

- A.  $2.1 \times 10^{-6}$                       B.  $21 \times 10^{-6}$                       C.  $2.1 \times 10^{-5}$                       D.  $21 \times 10^{-5}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据用科学记数法可以把一个绝对值小于 1 的非零数表示成  $a \times 10^n$ ，其中  $1 \leq a < 10$ ， $n$  是一个负整数， $n$  的绝对值等于原数中的第一个非零数字前面所有零的个数（包括小数点前面的那个零），即可解答.

【详解】解：  $0.0000021 = 2.1 \times 10^{-6}$ ,

故选：A.

【点睛】本题考查了用科学记数法表示绝对值小于 1 的数，熟知概念是解题的关键.

3. 下列运算中，正确的是 ( )

- A.  $3a^3 - a^2 = 2a$                       B.  $(a+b)^2 = a^2 + b^2$                       C.  $a^3b^2 \div a^2 = a$                       D.  $(a^2b)^2 = a^4b^2$

【答案】D

【解析】

【分析】根据合并同类项可判断 A，根据完全平方公式可判断 B，根据单项式除以单项式可判断 C，根据积的乘方与幂的乘方运算可判断 D，从而可得答案.

【详解】解：  $3a^3$ ，  $a^2$  不是同类项，不能合并，故 A 不符合题意；

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，故 B 不符合题意；

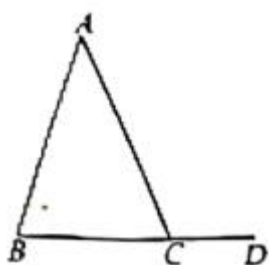
$a^3b^2 \div a^2 = ab^2$ ，故 C 不符合题意；

$(a^2b)^2 = a^4b^2$ ，故 D 符合题意；

故选 D

【点睛】 本题考查的是合并同类项，完全平方公式的应用，单项式除以单项式，积的乘方与幂的乘方运算的含义，熟记基础运算法则是解本题的关键.

4. 如图，  $\triangle ABC$  中，  $AB = AC$ ，  $\angle A = 40^\circ$ ， 则  $\angle ACD$  的度数为 ( )



- A.  $70^\circ$                       B.  $100^\circ$                       C.  $110^\circ$                       D.  $140^\circ$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据等腰三角形的等边对等角和三角形的内角和定理，即可解答.

【详解】 解：  $\because AB = AC, \angle A = 40^\circ$ ，

$$\therefore \angle B = \angle ACD = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle A + \angle B = 110^\circ,$$

故选： C.

【点睛】 本题考查了等腰三角形的等边对等角性质，三角形内角和定理，熟知上述概念是解题的关键.

5. 已知一组数据为 2, 3, 4, 5, 6， 则该组数据的方差为 ( )

- A. 2                      B. 4                      C. 6                      D. 10

【答案】 A

【解析】

【分析】 先计算这组平均数的平均数，再根据方差公式计算即可.

【详解】 解：  $\because \bar{x} = \frac{1}{5} \times (2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{1}{5} \times 20 = 4$ ，

$$\therefore s^2 = \frac{1}{5} \times [(2-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (6-4)^2] = \frac{1}{5} \times (4+1+0+1+4) = 2.$$

故选 A.

【点睛】 本题主要考查了方差公式，熟记方差公式是解题的关键.

6. 关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 2x + m - 2 = 0$  有两个不相等的实数根，则  $m$  的取值范围是 ( )

A.  $m < \frac{3}{2}$

B.  $m > 3$

C.  $m \leq 3$

D.  $m < 3$

【答案】 D

【解析】

【分析】 利用一元二次方程根的判别式求解即可.

【详解】 解：  $\because$  关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 2x + m - 2 = 0$  有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4(m-2) > 0,$$

$$\therefore m < 3,$$

故选 D.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式，对于一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，若

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ，则方程有两个不相等的实数根，若  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，则方程有两个相等的实数根，若

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ，则方程没有实数根.

7. 已知关于  $x, y$  的二元一次方程组  $\begin{cases} 3x - y = 4m + 1 \\ x + y = 2m - 5 \end{cases}$  的解满足  $x - y = 4$ ，则  $m$  的值为 ( )

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】 B

【解析】

【分析】 将方程组的两个方程相减，可得到  $x - y = m + 3$ ，代入  $x - y = 4$ ，即可解答.

【详解】 解：  $\begin{cases} 3x - y = 4m + 1 \text{ ①} \\ x + y = 2m - 5 \text{ ②} \end{cases}$ ,

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } 2x - 2y = 2m + 6,$$

$$\therefore x - y = m + 3,$$

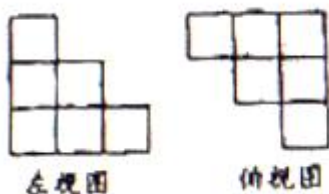
代入  $x - y = 4$ ，可得  $m + 3 = 4$ ，

解得  $m = 1$ ，

故选：B.

【点睛】本题考查了根据解的情况求参数，熟练利用加减法整理代入是解题的关键.

8. 由相同的小正方体搭成的立体图形的部分视图如图所示，则搭成该立体图形的小正方体的最少个数为 ( )



A. 6

B. 9

C. 10

D. 14

【答案】B

【解析】

【分析】根据俯视图可得底层最少有 6 个，再结合左视图可得第二层最少有 2 个，即可解答.

【详解】解：根据俯视图可得搭成该立体图形的小正方体第三层最少为 6 个，

根据左视图第二层有 2 个，可得搭成该立体图形的小正方体第二层最少为 2 个，

根据左视图第二层有 1 个，可得搭成该立体图形的小正方体第二层最少为 1 个，

故搭成该立体图形的小正方体第二层最少为  $6+2+1=9$  个，

故选：B.

【点睛】本题考查了由三视图判断小立方体的个数，准确地得出每层最少的小正方体个数是解题的关键.

9. 关于  $x$  的不等式组  $\begin{cases} x > m+3 \\ 5x-2 < 4x+1 \end{cases}$  的整数解仅有 4 个，则  $m$  的取值范围是 ( )

A.  $-5 \leq m < -4$

B.  $-5 < m \leq -4$

C.  $-4 \leq m < -3$

D.  $-4 < m \leq -3$

【答案】A

【解析】

【分析】不等式组整理后，表示出不等式组的解集，根据整数解共有 4 个，确定出  $m$  的范围即可.

【详解】解：  $\begin{cases} x > m+3 \text{ ①} \\ 5x-2 < 4x+1 \text{ ②} \end{cases}$ ,

由②得：  $x < 3$ ,

解集为  $m+3 < x < 3$ ,

由不等式组的整数解只有 4 个，得到整数解为 2, 1, 0, -1,

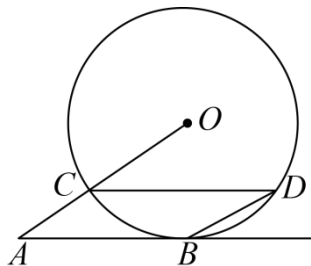
$\therefore -2 \leq m+3 < -1$ ,

$\therefore -5 \leq m < -4$ ;

故选：A.

【点睛】本题主要考查解一元一次不等式组，一元一次不等式组的整数解等知识点的理解和掌握，能根据不等式组的解集得到  $-2 \leq m+3 < -1$  是解此题的关键.

10. 如图,  $AB$  切  $\odot O$  于点  $B$ , 连接  $OA$  交  $\odot O$  于点  $C$ ,  $BD \parallel OA$  交  $\odot O$  于点  $D$ , 连接  $CD$ , 若  $\angle OCD = 25^\circ$ , 则  $\angle A$  的度数为 ( )



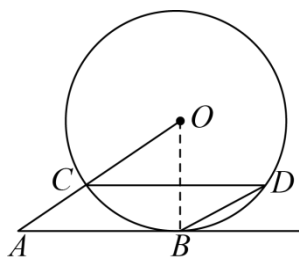
- A.  $25^\circ$                       B.  $35^\circ$                       C.  $40^\circ$                       D.  $45^\circ$

【答案】C

【解析】

【分析】如图, 连接  $OB$ , 证明  $\angle ABO = 90^\circ$ ,  $\angle CDB = 25^\circ$ , 可得  $\angle BOC = 2\angle BDC = 50^\circ$ , 从而可得  $\angle A = 40^\circ$ .

【详解】解: 如图, 连接  $OB$ ,



$\because AB$  切  $\odot O$  于点  $B$ ,

$\therefore \angle ABO = 90^\circ$ ,

$\because BD \parallel OA$ ,  $\angle OCD = 25^\circ$ ,

$\therefore \angle CDB = 25^\circ$ ,

$\therefore \angle BOC = 2\angle BDC = 50^\circ$ ,

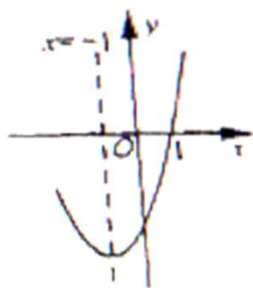
$\therefore \angle A = 40^\circ$ ;

故选 C

【点睛】本题考查的是切线的性质, 圆周角定理的应用, 三角形的内角和定理的应用, 掌握基本图形的性质是解本题的关键.

11. 如图, 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象与  $x$  轴的一个交点坐标为  $(1, 0)$ , 对称轴为直线  $x = -1$ ,

下列四个结论：①  $abc < 0$ ；②  $4a - 2b + c < 0$ ；③  $3a + c = 0$ ；④当  $-3 < x < 1$  时， $ax^2 + bx + c < 0$ ；其中正确结论的个数为（ ）



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次函数开口向上，与  $y$  轴交于  $y$  轴负半轴， $a > 0$ ， $c < 0$ ，根据对称轴为直线  $x = -1$  可得  $b = 2a > 0$ ，由此即可判断①；求出二次函数与  $x$  轴的另一个交点坐标为  $(-3, 0)$ ，进而得到当  $x = -2$  时， $y < 0$ ，由此即可判断②；根据  $x = 1$  时， $y = 0$ ，即可判断③；利用图象法即可判断④.

【详解】解：∵二次函数开口向上，与  $y$  轴交于  $y$  轴负半轴，

$$\therefore a > 0, c < 0,$$

∵二次函数的对称轴为直线  $x = -1$ ,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -1,$$

$$\therefore b = 2a > 0,$$

∴  $abc < 0$ ，故①正确；

∵二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象与  $x$  轴的一个交点坐标为  $(1, 0)$ ,

∴二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象与  $x$  轴的另一个交点坐标为  $(-3, 0)$ ,

∴当  $x = -2$  时， $y < 0$ ,

∴  $4a - 2b + c < 0$ ，故②正确；

∵  $x = 1$  时， $y = 0$ ,

$$\therefore a + b + c = 0,$$

∴  $a + 2a + c = 0$ ，即  $3a + c = 0$ ，故③正确；

由函数图象可知，当  $-3 < x < 1$  时， $ax^2 + bx + c < 0$ ，故④正确；

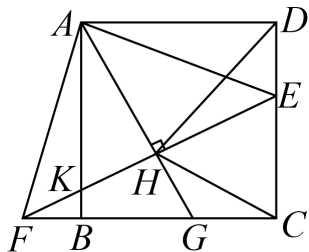
综上所述，其中正确的结论有①②③④共 4 个，

故选 D.

【点睛】本题主要考查了二次函数图象与系数的关系，二次函数与不等式的关系，二次函数的性质等等，熟知二次函数的相关知识是解题的关键.

12. 如图，在正方形  $ABCD$  中，点  $E$  是  $CD$  上一点，延长  $CB$  至点  $F$ ，使  $BF = DE$ ，连结  $AE, AF, EF$ ， $EF$  交  $AB$  于点  $K$ ，过点  $A$  作  $AG \perp EF$ ，垂足为点  $H$ ，交  $CF$  于点  $G$ ，连结  $HD, HC$ 。下列四个结论：

①  $AH = HC$ ；②  $HD = CD$ ；③  $\angle FAB = \angle DHE$ ；④  $AK \cdot HD = \sqrt{2}HE^2$ 。其中正确结论的个数为 ( )



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】根据正方形  $ABCD$  的性质可由 SAS 定理证  $\triangle ABF \cong \triangle ADE$ ，即可判定  $\triangle AEF$  是等腰直角三角形，进而可得  $HE = HF = AH = \frac{1}{2}EF$ ，由直角三角形斜边中线等于斜边一半可得  $HC = \frac{1}{2}EF$ ；由此即可判断①正确；再根据  $\angle ADH + \angle EAD = \angle DHE + \angle AED$ ，可判断③正确，进而证明  $\triangle AFK \sim \triangle HDE$ ，可得  $\frac{AF}{HD} = \frac{AK}{HE}$ ，结合  $AF = \sqrt{2}AH = \sqrt{2}HE$ ，即可得出结论④正确，由  $\angle AED$  随着  $DE$  长度变化而变化，不固定，可判断②  $HD = CD$  不一定成立.

【详解】解：∵ 正方形  $ABCD$ ，

$$\therefore AB = AD, \angle ADC = \angle ABC = \angle BAD = \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore BF = DE,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ADE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle BAF = \angle DAE, AF = AE,$$

$$\therefore \angle FAE = \angle BAF + \angle BAE = \angle DAE + \angle BAE = \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AEF \text{ 是等腰直角三角形, } \angle AEF = \angle AFE = 45^\circ,$$

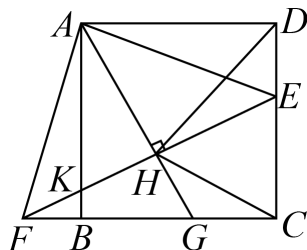
$$\therefore AH \perp EF,$$

$$\therefore HE = HF = AH = \frac{1}{2}EF,$$

$$\therefore \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\therefore CH = HE = \frac{1}{2}EF,$$

$\therefore CH = AH$ ，故①正确；



又 $\because AD = CD, HD = HD$ ,

$$\therefore \triangle AHD \cong \triangle CHD (SSS),$$

$$\therefore \angle ADH = \angle CDH = \frac{1}{2}\angle ADC = 45^\circ,$$

$$\because \angle ADH + \angle EAD = \angle DHE + \angle AED, \text{ 即: } 45^\circ + \angle EAD = \angle DHE + 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle DHE,$$

$$\therefore \angle FAB = \angle DHE = \angle EAD, \text{ 故③正确,}$$

$$\text{又} \because \angle AFE = \angle ADH = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle AFK \sim \triangle HDE,$$

$$\therefore \frac{AF}{HD} = \frac{AK}{HE},$$

$$\text{又} \because AF = \sqrt{2}AH = \sqrt{2}HE,$$

$$\therefore AK \cdot HD = \sqrt{2}HE^2, \text{ 故④正确,}$$

$$\because \text{若 } HD = CD, \text{ 则 } \angle DHC = \angle DCH = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67.5^\circ,$$

$$\text{又} \because CH = HE,$$

$$\therefore \angle HCE = \angle HEC = 67.5^\circ,$$

而点  $E$  是  $CD$  上一动点,  $\angle AED$  随着  $DE$  长度变化而变化, 不固定,

$$\text{而 } \angle HEC = 180^\circ - \angle AED - 45^\circ = 135^\circ - \angle AED,$$

则故  $\angle HEC = 67.5^\circ$  不一定成立, 故②错误;

综上, 正确的有①③④共 3 个,

故选: C.

**【点睛】** 本题考查三角形综合, 涉及了正方形的性质, 全等三角形、相似三角形的判定与性质, 等腰三角形 "三线合一" 的性质, 直角三角形的性质, 熟练掌握正方形的性质、全等三角形的判定与性质、相似三角形的判定和性质、直角三角形斜边中线等于斜边的一半的性质是解题的关键.

## 第Ⅱ卷（非选择题 共 102 分）

二、填空题：本大题共 6 个小题，每小题 4 分，共 24 分，请将正确答案直接写在答题卡相应位置上.

13. 分解因式：  $x^3 - 4x^2 + 4x = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $x(x-2)^2$

【解析】

【分析】 首先提取公因式  $x$ ，然后利用完全平方式进行因式分解即可.

【详解】 解：  $x^3 - 4x^2 + 4x$

$$= x(x^2 - 4x + 4)$$

$$= x(x-2)^2,$$

故答案为  $x(x-2)^2$ .

【点睛】 本题考查了提公因式法，公式法分解因式，提取公因式后利用完全平方公式进行二次分解，注意分解要彻底.

14. 已知方程  $x^2 - 3x - 4 = 0$  的根为  $x_1, x_2$ ，则  $(x_1 + 2) \cdot (x_2 + 2)$  的值为\_\_\_\_\_.

【答案】 6

【解析】

【分析】 解方程，将解得的  $x_1, x_2$  代入  $(x_1 + 2) \cdot (x_2 + 2)$  即可解答.

【详解】 解：  $x^2 - 3x - 4 = 0$ ,

对左边式子因式分解，可得  $(x-4)(x+1) = 0$

解得  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = -1$ ,

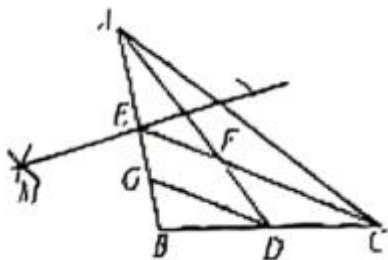
将  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = -1$  代入  $(x_1 + 2) \cdot (x_2 + 2)$ ,

可得原式  $= (4+2) \times (-1+2) = 6$ ,

故答案为：6.

【点睛】 本题考查了因式分解法解一元二次方程，熟练掌握计算方法是解题的关键.

15. 如图,  $\triangle ABC$  中,  $AD$  是中线, 分别以点  $A$ , 点  $B$  为圆心, 大于  $\frac{1}{2}AB$  长为半径作弧, 两弧交于点  $M$ ,  $N$ . 直线  $MN$  交  $AB$  于点  $E$ . 连接  $CE$  交  $AD$  于点  $F$ . 过点  $D$  作  $DG \parallel CE$ , 交  $AB$  于点  $G$ . 若  $DG = 2$ , 则  $CF$  的长为\_\_\_\_\_.



【答案】  $\frac{8}{3}$

【解析】

【分析】由作图方法可知  $MN$  是线段  $AB$  的垂直平分线, 则  $CE$  是  $\triangle ABC$  的中线, 进而得到点  $F$  是  $\triangle ABC$  的重心, 则  $CF = \frac{2}{3}CE$ , 证明  $\triangle BDG \sim \triangle BCE$ , 利用相似三角形的性质得到  $CE = 2DG = 4$ , 则

$$CF = \frac{2}{3}CE = \frac{8}{3}.$$

【详解】解: 由作图方法可知  $MN$  是线段  $AB$  的垂直平分线,

$\therefore$  点  $E$  是  $AB$  的中点,

$\therefore CE$  是  $\triangle ABC$  的中线,

又  $\because AD$  是  $\triangle ABC$  的中线, 且  $AD$  与  $CE$  交于点  $F$ ,

$\therefore$  点  $F$  是  $\triangle ABC$  的重心,

$$\therefore CF = \frac{2}{3}CE,$$

$$\because DG \parallel CE,$$

$$\therefore \triangle BDG \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{CE}{DG} = \frac{BC}{BD} = 2,$$

$$\therefore CE = 2DG = 4,$$

$$\therefore CF = \frac{2}{3}CE = \frac{8}{3},$$

故答案为:  $\frac{8}{3}$ .

【点睛】本题主要考查了三角形重心的性质, 相似三角形的性质与判定, 线段垂直平分线的尺规作图, 推出点  $F$  是  $\triangle ABC$  的重心是解题的关键.

16. 关于  $x$  的方程  $\frac{x+m}{x-2} - 1 = \frac{x-1}{2-x}$  的解为非负数, 则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】  $m \leq -1$  且  $m \neq -3$

【解析】

【分析】 解分式方程，可用  $m$  表示  $x$ ，再根据题意得到关于  $m$  的一元一次不等式即可解答.

【详解】 解：解  $\frac{x+m}{x-2}-1=\frac{x-1}{2-x}$ ，可得  $x=-m-1$ ，

$\because x$  的方程  $\frac{x+m}{x-2}-1=\frac{x-1}{2-x}$  的解为非负数，

$\therefore -m-1 \geq 0$ ，

解得  $m \leq -1$ ，

$\because x-2 \neq 0$ ，

$\therefore -m-1-2 \neq 0$ ，

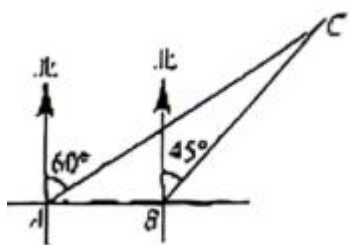
即  $m \neq -3$ ，

$\therefore m$  的取值范围是  $m \leq -1$  且  $m \neq -3$ ，

故答案为：  $m \leq -1$  且  $m \neq -3$  .

【点睛】 本题考查了根据分式方程的解的情况求值，注意分式方程无解的情况是解题的关键.

17. 一渔船在海上  $A$  处测得灯塔  $C$  在它的北偏东  $60^\circ$  方向，渔船向正东方向航行 12 海里到达点  $B$  处，测得灯塔  $C$  在它的北偏东  $45^\circ$  方向，若渔船继续向正东方向航行，则渔船与灯塔  $C$  的最短距离是\_\_\_\_\_海里.

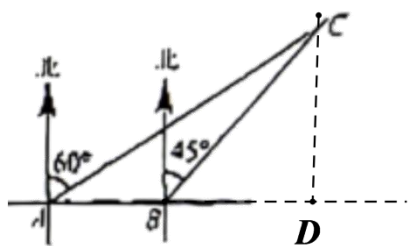


【答案】  $6\sqrt{3}+6$  或  $6+6\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 过点  $C$  作  $CD \perp AB$  交于点  $D$ ，利用特殊角的三角函数值，列方程即可解答.

【详解】 解：如图，过点  $C$  作  $CD \perp AB$  交于点  $D$ ，



由题意可知  $\tan \angle CAD = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\tan \angle CBD = \tan 45^\circ = 1$ ,

设  $CD$  为  $x$ ,

$$\therefore BD = CD \div \tan 45^\circ = x, \quad AD = CD \div \tan 30^\circ = \sqrt{3}x,$$

根据  $AB = AD - BD$ , 可得方程  $\sqrt{3}x - x = 12$ ,

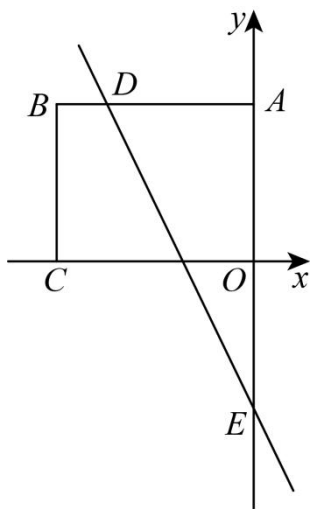
$$\text{解得 } x = 6\sqrt{3} + 6,$$

$\therefore$  渔船与灯塔  $C$  的最短距离是  $(6\sqrt{3} + 6)$  海里,

故答案为:  $6\sqrt{3} + 6$ .

【点睛】本题考查了解直角三角形-方位角问题, 熟知特殊角度的三角函数值是解题的关键.

18. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $B$  的坐标为  $(-8, 6)$ , 过点  $B$  分别作  $x$  轴、 $y$  轴的垂线, 垂足分别为点  $C$ 、点  $A$ , 直线  $y = -2x - 6$  与  $AB$  交于点  $D$ . 与  $y$  轴交于点  $E$ . 动点  $M$  在线段  $BC$  上, 动点  $N$  在直线  $y = -2x - 6$  上, 若  $\triangle AMN$  是以点  $N$  为直角顶点的等腰直角三角形, 则点  $M$  的坐标为\_\_\_\_\_



【答案】  $M(-8, 6)$  或  $M\left(-8, \frac{2}{3}\right)$ .

【解析】

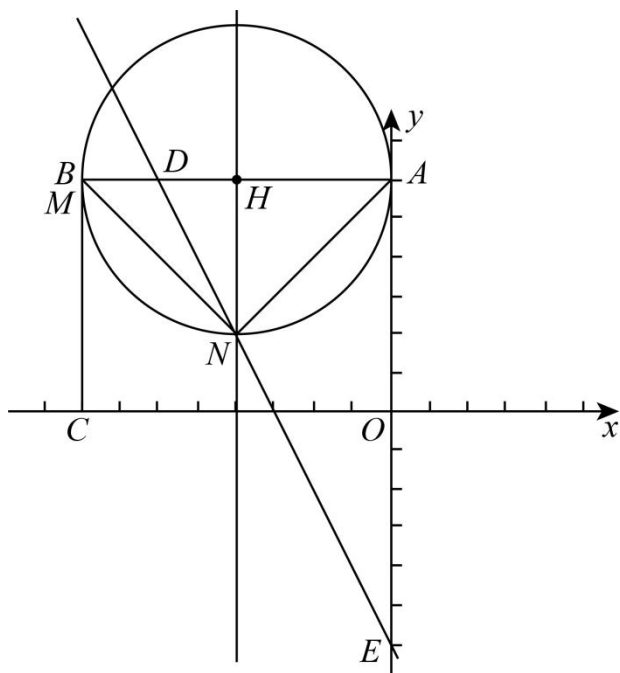
【分析】如图, 由  $\triangle AMN$  是以点  $N$  为直角顶点的等腰直角三角形, 可得  $N$  在以  $AM$  为直径的圆  $H$  上,  $MN = AN$ , 可得  $N$  是圆  $H$  与直线  $y = -2x - 6$  的交点, 当  $M, B$  重合时, 符合题意, 可得  $M(-8, 6)$ , 当  $N$  在  $AM$  的上方时, 如图, 过  $N$  作  $NJ \perp y$  轴于  $J$ , 延长  $MB$  交  $BJ$  于  $K$ , 则  $\angle NJA = \angle MKN = 90^\circ$ ,

$JK = AB = 8$ ，证明  $\triangle MNK \cong \triangle NAJ$ ，设  $N(x, -2x-6)$ ，可得  $MK = NJ = -x$ ，  
 $KN = AJ = -2x-6-6 = -2x-12$ ，而  $KJ = AB = 8$ ，则  $-2x-12-x = 8$ ，再解方程可得答案.

【详解】解：如图， $\because \triangle AMN$  是以点  $N$  为直角顶点的等腰直角三角形，

$\therefore N$  在以  $AM$  为直径的圆  $H$  上， $MN = AN$ ，

$\therefore N$  是圆  $H$  与直线  $y = -2x-6$  的交点，



当  $M, B$  重合时，

$\therefore B(-8, 6)$ ，则  $H(-4, 3)$ ，

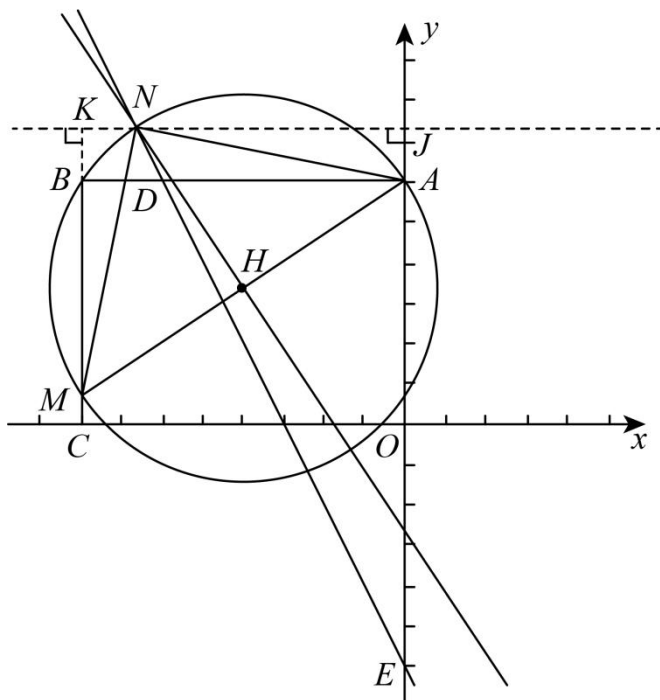
$\therefore MH = AH = NH = 4$ ，符合题意，

$\therefore M(-8, 6)$ ，

当  $N$  在  $AM$  的上方时，如图，过  $N$  作  $NJ \perp y$  轴于  $J$ ，延长  $MB$  交  $BJ$  于  $K$ ，则  $\angle NJA = \angle MKN = 90^\circ$ ，

$JK = AB = 8$ ，

$\therefore \angle NAJ + \angle ANJ = 90^\circ$ ，



$$\therefore AN = MN, \quad \angle ANM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MNK + ANJ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MNK = \angle NAJ,$$

$\therefore \triangle MNK \cong \triangle NAJ$ , 设  $N(x, -2x-6)$ ,

$$\therefore MK = NJ = -x, \quad KN = AJ = -2x - 6 - 6 = -2x - 12,$$

而  $KJ = AB = 8$ ,

$$\therefore -2x - 12 - x = 8,$$

解得:  $x = -\frac{20}{3}$ , 则  $-2x - 6 = \frac{22}{3}$ ,

$$\therefore CM = CK - MK = \frac{22}{3} - \frac{20}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore M\left(-8, \frac{2}{3}\right);$$

綜上:  $M(-8,6)$  或  $M\left(-8, \frac{2}{3}\right)$ .

故答案为:  $M(-8, 6)$  或  $M\left(-8, \frac{2}{3}\right)$ .

【点睛】本题考查的是坐标与图形，一次函数的性质，等腰直角三角形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，圆周角定理的应用，本题属于填空题里面的压轴题，难度较大，清晰的分类讨论是解本题的关键.

三、解答题：本大题共 8 个小题，共 78 分。请把解答过程写在答题卡相应的位置上。

19. 计算：  $(2\sqrt{3}-\pi)^0 - |1-\sqrt{3}| + 3\tan 30^\circ + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

【答案】 6

【解析】

【分析】 先计算零指数幂，负整数指数幂和特殊角三角函数值，再根据实数的混合运算法则求解即可.

【详解】 解： 原式  $= 1 - (\sqrt{3} - 1) + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} + 4$

$$= 1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + 4$$

$$= 6.$$

【点睛】 本题主要考查了实数的混合计算，特殊角三角函数值，零指数幂和负整数指数幂，熟知相关运算法则是解题的关键.

20. 先化简：  $\left(1 - \frac{1}{x-1}\right) \div \frac{x^2-4}{x-1}$ ，再从  $-2, -1, 1, 2$  选择一个合适的数作为  $x$  的值代入求值.

【答案】  $\frac{1}{x+2}$ ； 1

【解析】

【分析】 先根据分式混合运算法则进行计算，然后再代入数据求值即可.

【详解】 解：  $\left(1 - \frac{1}{x-1}\right) \div \frac{x^2-4}{x-1}$

$$= \left(\frac{x-1}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right) \div \frac{(x+2)(x-2)}{x-1}$$

$$= \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{(x-1)}{(x+2)(x-2)}$$

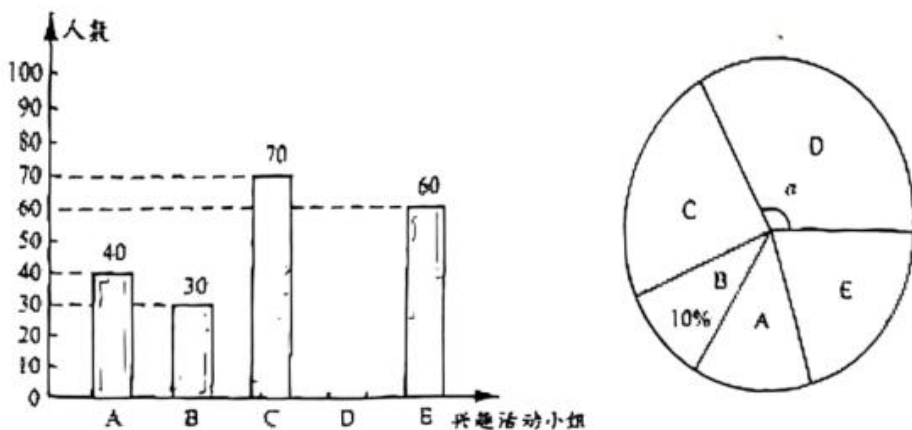
$$= \frac{1}{x+2},$$

$$\because x \neq 1, \pm 2,$$

$$\therefore \text{把 } x = -1 \text{ 代入得：原式} = \frac{1}{-1+2} = 1.$$

【点睛】 本题主要考查了分式化简求值，解题的关键是熟练掌握分式混合运算法则，准确计算.

21. 某校为落实“双减”工作，推行“五育并举”，计划成立五个兴趣活动小组（每个学生只能参加一个活动小组）：A. 音乐，B. 美术，C. 体育，D. 阅读，E. 人工智能，为了解学生对以上兴趣活动的参与情况，随机抽取了部分学生进行调查统计，并根据统计结果，绘制成了如图所示的两幅不完整的统计图：



根据图中信息，完成下列问题：

- (1) ①补全条形统计图（要求在条形图上方注明人数）；
- ②扇形统计图中的圆心角  $\alpha$  的度数为\_\_\_\_\_。
- (2) 若该校有 3600 名学生，估计该校参加 E 组（人工智能）的学生人数；
- (3) 该学校从 E 组中挑选出了表现最好的两名男生和两名女生，计划从这四位同学中随机抽取两人参加市青少年人工智能竞赛，请用画树状图或列表的方法求出恰好抽到一名男生一名女生的概率。

**【答案】** (1) ①补全图形见解析； ②  $120^\circ$ ；

(2) 720 人；

(3)  $\frac{2}{3}$ ；

**【解析】**

**【分析】** (1) ①先求解总人数，再求解 D 组人数，再补全统计图即可； ②由  $360^\circ$  乘以 D 组的占比即可得到圆心角的大小；

(2) 由 3600 乘以 E 组人数的占比即可；

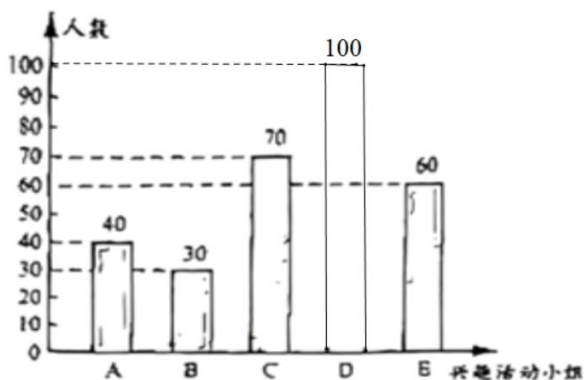
(3) 画出树状图，数出所有的情况数和符合题意的情况数，再根据概率公式，即可求解。

**【小问 1 详解】**

解：①由题意可得：总人数为：  $30 \div 10\% = 300$ （人），

$\therefore$  D 组人数为：  $300 - 40 - 30 - 70 - 60 = 100$ （人），

补全图形如下：



②由题意可得:  $\frac{100}{300} \times 360^\circ = 120^\circ$ ;

【小问 2 详解】

该校有 3600 名学生, 估计该校参加 E 组 (人工智能) 的学生人数有:

$$\frac{60}{300} \times 3600 = 720 \text{ (人)};$$

【小问 3 详解】

记 A, B 表示男生, C, D 表示女生, 画树状图如图:

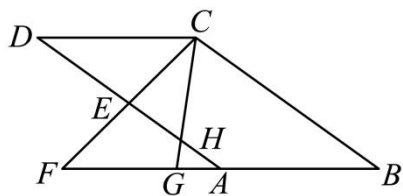


共有 12 种等可能的结果, 其中抽到一名男生一名女生的有 8 种结果,

$$P_{\text{(一男一女)}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

【点睛】本题考查了从统计图与扇形图中获取信息, 利用样本估计总体, 利用画树状图法求概率. 树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果, 适合两步或两步以上完成的事件; 解题时要注意此题是放回试验还是不放回试验. 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

22. 如图,  $ABCD$  中, 点 E 是 AD 的中点, 连接 CE 并延长交 BA 的延长线于点 F.



(1) 求证:  $AF = AB$ ;

(2) 点 G 是线段 AF 上一点, 满足  $\angle FCG = \angle FCD$ , CG 交 AD 于点 H, 若  $AG = 2, FG = 6$ , 求 GH 的长.

【答案】(1) 见解析 (2)  $\frac{6}{5}$

【解析】

【分析】(1) 根据平行四边形的性质可得  $AB \parallel CD$ ,  $AB = CD$ , 证明  $\triangle AEF \cong \triangle DEC$  (ASA), 推出  $AF = CD$ , 即可解答;

(2) 通过平行四边形的性质证明  $GC = GF = 6$ , 再通过 (1) 中的结论得到  $DC = AB = AF = 8$ , 最后证明  $\triangle AGH \sim \triangle DCH$ , 利用对应线段比相等, 列方程即可解答.

【小问 1 详解】

证明:  $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,

$$\therefore AB \parallel CD, AB = CD,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle D,$$

$\because E$  是  $AD$  的中点,

$$\therefore AE = DE,$$

$\because \angle AEF = \angle CED$ ,

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle DEC \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AF = CD,$$

$$\therefore AF = AB;$$

【小问 2 详解】

解:  $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,

$$\therefore DC = AB = AF = FG + GA = 8, DC \parallel FA,$$

$$\therefore \angle DCF = \angle F, \angle DCG = \angle CGB,$$

$\because \angle FCG = \angle FCD$ ,

$$\therefore \angle F = \angle FCG,$$

$$\therefore GC = GF = 6,$$

$\because \angle DHC = \angle AHG$ ,

$$\therefore \triangle AGH \sim \triangle DCH,$$

$$\therefore \frac{GH}{CH} = \frac{AG}{DC},$$

设  $HG = x$ , 则  $CH = CG - GH = 6 - x$ ,

$$\text{可得方程 } \frac{x}{6-x} = \frac{2}{8},$$

解得  $x = \frac{6}{5}$ ,

即  $GH$  的长为  $\frac{6}{5}$ .

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，等腰三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，熟练运用上述性质证明三角形相似是解题的关键.

23. 习近平总书记说：“读书可以让人保持思想活力，让人得到智慧启发，让人滋养浩然正气。”某校为提高学生的阅读品味，现决定购买获得矛盾文学奖的甲、乙两种书共 100 本，已知购买 2 本甲种书和 1 本乙种书共需 100 元，购买 3 本甲种书和 2 本乙种书共需 165 元.

(1) 求甲，乙两种书的单价分别为多少元；

(2) 若学校决定购买以上两种书的总费用不超过 3200 元，那么该校最多可以购买甲种书多少本？

【答案】(1) 甲种书的单价为 35 元，乙种书的单价为 30 元

(2) 该校最多可以购买甲种书 40 本

【解析】

【分析】(1) 设甲种书的单价为  $x$  元，乙种书的单价为  $y$  元，利用 2 本甲种书的价格 + 1 本乙种书的价格 = 100；3 本甲种书的价格 + 2 本乙种书的价格 = 165，列方程解答即可；

(2) 设购买甲种书  $a$  本，则购买乙种书  $(100 - a)$  本，根据购买甲种书的总价 + 购买乙种书的总价  $\leq 3200$ ，列不等式解答即可.

【小问 1 详解】

解：设甲种书的单价为  $x$  元，乙种书的单价为  $y$  元，

$$\text{可得方程} \begin{cases} 2x + y = 100 \\ 3x + 2y = 165 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 35 \\ y = 30 \end{cases},$$

$$\therefore \text{原方程的解为} \begin{cases} x = 35 \\ y = 30 \end{cases},$$

答：甲种书的单价为 35 元，乙种书的单价为 30 元.

【小问 2 详解】

解：设购买甲种书  $a$  本，则购买乙种书  $(100 - a)$  本，

根据题意可得  $35a + 30(100 - a) \leq 3200$ ,

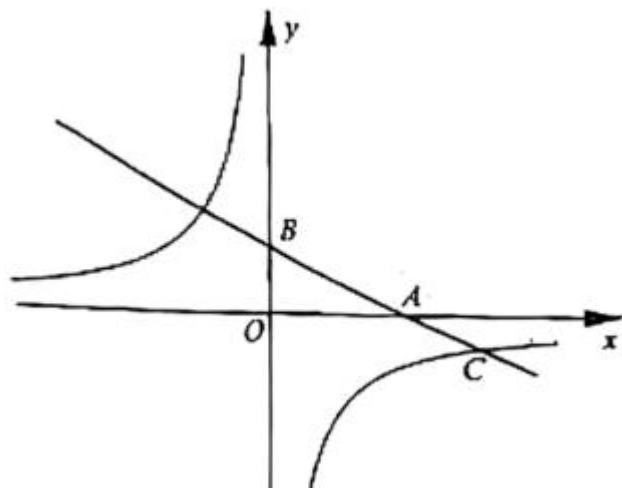
解得  $a \leq 40$ ,

故该校最多可以购买甲种书 40 本，

答：该校最多可以购买甲种书 40 本．

【点睛】本题考查了二元一次方程的实际应用，一元一次不等式的实际应用，列出正确的等量关系和不等关系是解题的关键．

24. 如图，在平面直角坐标系  $xOy$  中，直线  $y = kx + b$  与  $x$  轴交于点  $A(4, 0)$ ，与  $y$  轴交于点  $B(0, 2)$ ，与反比例函数  $y = \frac{m}{x}$  在第四象限内的图象交于点  $C(6, a)$ ．



(1) 求反比例函数的表达式：

(2) 当  $kx + b > \frac{m}{x}$  时，直接写出  $x$  的取值范围；

(3) 在双曲线  $y = \frac{m}{x}$  上是否存在点  $P$ ，使  $\triangle ABP$  是以点  $A$  为直角顶点的直角三角形？若存在，求出点  $P$  的坐标；若不存在，请说明理由．

【答案】(1)  $y = -\frac{6}{x}$

(2)  $x < -2$  或  $0 < x < 6$

(3)  $(4, -2)$  或  $(1, -6)$

【解析】

【小问 1 详解】

解：把  $A(4, 0)$ ， $B(0, 2)$  代入  $y = kx + b$  中得：
 
$$\begin{cases} 4k + b = 0 \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases},$$

$\therefore$  直线  $y = kx + b$  的解析式为  $y = -\frac{1}{2}x + 2$ ,

在  $y = -\frac{1}{2}x + 2$  中, 当  $x = 6$  时,  $y = -\frac{1}{2} \times 6 + 2 = -1$ ,

$\therefore C(6, -1)$ ,

把  $C(6, -1)$  代入  $y = \frac{m}{x}$  中得:  $-1 = \frac{m}{6}$ ,

$\therefore m = -6$ ,

$\therefore$  反比例函数的表达式  $y = -\frac{6}{x}$ ;

【小问 2 详解】

$$\text{解: 联立 } \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ y = -\frac{6}{x} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 6 \\ y = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases},$$

$\therefore$  一次函数与反比例函数的两个交点坐标分别为  $(6, -1)$ 、 $(-2, 3)$ ,

$\therefore$  由函数图象可知, 当  $x < -2$  或  $0 < x < 6$  时, 一次函数图象在反比例函数图象上方,

$\therefore$  当  $kx + b > \frac{m}{x}$  时,  $x < -2$  或  $0 < x < 6$ ;

【小问 3 详解】

解: 如图所示, 设直线  $AP$  交  $y$  轴于点  $M(0, m)$ ,

$\therefore A(4, 0)$ ,  $B(0, 2)$ ,

$\therefore BM^2 = |2 - m|^2 = m^2 - 4m + 4$ ,  $AB^2 = 2^2 + 4^2 = 20$ ,  $AM^2 = 4^2 + m^2 = m^2 + 16$ ,

$\therefore \triangle ABP$  是以点  $A$  为直角顶点的直角三角形,

$\therefore \angle BAM = 90^\circ$ ,

$\therefore BM^2 = BA^2 + AM^2$ ,

$\therefore m^2 - 4m + 4 = 20 + m^2 + 16$ ,

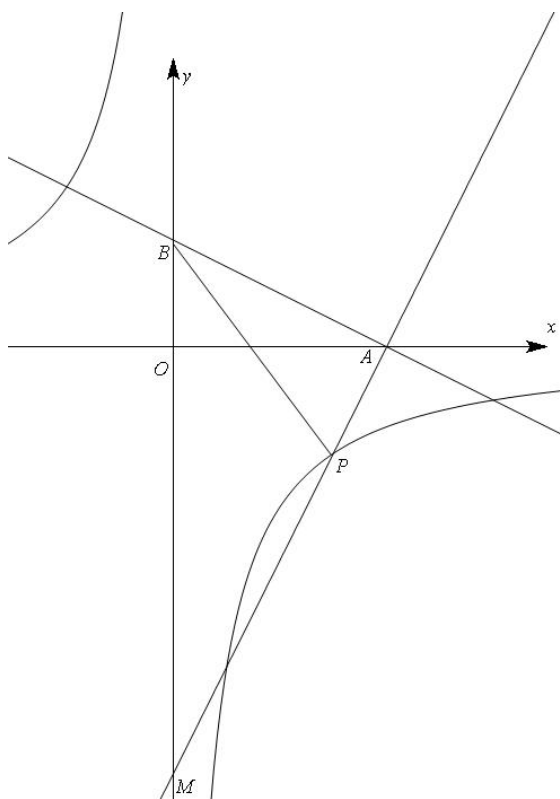
解得  $m = -8$ ,

$\therefore M(0, -8)$ ,

同理可得直线  $AM$  的解析式为  $y = 2x - 8$ ,

$$\text{联立} \begin{cases} y = 2x - 8 \\ y = -\frac{6}{x} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = 1 \\ y = -6 \end{cases},$$

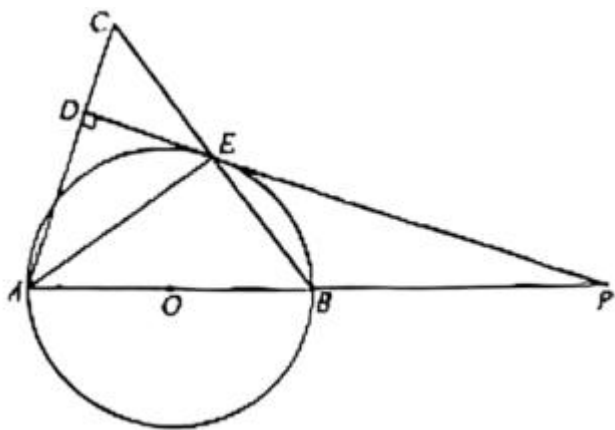
∴ 点  $P$  的坐标为  $(4, -2)$  或  $(1, -6)$ .



【点睛】本题主要考查了反比例函数与一次函数综合，勾股

定理，正确利用待定系数法求出对应的函数解析式是解题的关键.

25. 如图， $\triangle ABC$  中，以  $AB$  为直径的  $\odot O$  交  $BC$  于点  $E$ .  $AE$  平分  $\angle BAC$ ，过点  $E$  作  $ED \perp AC$  于点  $D$ ，延长  $DE$  交  $AB$  的延长线于点  $P$ .



- (1) 求证:  $PE$  是  $\odot O$  的切线;
- (2) 若  $\sin \angle P = \frac{1}{3}$ ,  $BP = 4$ , 求  $CD$  的长.

【答案】(1) 见解析 (2)  $\frac{4}{3}$

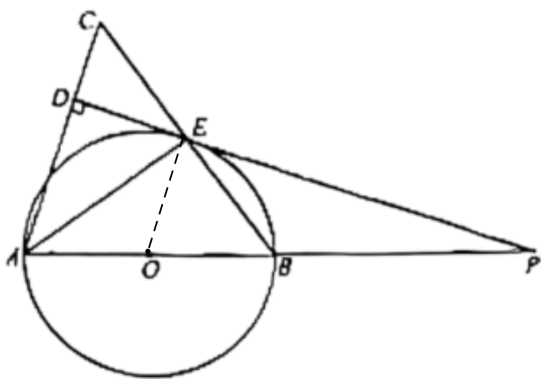
## 【解析】

【分析】(1) 连接  $OE$ ，利用角平分线的性质和等边对等角，证明  $AD \parallel OE$ ，即可解答；

(2) 根据  $\sin \angle P = \frac{1}{3}$ ，可得  $\frac{OE}{OP} = \frac{AD}{AP} = \frac{1}{3}$ ，求出  $OE, AD$  的长，再利用勾股定理得  $DP, EP$  的长，即可得到  $DE$  的长，最后证明  $\triangle CDE \sim \triangle EDA$ ，即可解答.

## 【小问 1 详解】

证明：如图，连接  $OE$ ，



$$\because OE = OA,$$

$$\therefore \angle OAE = \angle OEA,$$

$$\because AE \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle OAE,$$

$$\therefore \angle OEA = \angle DAE,$$

$$\therefore AD \parallel OE,$$

$$\because AD \perp DE,$$

$$\therefore \angle OEP = \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore PE \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线};$$

## 【小问 2 详解】

解：设  $OE = x$ ，则  $OP = OB + BP = OE + BP = x + 4$ ，

$$\because \sin \angle P = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{OE}{OP} = \frac{x}{x+4} = \frac{1}{3}, \text{ 解得 } x = 2,$$

$$\therefore OP = 6, AP = AO + OP = 8,$$

$$\therefore AD = \frac{1}{3} AP = \frac{8}{3},$$

根据勾股定理可得  $EP = \sqrt{OP^2 - OE^2} = 4\sqrt{2}$ ,  $DP = \sqrt{AP^2 - AD^2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$ ,

$$\therefore DE = DP - EP = \frac{4}{3}\sqrt{2},$$

$\because AB$  是直径,

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CED + \angle AED = 90^\circ,$$

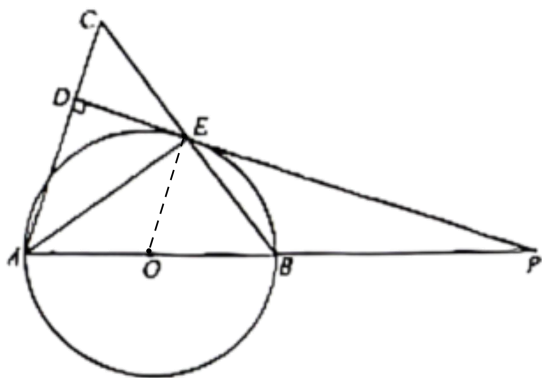
$$\because \angle CED + \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEA = \angle C,$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle EDA,$$

$$\therefore \frac{DE}{DC} = \frac{AD}{DE},$$

$$\therefore DC = \frac{DE^2}{AD} = \frac{4}{3}.$$



**【点睛】** 本题考查了切线的判定，角平分线的定义，平行线的判定和性质，相似三角形的判定和性质，勾股定理，正弦的概念，熟练运用上述性质是解题的关键.

26. 在平面直角坐标系中，已知抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与  $x$  轴交于点  $A(-3, 0)$ ,  $B(1, 0)$  两点，与  $y$  轴交于点  $C(0, 3)$ ，点  $P$  是抛物线上的一个动点.

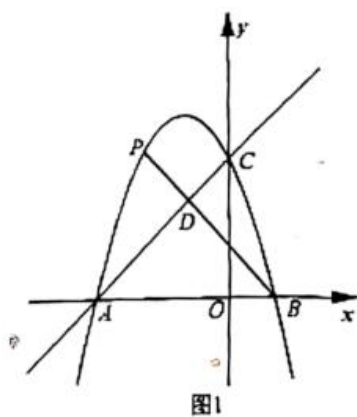
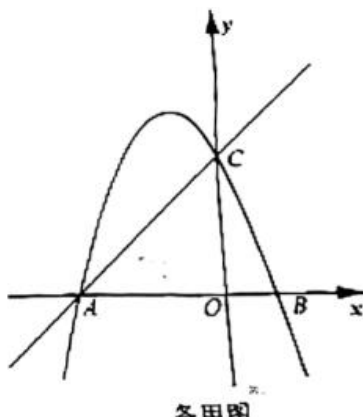


图1



备用图

- (1) 求抛物线的表达式;
- (2) 当点  $P$  在直线  $AC$  上方的抛物线上时, 连接  $BP$  交  $AC$  于点  $D$ . 如图 1. 当  $\frac{PD}{DB}$  的值最大时, 求点  $P$  的坐标及  $\frac{PD}{DB}$  的最大值;
- (3) 过点  $P$  作  $x$  轴的垂线交直线  $AC$  于点  $M$ , 连接  $PC$ , 将  $\triangle PCM$  沿直线  $PC$  翻折, 当点  $M$  的对应点  $M'$  恰好落在  $y$  轴上时, 请直接写出此时点  $M$  的坐标.

【答案】(1)  $y = -x^2 - 2x + 3$

(2) 点  $P$  的坐标为  $\left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$ ;  $\frac{PD}{DB}$  的最大值为  $\frac{9}{16}$

(3) 点  $M$  的坐标为:  $(-3-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ,  $(-3+\sqrt{2}, \sqrt{2})$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求出抛物线的解析式即可;

(2) 过点  $P$  作  $PQ \parallel x$  轴, 交  $AC$  于点  $Q$ , 求出直线  $AC$  的解析式为  $y = x + 3$ , 设点  $P$  的坐标为  $(t, -t^2 - 2t + 3)$ , 则点  $Q(-t^2 - 2t, -t^2 - 2t + 3)$ , 得出  $PQ = -t^2 - 2t - t = -t^2 - 3t$ , 根据  $PQ \parallel x$  轴, 得出

$\frac{PD}{BD} = \frac{PQ}{AB}$ , 根据  $\frac{PD}{BD} = -\frac{1}{4}\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{16}$ , 求出点  $P$  的坐标和最大值即可;

(3) 证明  $\angle MPC = \angle PCM$ , 得出  $PM = CM$ , 设  $M(m, m+3)$ ,  $P(m, -m^2 - 2m + 3)$ , 得出  $CM^2 = m^2 + (m+3-3)^2 = 2m^2$ ,  $PM^2 = (-m^2 - 2m + 3 - m - 3)^2 = (-m^2 - 3m)^2 = m^2(m+3)^2$ , 根据  $PM^2 = CM^2$ , 得出  $2m^2 = m^2(m+3)^2$ , 求出  $m = 0$  或  $m = -3 - \sqrt{2}$  或  $m = -3 + \sqrt{2}$ , 根据当  $m = 0$  时, 点  $P, M, C, M'$  四点重合, 不存在  $\triangle PCM$  舍去, 求出点  $M$  的坐标为  $(-3 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ,  $(-3 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

【小问 1 详解】

解：把  $A(-3,0)$ ,  $B(1,0)$ ,  $C(0,3)$  代入  $y = ax^2 + bx + c$  得：

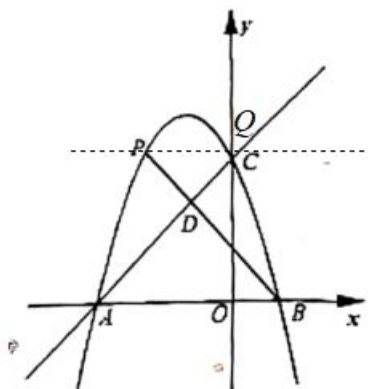
$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases},$$

解得：  $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = -x^2 - 2x + 3$ .

### 【小问 2 详解】

解：过点  $P$  作  $PQ \parallel x$  轴，交  $AC$  于点  $Q$ ，如图所示：



设直线  $AC$  的解析式为  $y = kx + b$ ，把  $A(-3,0)$ ,  $C(0,3)$  代入得：

$$\begin{cases} -3k + b = 0 \\ b = 3 \end{cases},$$

解得：  $\begin{cases} k = 1 \\ b = 3 \end{cases}$

$\therefore$  直线  $AC$  的解析式为  $y = x + 3$ ,

设点  $P$  的坐标为  $(t, -t^2 - 2t + 3)$ ，则点  $Q(-t^2 - 2t, -t^2 - 2t + 3)$ ,

$\therefore$  点  $P$  在直线  $AC$  上方的抛物线上，

$$\therefore PQ = -t^2 - 2t - t = -t^2 - 3t,$$

$\therefore PQ \parallel x$  轴，

$$\therefore \triangle PQD \sim \triangle BAD,$$

$$\therefore \frac{PD}{BD} = \frac{PQ}{AB}$$

$$\therefore AB = 1 - (-3) = 4,$$

$$\therefore \frac{PD}{BD} = \frac{-t^2 - 3t}{4}$$

$$= -\frac{1}{4}(t^2 + 3t)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{16},$$

$$\therefore \text{当 } t = -\frac{3}{2} \text{ 时, } \frac{PD}{BD} \text{ 有最大值 } \frac{9}{16},$$

$$\text{此时点 } P \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right).$$

### 【小问 3 详解】

解：根据折叠可知， $PM = PM'$ ， $CM = CM'$ ， $\angle PCM = \angle PCM'$ ，

$$\therefore PM \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore PM \parallel CM',$$

$$\therefore \angle MPC = \angle PCM',$$

$$\therefore \angle MPC = \angle PCM,$$

$$\therefore PM = CM,$$

$$\text{设 } M(m, m+3), P(m, -m^2 - 2m + 3),$$

$$CM^2 = m^2 + (m+3-3)^2 = 2m^2,$$

$$PM^2 = (-m^2 - 2m + 3 - m - 3)^2 = (-m^2 - 3m)^2 = m^2(m+3)^2,$$

$$\therefore PM = CM,$$

$$\therefore PM^2 = CM^2,$$

$$\therefore 2m^2 = m^2(m+3)^2,$$

$$\text{整理得: } m^2[(m+3)^2 - 2] = 0,$$

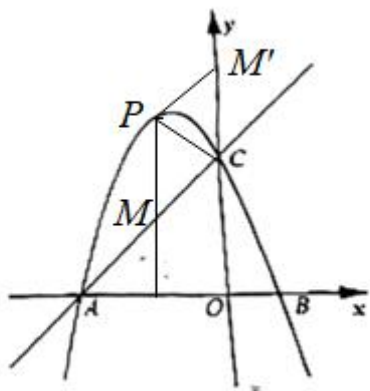
$$\therefore m^2 = 0 \text{ 或 } (m+3)^2 - 2 = 0,$$

$$\text{解得: } m = 0 \text{ 或 } m = -3 - \sqrt{2} \text{ 或 } m = -3 + \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{当 } m = 0 \text{ 时, 点 } P、M、C、M' \text{ 四点重合, 不存在 } \triangle PCM,$$

$\therefore m \neq 0$ ,

$\therefore$  点  $M$  的坐标为  $(-3-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ,  $(-3+\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .



**【点睛】** 本题主要考查了求抛物线的解析式，二次函数的综合应用，平行线分线段成比例定理，等腰三角形的判定，平行线的性质，两点间距离公式，解题的关键是数形结合，作出辅助线或画出图形.

