

泸州市二〇二三年初中学业水平考试

数学试题

全卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共4页。全卷满分120分。考试时间共120分钟。

注意事项：

1. 答题前，请考生务必在答题卡上正确填写自己的姓名、准考证号和座位号。考试结束，将试卷和答题卡一并交回。
2. 选择题每小题选出的答案须用2B铅笔在答题卡上把对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦擦净后，再选涂其它答案。非选择题须用0.5毫米黑色墨迹签字笔在答题卡上对应题号位置作答，在试卷上作答无效。

第Ⅰ卷（选择题 共36分）

一、选择题（本大题共12个小题，每小题3分，共36分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）。

1. 下列各数中，最大的是（ ）

- A. -3 B. 0 C. 2 D. $|-1|$

【答案】C

【解析】

【分析】首先化简绝对值，然后把选项中的4个数按从小到大排列，即可得出最大的数。

【详解】 $\because |-1| = 1$,

$\therefore -3 < 0 < |-1| < 2$,

$\therefore$ 最大的数是2.

故选：C.

【点睛】本题考查了有理数的大小比较，一般地，正数大于零，零大于负数，两个负数，绝对值大的反而小.

2. 泸州市2022年全市地区生产总值（GDP）为2601.5亿元，将数据26015000000用科学记数法表示为（ ）

- A. 2.6015×10^{10} B. 2.6015×10^{11} C. 2.6015×10^{12} D. 2.6015×10^{13}

【答案】B

【解析】

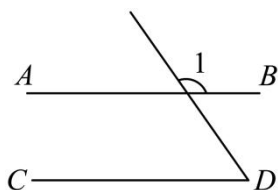
【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a ，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数 ≥ 10 时， n 为正整数；当原数 < 1 时， n 为负整数．

【详解】解： $26015000000 = 2.6015 \times 10^{11}$ ．

故选：B．

【点睛】本题主要考查了科学记数法的表示形式，正确确定 a 和 n 的值是解题关键．

3. 如图， $AB \parallel CD$ ，若 $\angle D = 55^\circ$ ，则 $\angle 1$ 的度数为（ ）



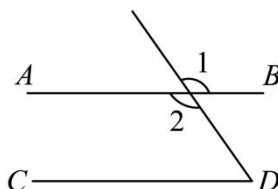
- A. 125° B. 135° C. 145° D. 155°

【答案】A

【解析】

【分析】先根据两直线平行、同旁内角互补求得 $\angle 2$ 的度数，然后再根据对顶角的性质解答即可．

【详解】解： $\because AB \parallel CD$ ， $\angle D = 55^\circ$ ，



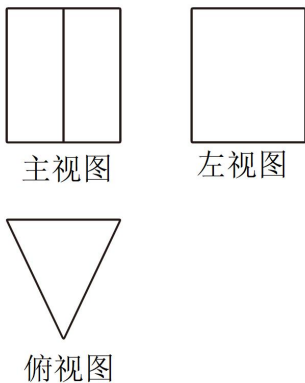
$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle D = 125^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 125^\circ.$$

故选：A．

【点睛】本题主要考查了平行线的性质、对顶角的性质等知识点，运用平行线的性质求得 $\angle 2$ 是解答本题的关键．

4. 一个立体图形的三视图如图所示，则该立体图形是（ ）



- A. 圆柱 B. 圆锥 C. 长方体 D. 三棱柱

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据三视图进行判断即可.

【详解】 解：根据主视图和左视图为矩形判断出是柱体，根据俯视图是三角形可判断出这个几何体应该是三棱柱.

故选： D.

【点睛】 本题主要考查由三视图判断几何体，掌握基本立体图形的三视图是解题的关键.

5. 下列运算正确的是 ()

- A. $m^3 - m^2 = m$ B. $3m^2 \cdot 2m^3 = 6m^5$ C. $3m^2 + 2m^3 = 5m^5$ D. $(2m^2)^3 = 8m^5$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据运算法则，对每一个选项进行计算排除即可.

【详解】 A、 m^3 与 m^2 不是同类项，不可以合并，故选项计算错误，不符合题意；

B、 $3m^2 \cdot 2m^3 = 6m^{2+3} = 6m^5$ ，故选项计算正确，符合题意；

C、 $3m^2$ 与 $2m^3$ 不是同类项，不可以合并，故选项计算错误，不符合题意；

D、 $(2m^2)^3 = 2^3 m^{2 \times 3} = 8m^6$ ，故选项计算错误，不符合题意；

故选： B.

【点睛】 本题主要考查单项式乘单项式，积的乘方，同底数幂的乘法，合并同类项，解答的关键是熟练掌握相应的运算法则及其应用.

6. 从 1, 2, 3, 4, 5, 5 六个数中随机选取一个数，这个数恰为该组数据的众数的概率为 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】由众数的概念可知六个数中众数为5，然后根据简单概率计算公式求解即可.

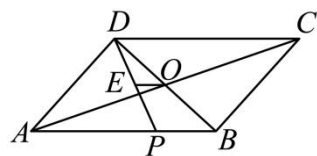
【详解】解：1，2，3，4，5，5六个数中，数字5出现了2次，出现的次数最多，
故这组数据的众数为5，

所以从六个数中随机选取一个数，这个数恰为该组数据的众数的概率为 $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

故选：B.

【点睛】本题主要考查了求一组数据的众数以及简单概率计算，正确确定该组数据的众数是解题关键.

7. 如图， $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ， $\angle ADC$ 的平分线与边 AB 相交于点 P ， E 是 PD 中点，若 $AD = 4$ ， $CD = 6$ ，则 EO 的长为（ ）



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质、平行线的性质、角平分线的定义以及等腰三角形的判定可得 $AP = AD = 4$ ，进而可得 $BP = 2$ ，再根据三角形的中位线解答即可.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $CD = 6$ ，

$\therefore AB \parallel CD$ ， $AB = CD = 6$ ， $DO = BO$ ，

$\therefore \angle CDP = \angle APD$ ，

$\because PD$ 平分 $\angle ADC$ ，

$\therefore \angle ADP = \angle CDP$ ，

$\therefore \angle ADP = \angle APD$ ，

$\therefore AP = AD = 4$ ，

$\therefore BP = AB - AP = 6 - 4 = 2$ ，

$\because E$ 是 PD 中点，

$\therefore OE = \frac{1}{2}BP = 1$ ；

故选：A.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质、平行线的性质、等腰三角形的判定以及三角形的中位线定理等知

识，熟练掌握相关图形的判定与性质是解题的关键.

8. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$ 的根的情况是 ()

- A. 没有实数根
B. 有两个相等的实数根
C. 有两个不相等的实数根
D. 实数根的个数与实数 a 的取值有关

【答案】C

【解析】

【分析】根据一元二次方程根的判别式求出 $\Delta = (2a)^2 - 4(a^2 - 1) = 4a^2 - 4a^2 + 4 = 4 > 0$ ，即可得出答案.

【详解】解： $\because \Delta = (2a)^2 - 4(a^2 - 1) = 4a^2 - 4a^2 + 4 = 4 > 0$,

$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，故 C 正确.

故选：C.

【点睛】本题考查了根的判别式，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根.

9. 《九章算术》是中国古代重要的数学著作，该著作中给出了勾股数 a, b, c 的计算公式： $a = \frac{1}{2}(m^2 - n^2)$, $b = mn$, $c = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)$ ，其中 $m > n > 0$ ， m, n 是互质的奇数. 下列四组勾股数中，不能由该勾股数计算公式直接得出的是 ()

- A. 3, 4, 5
B. 5, 12, 13
C. 6, 8, 10
D. 7, 24, 25

【答案】C

【解析】

【分析】首先证明出 $a^2 + b^2 = c^2$ ，得到 a, b 是直角三角形的直角边然后由 $m > n > 0$ ， m, n 是互质的奇数逐项求解即可.

【详解】 $\because a = \frac{1}{2}(m^2 - n^2), b = mn, c = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)$,

$$\therefore a^2 + b^2 = \left[\frac{1}{2}(m^2 - n^2) \right]^2 + (mn)^2 = \frac{1}{4}(m^2 - n^2)^2 + m^2 n^2 = \frac{1}{4}m^4 + \frac{1}{2}m^2 n^2 + \frac{1}{4}n^4.$$

$$\because c^2 = \left[\frac{1}{2}(m^2 + n^2) \right]^2 = \frac{1}{4}(m^2 + n^2)^2 = \frac{1}{4}m^4 + \frac{1}{2}m^2 n^2 + \frac{1}{4}n^4,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2.$$

$\therefore a, b$ 是直角三角形的直角边,

$\therefore m, n$ 是互质的奇数,

$$\therefore A. 3 = 1 \times 3,$$

$$\therefore \text{当 } m = 3, n = 1 \text{ 时, } a = \frac{1}{2}(m^2 - n^2) = 4, b = mn = 3, c = \frac{1}{2}(m^2 + n^2) = 5,$$

$\therefore 3, 4, 5$ 能由该勾股数计算公式直接得出;

$$B. 5 = 1 \times 5,$$

$$\therefore \text{当 } m = 5, n = 1 \text{ 时, } a = \frac{1}{2}(m^2 - n^2) = 12, b = mn = 5, c = \frac{1}{2}(m^2 + n^2) = 13,$$

$\therefore 5, 12, 13$ 能由该勾股数计算公式直接得出;

$$C. 6 = 2 \times 3, 8 = 2 \times 4,$$

$\therefore m, n$ 是互质的奇数,

$\therefore 6, 8, 10$ 不能由该勾股数计算公式直接得出;

$$D. 7 = 1 \times 7,$$

$$\therefore \text{当 } m = 7, n = 1 \text{ 时, } a = \frac{1}{2}(m^2 - n^2) = 24, b = mn = 7, c = \frac{1}{2}(m^2 + n^2) = 25,$$

$\therefore 7, 24, 25$ 能由该勾股数计算公式直接得出.

故选: C.

【点睛】本题考查了勾股数的应用, 通过 $m > n > 0$, m, n 是互质的奇数这两个条件去求得符合题意的 t 的值是解决本题的关键.

10. 若一个菱形的两条对角线长分别是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 10x + m = 0$ 的两个实数根, 且其面积为 11, 则该菱形的边长为 ()

$$A. \sqrt{3}$$

$$B. 2\sqrt{3}$$

$$C. \sqrt{14}$$

$$D. 2\sqrt{14}$$

【答案】C

【解析】

【分析】根据一元二次方程根与系数的关系, 得到 $a + b = 10$, 根据菱形的面积得到 $ab = 22$, 利用勾股定理以及完全平方公式计算可得答案.

【详解】解: 设方程 $x^2 - 10x + m = 0$ 的两根分别为 a, b ,

$$\therefore a + b = 10,$$

$\therefore a, b$ 分别是一个菱形的两条对角线长, 已知菱形的面积为 11,

$$\therefore \frac{1}{2}ab = 11, \text{ 即 } ab = 22,$$

$\therefore$ 菱形对角线垂直且互相平分,

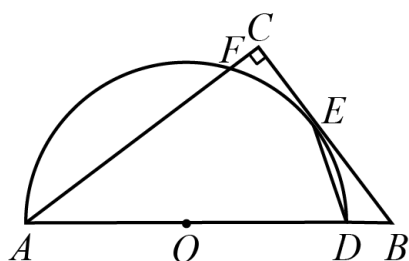
$$\therefore \text{该菱形的边长为 } \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2 - 2ab}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{10^2 - 2 \times 22} = \sqrt{14}, \text{ 故 C 正确.}$$

故选: C.

【点睛】本题考查了根与系数的关系以及菱形的性质, 完全平方公式, 利用根与系数的关系得出 $a+b=10$ 是解题的关键.

11. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 D 在斜边 AB 上, 以 AD 为直径的半圆 O 与 BC 相切于点 E , 与 AC 相交于点 F , 连接 DE . 若 $AC = 8$, $BC = 6$, 则 DE 的长是 ()



A. $\frac{4\sqrt{10}}{9}$

B. $\frac{8\sqrt{10}}{9}$

C. $\frac{80}{27}$

D. $\frac{8}{3}$

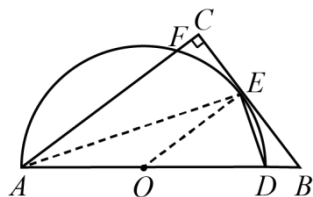
【答案】B

【解析】

【分析】连接 OE , AE , 首先根据勾股定理求出 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10$, 然后证明出 $\triangle BCA \sim \triangle BEO$, 利用相似三角形的性质得到 $OE = \frac{40}{9}$, $BE = \frac{10}{3}$, 证明出 $\triangle DBE \sim \triangle EBA$, 利用相似三角形的性质求出

$$DE = \frac{8\sqrt{10}}{9}.$$

【详解】如图所示, 连接 OE , AE ,



$$\because \angle C = 90^\circ, AC = 8, BC = 6,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10,$$

∵以 AD 为直径的半圆 O 与 BC 相切于点 E ,

∴ $OE \perp BC$,

∴ $\angle C = 90^\circ$,

∴ $\angle C = \angle OEB = 90^\circ$,

∴ $AC \parallel OE$,

∴ $\angle A = \angle EOB$,

∴ $\triangle BCA \sim \triangle BEO$,

∴ $\frac{OE}{AC} = \frac{OB}{AB} = \frac{BE}{6}$, 即 $\frac{OE}{8} = \frac{10-OE}{10} = \frac{BE}{6}$,

∴解得 $OE = \frac{40}{9}$, $BE = \frac{10}{3}$,

∴ $AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \frac{8}{3}\sqrt{10}$,

∴ $\angle OEB = 90^\circ$,

∴ $\angle OED + \angle DEB = 90^\circ$,

∴ $\angle ODE + \angle EAD = 90^\circ$, $\angle ODE = \angle OED$,

∴ $\angle EAD = \angle DEB$,

又∵ $\angle B = \angle B$,

∴ $\triangle DBE \sim \triangle EBA$,

∴ $\frac{DE}{AE} = \frac{BE}{AB}$, 即 $\frac{DE}{\frac{8}{3}\sqrt{10}} = \frac{\frac{10}{3}}{10}$,

∴解得 $DE = \frac{8\sqrt{10}}{9}$.

故选: B.

【点睛】此题考查了圆与三角形综合题, 切线的性质定理, 相似三角形的性质和判定, 勾股定理等知识, 解题的关键是熟练掌握以上知识点.

12. 已知二次函数 $y = ax^2 - 2ax + 3$ (其中 x 是自变量), 当 $0 < x < 3$ 时对应的函数值 y 均为正数, 则 a 的取值范围为 ()

A. $0 < a < 1$

B. $a < -1$ 或 $a > 3$

C. $-3 < a < 0$ 或 $0 < a < 3$

D. $-1 < a < 0$ 或 $0 < a < 3$

【答案】D

【解析】

【分析】首先根据题意求出对称轴 $x = -\frac{-2a}{2a} = 1$ ，然后分两种情况： $a > 0$ 和 $a < 0$ ，分别根据二次函数的性质求解即可.

【详解】 $\because$ 二次函数 $y = ax^2 - 2ax + 3$,

$$\therefore \text{对称轴 } x = -\frac{-2a}{2a} = 1,$$

当 $a > 0$ 时,

$\because$ 当 $0 < x < 3$ 时对应的函数值 y 均为正数,

$\therefore$ 此时抛物线与 x 轴没有交点,

$$\therefore \Delta = (-2a)^2 - 4a \times 3 < 0,$$

$\therefore$ 解得 $0 < a < 3$;

当 $a < 0$ 时,

$\because$ 当 $0 < x < 3$ 时对应的函数值 y 均为正数,

$$\therefore \text{当 } x = 3 \text{ 时, } y = 9a - 6a + 3 > 0,$$

$\therefore$ 解得 $a > -1$,

$\therefore -1 < a < 0$,

$\therefore$ 综上所述,

当 $0 < x < 3$ 时对应的函数值 y 均为正数, 则 a 的取值范围为 $-1 < a < 0$ 或 $0 < a < 3$.

故选: D.

【点睛】此题考查了二次函数的图象和性质, 解题的关键是分两种情况讨论.

第 II 卷 (非选择题 共 84 分)

注意事项: 用 0.5 毫米黑色墨迹签字笔在答题卡上对应题号位置作答, 在试卷上作答无效.

二、填空题 (本大题共 4 个小题, 每小题 3 分, 共 12 分).

13. 8 的立方根为_____.

【答案】2

【解析】

【分析】根据立方根的意义即可完成.

【详解】 $\because 2^3 = 8$

$\therefore 8$ 的立方根为 2

故答案为: 2

【点睛】本题考查了立方根的意义, 掌握立方根的意义是关键.

14. 在平面直角坐标系中，若点 $P(2, -1)$ 与点 $Q(-2, m)$ 关于原点对称，则 m 的值是_____.

【答案】1

【解析】

【分析】根据关于原点对称的两个点，横、纵坐标互为相反数，进行解答即可.

【详解】解：∵点 $P(2, -1)$ 与点 $Q(-2, m)$ 关于原点对称，

∴ $m = 1$.

故答案为：1.

【点睛】本题主要考查了关于原点对称的两个点的坐标特点，解题的关键是熟练掌握关于原点对称的两个点，横、纵坐标互为相反数.

15. 关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 2x + 3y = 3 + a \\ x + 2y = 6 \end{cases}$ 的解满足 $x + y > 2\sqrt{2}$ ，写出 a 的一个整数值_____.

【答案】7（答案不唯一）

【解析】

【分析】先解关于 x, y 的二元一次方程组的解集，再将 $x + y > 2\sqrt{2}$ 代入，然后解关于 a 的不等式的解集即可得出答案.

【详解】将两个方程相减得 $x + y = a - 3$,

∵ $x + y > 2\sqrt{2}$,

∴ $a - 3 > 2\sqrt{2}$,

∴ $a > 3 + 2\sqrt{2}$,

∵ $4 < 8 < 9$,

∴ $2 < 2\sqrt{2} < 3$,

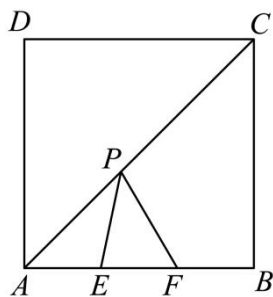
∴ $5 < 2\sqrt{2} + 3 < 6$,

∴ a 的一个整数值可以是 7.

故答案为：7（答案不唯一）.

【点睛】本题主要考查了解二元一次方程组和解一元一次不等式，整体代入的思想方法是解答本题的亮点.

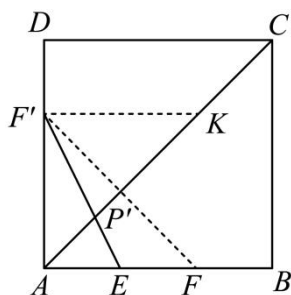
16. 如图， E, F 是正方形 $ABCD$ 的边 AB 的三等分点， P 是对角线 AC 上的动点，当 $PE + PF$ 取得最小值时， $\frac{AP}{PC}$ 的值是_____.

【答案】 $\frac{2}{7}$

【解析】

【分析】作点 F 关于 AC 的 F' ，连接 EF' 交 AC 于点 P' ，此时 $PE + PF$ 取得最小值，过点 F' 作 AD 的垂线段，交 AC 于点 K ，根据题意可知点 F' 落在 AD 上，设正方形的边长为 a ，求得 CK 的边长，证明 $\triangle AEP' \sim \triangle KF'P'$ ，可得 $\frac{KP'}{AP'} = 2$ ，即可解答.

【详解】解：作点 F 关于 AC 的 F' ，连接 EF' 交 AC 于点 P' ，过点 F' 作 AD 的垂线段，交 AC 于点 K ，



由题意得：此时 F' 落在 AD 上，且根据对称的性质，当 P 点与 P' 重合时 $PE + PF$ 取得最小值，

设正方形 $ABCD$ 的边长为 a ，则 $AF' = AF = \frac{2}{3}a$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle F'AK = 45^\circ, \angle P'AE = 45^\circ, AC = \sqrt{2}a$$

$$\because F'K \perp AF',$$

$$\therefore \angle F'AK = \angle F'KA = 45^\circ,$$

$$\therefore AK = \frac{2\sqrt{2}}{3}a,$$

$$\because \angle F'P'K = \angle EP'A,$$

$$\therefore \triangle E'KP' \sim \triangle EAP',$$

$$\therefore \frac{F'K}{AE} = \frac{KP'}{AP'} = 2,$$

$$\therefore AP' = \frac{1}{3}AK = \frac{2}{9}\sqrt{2}a,$$

$$\therefore CP' = AC - AP' = \frac{7}{9}\sqrt{2}a,$$

$$\therefore \frac{AP'}{CP'} = \frac{2}{7},$$

$\therefore$ 当 $PE + PF$ 取得最小值时, $\frac{AP}{PC}$ 的值是为 $\frac{2}{7}$,

故答案为: $\frac{2}{7}$.

【点睛】 本题考查了四边形的最值问题, 轴对称的性质, 相似三角形的证明与性质, 正方形的性质, 正确画出辅助线是解题的关键.

三、本大题共 3 个小题, 每小题 6 分, 共 18 分.

17. 计算: $3^{-1} + (\sqrt{2} - 1)^0 + 2 \sin 30^\circ - \left(-\frac{2}{3}\right)$.

【答案】 3

【解析】

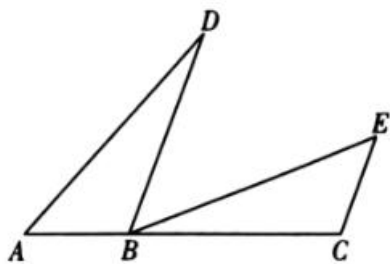
【分析】 根据负整数指数幂和零指数幂运算法则, 特殊角的三角函数值, 进行计算即可.

【详解】 解: $3^{-1} + (\sqrt{2} - 1)^0 + 2 \sin 30^\circ - \left(-\frac{2}{3}\right)$

$$= \frac{1}{3} + 1 + 2 \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + 1$$
$$= 3.$$

【点睛】 本题主要考查了实数混合运算, 解题的关键是熟练掌握负整数指数幂和零指数幂运算法则, 特殊角的三角函数值, 准确计算.

18. 如图, 点 B 在线段 AC 上, $BD \parallel CE$, $AB = EC$, $DB = BC$. 求证: $AD = EB$.



【答案】 见解析

【解析】

【分析】 首先根据平行线的性质得到 $\angle ABD = \angle C$, 然后证明出 $\triangle ABD \cong \triangle ECB$ (SAS), 最后根据全等三角形的性质求解即可.

【详解】 证明: $\because BD \parallel CE$,

$$\therefore \angle ABD = \angle C,$$

$\therefore$ 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ECB$ 中,

$$\begin{cases} AB = CE \\ \angle ABD = \angle C, \\ DB = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ECB (\text{SAS}),$$

$$\therefore AD = EB.$$

【点睛】 本题考查的知识点是全等三角形的性质和判定，解题的关键是熟练掌握全等三角形的判定.

19. 化简: $\left(\frac{4m+5}{m+1} + m - 1\right) \div \frac{m+2}{m+1}.$

【答案】 $m+2$

【解析】

【分析】 先计算括号内的，通分后利用同分母的分式运算法则求解，然后将除法变成乘法，约分即可得到结果.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \left(\frac{4m+5}{m+1} + m - 1\right) \div \frac{m+2}{m+1} \\ & = \left(\frac{4m+5}{m+1} + \frac{m^2-1}{m+1}\right) \cdot \frac{m+1}{m+2} \\ & = \frac{(m+2)^2}{m+1} \cdot \frac{m+1}{m+2} \\ & = m+2. \end{aligned}$$

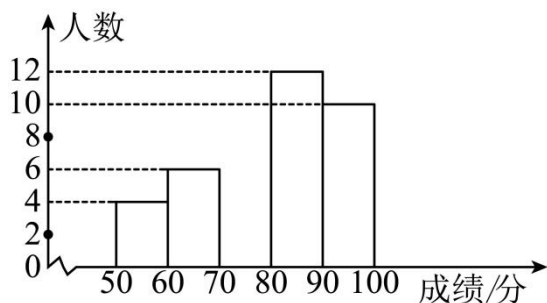
【点睛】 本题考查分式的化简求值，掌握相关运算法则和运算顺序是解决问题的关键.

四、本大题共 2 个小题，每小题 7 分，共 14 分.

20. 某校组织全校 800 名学生开展安全教育，为了解该校学生对安全知识的掌握程度，现随机抽取 40 名学生进行安全知识测试，并将测试成绩（百分制）作为样本数据进行整理、描述和分析，下面给出了部分信息.

①将样本数据分成 5 组: $50 \leq x < 60$, $60 \leq x < 70$, $70 \leq x < 80$, $80 \leq x < 90$, $90 \leq x < 100$, 并制作了如图所示的不完整的频数分布直方图;

②在 $80 \leq x < 90$ 这一组的成绩分别是: 80, 81, 83, 83, 84, 85, 86, 86, 86, 87, 88, 89.



根据以上信息，解答下列问题：

- (1) 补全频数分布直方图；
- (2) 抽取的 40 名学生成绩的中位数是_____；
- (3) 如果测试成绩达到 80 分及以上为优秀，试估计该校 800 名学生中对安全知识掌握程度为优秀的学生约有多少人？

【答案】(1) 见解析 (2) 82

(3) 估计该校 800 名学生中对安全知识掌握程度为优秀的学生约有 440 人.

【解析】

【分析】(1) 根据总人数减去其他组的人数求得 $70 \leq x < 80$ 的人数，即可补全直方图；

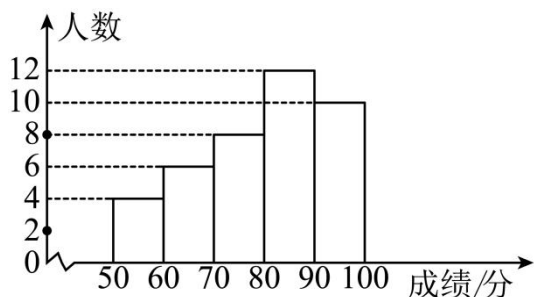
(2) 根据中位数为第 20、21 个数据的平均数，结合直方图或分布表可得；

(3) 用样本估计总体即可得.

【小问 1 详解】

解： $40 - 4 - 6 - 12 - 10 = 8$ (人),

补全的频数分布直方图如下图所示，



【小问 2 详解】

解： $\because 4 + 6 + 8 = 18$,

$\therefore$ 第 20、21 个数为 81、83；

$\therefore$ 抽取的 40 名学生成绩的中位数是 $\frac{1}{2}(81 + 83) = 82$ ；

故答案为：82；

【小问 3 详解】

解：由题意可得： $800 \times \frac{12+10}{40} = 440$ （人），

答：估计该校 800 名学生中对安全知识掌握程度为优秀的学生约有 440 人。

【点睛】本题考查频数分布直方图、中位数，用样本估计总体，解题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，利用数形结合的思想解答。

21. 端午节是中国传统节日，人们有吃粽子的习俗。今年端午节来临之际，某商场预测 A 粽子能够畅销。根据预测，每千克 A 粽子节前的进价比节后多 2 元，节前用 240 元购进 A 粽子的数量比节后用相同金额购进的数量少 4 千克。根据以上信息，解答下列问题：

(1) 该商场节后每千克 A 粽子的进价是多少元？

(2) 如果该商场在节前和节后共购进 A 粽子 400 千克，且总费用不超过 4600 元，并按照节前每千克 20 元，节后每千克 16 元全部售出，那么该商场节前购进多少千克 A 粽子获得利润最大？最大利润是多少？

【答案】(1) 节后每千克 A 粽子的进价为 10 元

(2) 节前购进 300 千克 A 粽子获得利润最大，最大利润为 3000 元

【解析】

【分析】(1) 设节后每千克 A 粽子的进价为 x 元，则每千克 A 粽子节前的进价为 $(x+2)$ 元，根据节前用 240 元购进 A 粽子的数量比节后用相同金额购进的数量少 4 千克，列出方程，解方程即可；

(2) 设该商场节前购进 m 千克 A 粽子，则节后购进 $(400-m)$ 千克 A 粽子，获得的利润为 w 元，根据利润 = 售价 - 进价列出关系式，根据总费用不超过 4600 元，求出 m 的范围，根据一次函数函数增减性，求出最大利润即可。

【小问 1 详解】

解：设节后每千克 A 粽子的进价为 x 元，则每千克 A 粽子节前的进价为 $(x+2)$ 元，根据题意得：

$$\frac{240}{x} - 4 = \frac{240}{x+2},$$

解得： $x_1 = 10$ ， $x_2 = -12$ ，

经检验 $x_1 = 10$ ， $x_2 = -12$ 都是原方程的解，但 $x_2 = -12$ 不符合实际舍去，

答：节后每千克 A 粽子的进价为 10 元。

【小问 2 详解】

解：设该商场节前购进 m 千克 A 粽子，则节后购进 $(400-m)$ 千克 A 粽子，获得的利润为 w 元，根据题意得：

$$w = (20-12)m + (16-10)(400-m) = 2m + 2400,$$

$$\therefore \begin{cases} 12m + 10(400 - m) \leq 4600 \\ m > 0 \end{cases},$$

$$\therefore 0 < m \leq 300,$$

$$\therefore 2 > 0,$$

$\therefore w$ 随 m 的增大而增大,

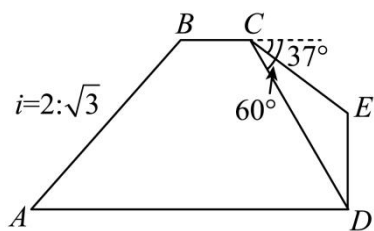
$$\therefore \text{当 } m = 300 \text{ 时, } w \text{ 取最大值, 且最大值为: } w_{\text{最大}} = 2 \times 300 + 2400 = 3000,$$

答: 节前购进 300 千克 A 粽子获得利润最大, 最大利润为 3000 元.

【点睛】本题主要考查了分式方程和一次函数的应用, 解题的关键是根据等量关系列出方程和关系式.

五、本大题共 2 个小题, 每小题 8 分, 共 16 分.

22. 如图, 某数学兴趣小组为了测量古树 DE 的高度, 采用了如下的方法: 先从与古树底端 D 在同一水平线上的点 A 出发, 沿斜面坡度为 $i = 2 : \sqrt{3}$ 的斜坡 AB 前进 $20\sqrt{7}\text{m}$ 到达点 B , 再沿水平方向继续前进一段距离后到达点 C . 在点 C 处测得古树 DE 的顶端 E 的俯角为 37° , 底部 D 的俯角为 60° , 求古树 DE 的高度 (参考数据: $\sin 37^\circ \approx \frac{3}{5}$, $\cos 37^\circ \approx \frac{4}{5}$, $\tan 37^\circ \approx \frac{3}{4}$, 计算结果用根号表示, 不取近似值).



【答案】古树 DE 的高度为 $(40 - 10\sqrt{3})\text{m}$

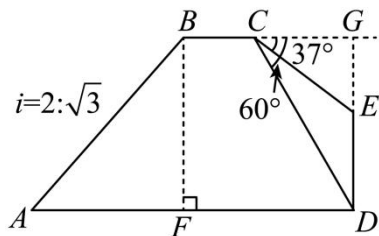
【解析】

【分析】延长 BC , DE 交于点 G , 过点 B 作 $BF \perp AD$ 于点 F , 根据斜面 AB 的坡度为 $i = 2 : \sqrt{3}$, 设 $BF = 2x$, 则 $AF = \sqrt{3}x$, 根据勾股定理得出 $(2x)^2 + (\sqrt{3}x)^2 = (20\sqrt{7})^2$, 求出 $BF = 2 \times 20 = 40(\text{m})$, 证明四边形 $BFDG$ 为矩形, 得出 $DG = BF = 40\text{m}$, 根据三角函数求出

$$CG = \frac{BG}{\tan \angle DCG} = \frac{40}{\tan 60^\circ} = \frac{40}{\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{3}}{3}(\text{m}),$$

$$EG = CG \times \tan \angle ECG = \frac{40\sqrt{3}}{3} \times \tan 37^\circ = \frac{40\sqrt{3}}{3} \times \frac{3}{4} = 10\sqrt{3}(\text{m}), \text{ 最后求出结果即可.}$$

【详解】解: 延长 BC , DE 交于点 G , 过点 B 作 $BF \perp AD$ 于点 F , 如图所示:



则 $\angle AFB = \angle BFD = 90^\circ$,

$\therefore$ 斜面 AB 的坡度为 $i = 2 : \sqrt{3}$,

$\therefore$ 设 $BF = 2x$, 则 $AF = \sqrt{3}x$,

在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中, 根据勾股定理得: $BF^2 + AF^2 = AB^2$,

$$\text{即 } (2x)^2 + (\sqrt{3}x)^2 = (20\sqrt{7})^2,$$

解得: $x = 20$, 负值舍去,

即 $BF = 2 \times 20 = 40(\text{m})$,

$\therefore BC$ 为水平方向, DE 为竖直方向,

$\therefore \angle BGD = 90^\circ$,

$\therefore \angle BFD = \angle FDG = \angle BGD = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $BFDG$ 为矩形,

$\therefore DG = BF = 40\text{m}$,

$\therefore \angle BCG = 60^\circ$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle DCG$ 中, $CG = \frac{BG}{\tan \angle DCG} = \frac{40}{\tan 60^\circ} = \frac{40}{\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{3}}{3}(\text{m})$,

$\therefore \angle ECG = 37^\circ$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ECG$ 中, $EG = CG \times \tan \angle ECG = \frac{40\sqrt{3}}{3} \times \tan 37^\circ = \frac{40\sqrt{3}}{3} \times \frac{3}{4} = 10\sqrt{3}(\text{m})$,

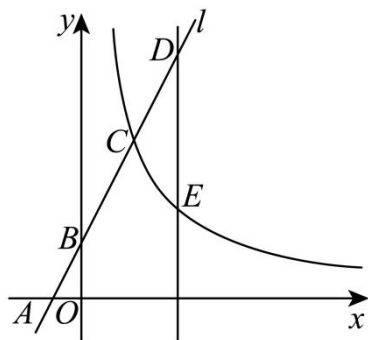
$\therefore DE = DG - EG = (40 - 10\sqrt{3})\text{m}$.

答: 古树 DE 的高度为 $(40 - 10\sqrt{3})\text{m}$.

【点睛】 本题主要考查了解直角三角形的应用, 解题的关键是作出辅助线, 数形结合, 熟练掌握三角函数的定义.

23. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $l: y = kx + 2$ 与 x , y 轴分别相交于点 A , B , 与反比例函数

$y = \frac{m}{x} (x > 0)$ 的图象相交于点 C , 已知 $OA = 1$, 点 C 的横坐标为 2.



(1) 求 k , m 的值;

(2) 平行于 y 轴的动直线与 l 和反比例函数的图象分别交于点 D , E , 若以 B , D , E , O 为顶点的四边形为平行四边形, 求点 D 的坐标.

【答案】(1) $k = 2$, $m = 12$;

(2) 点 D 的坐标为 $(\sqrt{6}, 2\sqrt{6} + 2)$ 或 $(\sqrt{7} - 1, 2\sqrt{7})$

【解析】

【分析】(1) 求得 $A(-1, 0)$, 利用待定系数法即可求得直线的式, 再求得 $C(2, 6)$, 据此即可求解;

(2) 设点 $D(a, 2a + 2)$, 则点 $E(a, \frac{12}{a})$, 利用平行四边形的性质得到 $\left| 2a + 2 - \frac{12}{a} \right| = 2$, 解方程即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because OA = 1$,

$\therefore A(-1, 0)$,

$\because$ 直线 $y = kx + 2$ 经过点 $A(-1, 0)$,

$\therefore 0 = -k + 2$, 解得, $k = 2$,

$\therefore$ 直线的解析式为 $y = 2x + 2$,

$\because$ 点 C 的横坐标为 2,

$\therefore y = 2 \times 2 + 2 = 6$,

$\therefore C(2, 6)$,

$\because$ 反比例函数 $y = \frac{m}{x} (x > 0)$ 的图象经过点 C ,

$\therefore m = 2 \times 6 = 12$;

【小问 2 详解】

解：由（1）得反比例函数的解析式为 $y = \frac{12}{x}$ ，

令 $x = 0$ ，则 $y = 2 \times 0 + 2 = 2$ ，

$\therefore$ 点 $B(0, 2)$ ，

设点 $D(a, 2a + 2)$ ，则点 $E\left(a, \frac{12}{a}\right)$ ，

$\therefore$ 以 B, D, E, O 为顶点的四边形为平行四边形，

$\therefore DE = OB = 2$ ，

$\therefore \left|2a + 2 - \frac{12}{a}\right| = 2$ ，整理得 $2a + 2 - \frac{12}{a} = 2$ 或 $2a + 2 - \frac{12}{a} = -2$ ，

由 $2a + 2 - \frac{12}{a} = 2$ 得 $2a^2 + 2a - 12 = 2a$ ，

整理得 $a^2 = 6$ ，

解得 $a = \pm\sqrt{6}$ ，

$\therefore a > 0$ ，

$\therefore a = \sqrt{6}$ ，

$\therefore$ 点 $D(\sqrt{6}, 2\sqrt{6} + 2)$ ；

由 $2a + 2 - \frac{12}{a} = -2$ 得 $2a^2 + 2a - 12 = -2a$ ，

整理得 $a^2 + 2a - 6 = 0$ ，

解得 $a = \pm\sqrt{7} - 1$ ，

$\therefore a > 0$ ，

$\therefore a = \sqrt{7} - 1$ ，

$\therefore$ 点 $D(\sqrt{7} - 1, 2\sqrt{7})$ ；

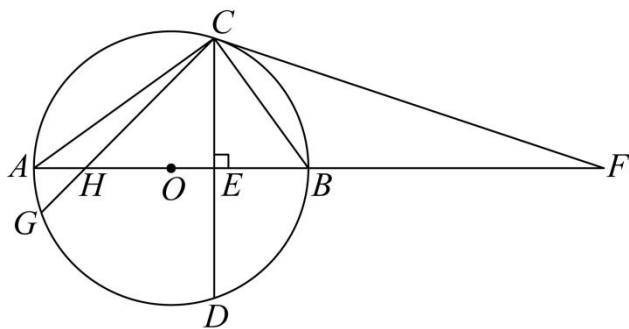
综上，点 D 的坐标为 $(\sqrt{6}, 2\sqrt{6} + 2)$ 或 $(\sqrt{7} - 1, 2\sqrt{7})$ 。

【点睛】此题是反比例函数综合题，主要考查了待定系数法，平行四边形的性质，解一元二次方程，用方程的思想解决问题是解本题的关键。

六、本大题共 2 个小题，每小题 12 分，共 24 分。

24. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， $AB = 2\sqrt{10}$ ， $\odot O$ 的弦 $CD \perp AB$ 于点 E ， $CD = 6$ 。过点 C 作 $\odot O$ 的切

线交 AB 的延长线于点 F ，连接 BC 。



(1) 求证： BC 平分 $\angle DCF$ ；

(2) G 为 $\widehat{AD}$ 上一点，连接 CG 交 AB 于点 H ，若 $CH = 3GH$ ，求 BH 的长。

【答案】 (1) 见解析 (2) $BH = 2 + \sqrt{10}$ 。

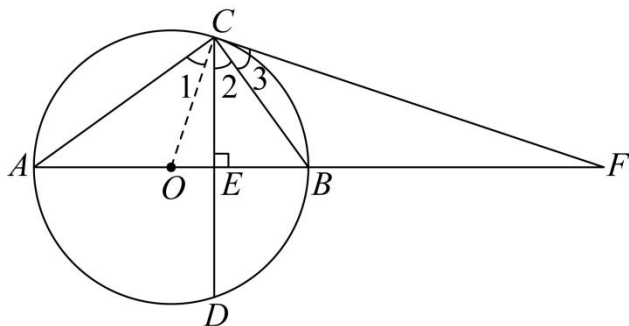
【解析】

【分析】 (1) 利用切线的性质得到 $\angle OCF = 90^\circ$ ，利用圆周角定理得到 $\angle ACB = 90^\circ$ ，利用垂径定理推出 $\widehat{BC} = \widehat{BD}$ ，据此可证明 $\angle A = \angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ ，即可证明 BC 平分 $\angle DCF$ ；

(2) 连接 OC ， OG ，作 $GM \perp AB$ 于点 M ，利用垂径定理求得 $OE = 1$ ，证明 $\triangle GMH \sim \triangle CEH$ ，求得 $GM = 1$ ，设 $MH = x$ ，则 $HE = 3x$ ，在 $\text{Rt}\triangle OGM$ 中，利用勾股定理求得 $x = 1$ ，据此求解即可。

【小问 1 详解】

解：连接 OC ，



$\because CF$ 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore \angle OCF = \angle OCB + \angle 3 = 90^\circ$ ，

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACB = \angle 1 + \angle OCB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 3$ ，

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，且 $CD \perp AB$ ，

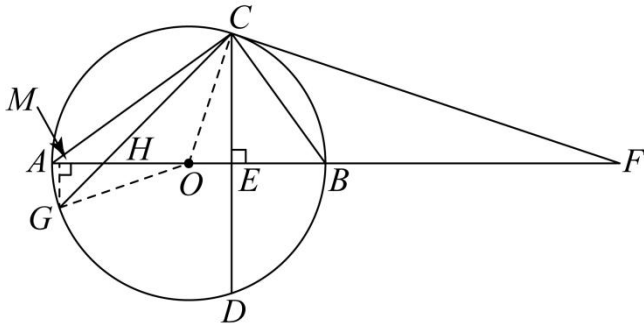
$\therefore \widehat{BC} = \widehat{BD}$ ，

$\therefore \angle A = \angle 2$ ，

$$\begin{aligned} \therefore OA &= OC, \\ \therefore \angle A &= \angle 1, \\ \therefore \angle A &= \angle 1 = \angle 2 = \angle 3, \\ \therefore BC &\text{平分} \angle DCF; \end{aligned}$$

【小问2详解】

解：连接 OC ， OG ，过点 G 作 $GM \perp AB$ 于点 M ，



$$\begin{aligned} \therefore AB &\text{是} \odot O \text{的直径，且} CD \perp AB, \\ \therefore CE &= \frac{1}{2}CD = 3, \quad OC = OG = \frac{1}{2}AB = \sqrt{10}, \\ \therefore OE &= \sqrt{OC^2 - CE^2} = 1, \\ \therefore GM &\perp AB, \quad CD \perp AB, \\ \therefore CE &\parallel GM, \\ \therefore \triangle GMH &\sim \triangle CEH, \\ \therefore \frac{GH}{CH} &= \frac{GM}{CE} = \frac{MH}{HE}, \\ \therefore CH &= 3GH, \\ \therefore \frac{1}{3} &= \frac{GM}{3} = \frac{MH}{HE}, \\ \therefore GM &= 1, \end{aligned}$$

设 $MH = x$ ，则 $HE = 3x$ ，

$$\therefore HO = 3x - 1, \quad OM = 4x - 1,$$

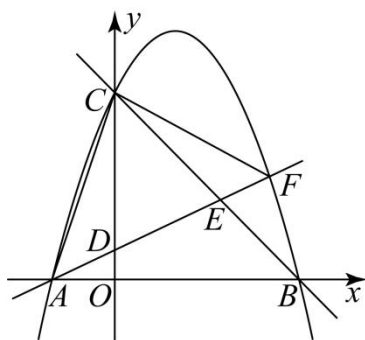
在 $\text{Rt}\triangle OGM$ 中， $OM^2 + GM^2 = OG^2$ ，即 $(4x - 1)^2 + 1^2 = (\sqrt{10})^2$ ，

解得 $x = 1$ (负值已舍去)，

$$\therefore BH = HO + OB = 3 \times 1 - 1 + \sqrt{10} = 2 + \sqrt{10}.$$

【点睛】 本题考查圆的综合应用，熟练掌握同弧或等弧所对的圆周角相等，垂径定理定理，相似三角形的判定及性质，勾股定理，切线的性质是解题的关键.

25. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = ax^2 + 2x + c$ 与坐标轴分别相交于点 A , B , $C(0, 6)$ 三点，其对称轴为 $x = 2$.



- (1) 求该抛物线的解析式；
- (2) 点 F 是该抛物线上位于第一象限的一个动点，直线 AF 分别与 y 轴，直线 BC 交于点 D , E .
- ①当 $CD = CE$ 时，求 CD 的长；
- ②若 $\triangle CAD$, $\triangle CDE$, $\triangle CEF$ 的面积分别为 S_1 , S_2 , S_3 ，且满足 $S_1 + S_3 = 2S_2$ ，求点 F 的坐标.

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

(2) ① $8 - 2\sqrt{2}$ ；② $F(4, 6)$

【解析】

【分析】(1) 根据抛物线对称轴为 $x = 2$ ，可得 $-\frac{2}{2a} = 2$ ，求得 $a = -\frac{1}{2}$ ，再将 $C(0, 6)$ 代入抛物线，根据待定系数法求得 c ，即可解答；

(2) ①求出点 B ，点 A 的坐标，即可得到直线 BC 的解析式为 $y = -x + 6$ ，设 $CD = a$ ，则 $D(0, 6 - a)$ ，求得 AD 的解析式，列方程求出点 E 的坐标，最后根据 $CD = CE$ 列方程，即可求出 CD 的长；

②过 E, F 分别作 AB 的垂线段，交 AB 于点 G, H ，过点 D 作 EG 的垂线段，交 EG 于点 I ，根据 $S_1 + S_3 = 2S_2$ ，可得 $AD + EF = 2DE$ ，即 $\frac{DE}{AF} = \frac{1}{3}$ ，证明 $\triangle DEI \sim \triangle AFB$ ，设 $F\left(h, -\frac{1}{2}h^2 + 2h + 6\right)$ ，得到直线 AF 的解析式，求出点 D 的坐标，即可得到点 E 的坐标，将点 E 的坐标代入 $y = -x + 6$ 解方程，即可解答.

【小问 1 详解】

解：根据抛物线的对称轴为 $x = 2$ ，

可得 $-\frac{2}{2a} = 2$ ，解得 $a = -\frac{1}{2}$ ，

将 $C(0, 6)$ 代入抛物线可得 $6 = c$ ，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$;

【小问 2 详解】

解：当 $y = 0$ 时，可得 $0 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ ，解得 $x_1 = 6$ ， $x_2 = -2$ ，

$\therefore A(-2, 0)$ ， $B(6, 0)$ ，

设 CB 的解析式为 $y = kx + b$ ，将 $C(0, 6)$ ， $B(6, 0)$ 代入 $y = kx + b$ ，

可得 $\begin{cases} 6 = b \\ 0 = 6k + b \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} k = -1 \\ b = 6 \end{cases}$ ，

$\therefore CB$ 的解析式为 $y = -x + 6$ ，

设 $CD = a$ ，则 $D(0, 6 - a)$ ，

设 AD 的解析式为 $y = k_1x + b_1$ ，将 $D(0, 6 - a)$ ， $A(-2, 0)$ 代入 $y = k_1x + b_1$ ，

可得 $\begin{cases} 6 - a = b_1 \\ 0 = -2k_1 + b_1 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} k_1 = \frac{6 - a}{2} \\ b_1 = 6 - a \end{cases}$ ，

$\therefore AB$ 的解析式为 $y = \frac{6 - a}{2}x + 6 - a$ ，

联立方程 $\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = \frac{6 - a}{2}x + 6 - a \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x = \frac{2a}{8 - a} \\ y = \frac{48 - 8a}{8 - a} \end{cases}$ ，

根据 $CD = CE$ ，可得 $a = \sqrt{\left(\frac{2a}{8 - a}\right)^2 + \left(\frac{48 - 8a}{8 - a} - 6\right)^2}$ ，

解得 $a_1 = 8 - 2\sqrt{2}$ ， $a_2 = 8 + 2\sqrt{2}$ ，

经检验， $a_1 = 8 - 2\sqrt{2}$ ， $a_2 = 8 + 2\sqrt{2}$ 是方程的解，

$\therefore$ 点 F 是该抛物线上位于第一象限的一个动点，

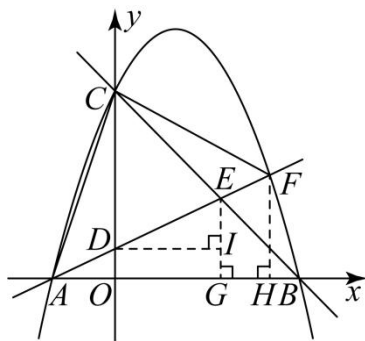
$\therefore D$ 在 y 轴正半轴，

$\therefore a < 6$ ，

$\therefore a = 8 - 2\sqrt{2}$

即 CD 的长为 $8 - 2\sqrt{2}$ ；

②解：如图，过 E, F 分别作 AB 的垂线段，交 AB 于点 G, H ，过点 D 作 EG 的垂线段，交 EG 于点 I ，



$$\because S_1 + S_3 = 2S_2,$$

$$\therefore AD + EF = 2DE,$$

$$\therefore \frac{DE}{AF} = \frac{1}{3},$$

$$\text{设 } F\left(h, -\frac{1}{2}h^2 + 2h + 6\right), \text{ 则 } AH = h + 2,$$

$$\because EG \perp AB, FH \perp AB,$$

$$\therefore EG \parallel FH,$$

$$\therefore \angle DEI = \angle AFB,$$

$$\because DI \perp EG,$$

$$\therefore \angle DIE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle DEI \sim \triangle AFB,$$

$$\therefore DI = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}h + \frac{2}{3}, \text{ 即点 } D \text{ 的横坐标为 } \frac{1}{3}h + \frac{2}{3},$$

$$EI = \frac{1}{3}FH = -\frac{1}{6}h^2 + \frac{2}{3}h + 2,$$

$$\text{设 } AF \text{ 的解析式为 } y = k_2x + b_2, \text{ 将 } A(-2, 0), F\left(h, -\frac{1}{2}h^2 + 2h + 6\right),$$

$$\text{代入可得 } \begin{cases} 0 = -2k_2 + b_2 \\ -\frac{1}{2}h^2 + 2h + 6 = k_2h + b_2 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k_2 = -\frac{1}{2}h + 3 \\ b_2 = -h + 6 \end{cases},$$

$$\therefore AF \text{ 的解析式为 } y = \left(-\frac{1}{2}h + 3\right)x - h + 6,$$

$$\therefore D(0, -h + 6), \text{ 即 } DO = -h + 6,$$

$$\because \angle DOG = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $DOGI$ 是矩形,

$$\therefore IG = DO = -h + 6,$$

$$\therefore EG = EI + IG = -\frac{1}{6}h^2 - \frac{1}{3}h + 8, \text{ 即 } E\left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{3}, -\frac{1}{6}h^2 - \frac{1}{3}h + 8\right),$$

$$\text{将 } E\left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{3}, -\frac{1}{6}h^2 - \frac{1}{3}h + 8\right) \text{ 代入 } y = -x + 6,$$

$$\text{可得 } -\frac{1}{6}h^2 - \frac{1}{3}h + 8 = -\frac{1}{3}h - \frac{2}{3} + 6,$$

$$\text{解得 } h_1 = 4, \quad h_2 = -4 < 0 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore F(4, 6).$$

【点睛】 本题为二次函数综合题，考查了待定系数法求二次函数和一次函数，二次函数与一元二次方程，两点之间的距离，相似三角形的判定与性质，正确的作出辅助线是解题的关键.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】