

2023 年四川省成都市数学中考真题

A 卷 (共 100 分)

第 I 卷 (选择题, 共 32 分)

一、选择题 (本大题共 8 个小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 每小题均有四个选项, 其中只有一项符合题目要求)

1. 在 3 , -7 , 0 , $\frac{1}{9}$ 四个数中, 最大的数是 ()

- A. 3 B. -7 C. 0 D. $\frac{1}{9}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据有理数大小比较的法则: ①正数都大于 0; ②负数都小于 0; ③正数大于一切负数; ④两个负数, 绝对值大的其值反而小, 据此判断即可.

【详解】解: 根据有理数比较大小的方法, 可得

$$-7 < 0 < \frac{1}{9} < 3,$$

$\therefore$ 最大的数是: 3;

故选: A.

【点睛】此题主要考查了有理数大小比较的方法, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: ①正数都大于 0; ②负数都小于 0; ③正数大于一切负数; ④两个负数, 绝对值大的其值反而小.

2. 2023 年 5 月 17 日 10 时 49 分, 我国在西昌卫星发射中心成功发射第五十六颗北斗导航卫星. 北斗系统作为国家重要基础设施, 深刻改变着人们的生产生活方式. 目前, 某地图软件调用的北斗卫星日定位量超 3000 亿次. 将数据 3000 亿用科学记数法表示为 ()

- A. 3×10^8 B. 3×10^9 C. 3×10^{10} D. 3×10^{11}

【答案】D

【解析】

【分析】用科学记数法表示较大的数时, 一般形式为 $a \times 10^n$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数.

【详解】解: $3000 \text{ 亿} = 300000000000 = 3 \times 10^{11}$.

故选: D.

【点睛】本题考查了科学记数法, 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原来的数, 变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当

原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数，确定 a 与 n 的值是解题的关键.

3. 下列计算正确的是 ()

A. $(-3x)^2 = -9x^2$

B. $7x + 5x = 12x^2$

C. $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

D. $(x-2y)(x+2y) = x^2 + 4y^2$

【答案】C

【解析】

【分析】分别根据积的乘方、合并同类项、乘法公式逐项求解判断即可.

【详解】解：A、 $(-3x)^2 = 9x^2$ ，故原计算错误，不符合题意；

B、 $7x + 5x = 12x$ ，故原计算错误，不符合题意；

C、 $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ ，故原计算正确，符合题意；

D、 $(x-2y)(x+2y) = x^2 - 4y^2$ ，故原计算错误，不符合题意，

故选：C.

【点睛】本题考查积的乘方、合并同类项、乘法公式，熟记完全平方公式和平方差公式，正确判断是解答的关键.

4. 近年来，随着环境治理的不断深入，成都已构建起“青山绿道蓝网”生态格局. 如今空气质量越来越好，杜甫那句“窗含西岭千秋雪”已成为市民阳台外一道靓丽的风景. 下面是成都市今年三月份某五天的空气质量指数 (AQI)：33，27，34，40，26，则这组数据的中位数是 ()

A. 26

B. 27

C. 33

D. 34

【答案】C

【解析】

【分析】将这组数据从小到大重新排列，再根据中位数的定义求解即可.

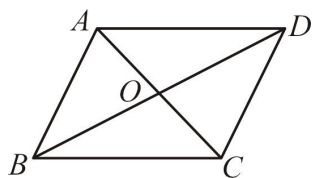
【详解】将这组数据从小到大重新排列为26，27，33，34，40

$\therefore$ 这组数据的中位数为33，

故选：C.

【点睛】本题主要考查中位数，将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数. 如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

5. 如图，在 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，则下列结论一定正确的是 ()



- A. $AC = BD$ B. $OA = OC$ C. $AC \perp BD$ D. $\angle ADC = \angle BCD$

【答案】B

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质逐项分析判断即可求解.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O ,

- A. $AC = BD$, 不一定成立, 故该选项不正确, 不符合题意;
B. $OA = OC$, 故该选项正确, 符合题意;
C. $AC \perp BD$, 不一定成立, 故该选项不正确, 不符合题意;
D. $\angle ADC = \angle BCD$, 不一定成立, 故该选项不正确, 不符合题意;

故选: B.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质, 熟练掌握平行四边形的性质是解题的关键.

6. 为贯彻教育部《大中小学劳动教育指导纲要(试行)》文件精神, 某学校积极开设种植类劳动教育课. 某班决定每位学生随机抽取一张卡片来确定自己的种植项目, 老师提供 6 张背面完全相同的卡片, 其中蔬菜类有 4 张, 正面分别印有白菜、辣椒、豇豆、茄子图案; 水果类有 2 张, 正面分别印有草莓、西瓜图案, 每个图案对应该种植项目. 把这 6 张卡片背面朝上洗匀, 小明随机抽取一张, 他恰好抽中水果类卡片的概率是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据概率公式求解即可.

【详解】解: 由题意, 随机抽取一张, 共有 6 种等可能的结果, 其中恰好抽中水果类卡片的有 2 种,

$\therefore$ 小明随机抽取一张, 他恰好抽中水果类卡片的概率是 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,

故选: B.

【点睛】本题考查求简单事件的概率, 关键是熟知求概率公式: 所求情况数与总情况数之比.

7. 《孙子算经》是中国古代重要的数学著作, 是《算经十书》之一. 书中记载了这样一个题目: 今有木, 不知长短. 引绳度之, 余绳四尺五寸; 屈绳量之, 不足一尺. 木长几何? 其大意是: 用一根绳子去量一根长木, 绳子还剩余 4.5 尺; 将绳子对折再量长木, 长木还剩余 1 尺. 问木长多少尺? 设木长 x 尺, 则可列方

程为 ()

A. $\frac{1}{2}(x+4.5)=x-1$

B. $\frac{1}{2}(x+4.5)=x+1$

C. $\frac{1}{2}(x+1)=x-4.5$

D. $\frac{1}{2}(x-1)=x+4.5$

【答案】A

【解析】

【分析】设木长 x 尺，根据题意“用一根绳子去量一根长木，绳子还剩余 4.5 尺；将绳子对折再量长木，长木还剩余 1 尺”，列出一元一次方程即可求解.

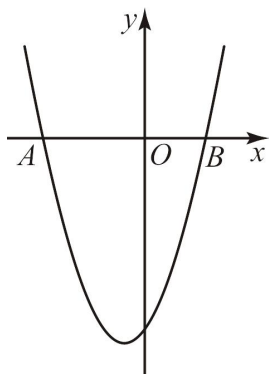
【详解】解：设木长 x 尺，根据题意得，

$$\frac{1}{2}(x+4.5)=x-1,$$

故选：A

【点睛】本题考查了一元一次方程的应用，根据题意列出方程是解题的关键.

8. 如图，二次函数 $y=ax^2+x-6$ 的图象与 x 轴交于 $A(-3,0)$ ， B 两点，下列说法正确的是 ()



A. 抛物线的对称轴为直线 $x=1$

B. 抛物线的顶点坐标为 $\left(-\frac{1}{2}, -6\right)$

C. A ， B 两点之间的距离为 5

D. 当 $x < -1$ 时， y 的值随 x 值的增大而增大

【答案】C

【解析】

【分析】待定系数法求得二次函数解析式，进而逐项分析判断即可求解.

【详解】解： $\because$ 二次函数 $y=ax^2+x-6$ 的图象与 x 轴交于 $A(-3,0)$ ， B 两点，

$$\therefore 0=9a-3-6$$

$$\therefore a=1$$

$$\therefore \text{二次函数解析式为 } y=x^2+x-6=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}, \text{ 对称轴为直线 } x=-\frac{1}{2}, \text{ 顶点坐标为 } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right),$$

故 A, B 选项不正确, 不符合题意;

$\because a=1>0$, 抛物线开口向上, 当 $x<-1$ 时, y 的值随 x 值的增大而减小, 故 D 选项不正确, 不符合题意;

当 $y=0$ 时, $x^2+x-6=0$

即 $x_1=-3, x_2=2$

$\therefore B(2,0)$,

$\therefore AB=5$, 故 C 选项正确, 符合题意;

故选: C.

【点睛】本题考查了二次函数的性质, 待定系数法求二次函数解析式, 抛物线与坐标轴的交点, 熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

第 II 卷 (非选择题, 共 68 分)

二、填空题 (本大题共 5 个小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

9. 因式分解: $m^2-3m=$ _____.

【答案】 $m(m-3)$

【解析】

【分析】题中二项式中各项都含有公因式 m , 利用提公因式法因式分解即可得到答案.

【详解】解: $m^2-3m=m(m-3)$,

故答案为: $m(m-3)$.

【点睛】本题考查整式运算中的因式分解, 熟练掌握因式分解的方法技巧是解决问题的关键.

10. 若点 $A(-3, y_1), B(-1, y_2)$ 都在反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象上, 则 y_1 _____ y_2 (填 “ $>$ ” 或 “ $<$ ”).

【答案】 $>$

【解析】

【分析】根据题意求得 y_1, y_2 , 进而即可求解.

【详解】解: $\because$ 点 $A(-3, y_1), B(-1, y_2)$ 都在反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象上,

$\therefore y_1=\frac{6}{-3}=-2, y_2=\frac{6}{-1}=-6,$

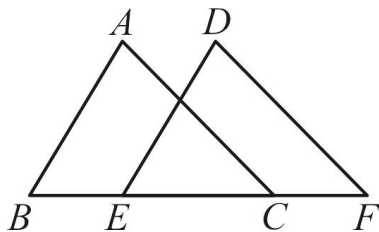
$\therefore -2>-6,$

$\therefore y_1>y_2,$

故答案为：>.

【点睛】本题考查了比较反比例函数值，熟练掌握反比例函数的性质是解题的关键.

11. 如图，已知 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，点 B, E, C, F 依次在同一条直线上. 若 $BC = 8$ ， $CE = 5$ ，则 CF 的长为_____.



【答案】3

【解析】

【分析】利用平移性质求解即可.

【详解】解：由平移性质得： $EF = BC = 8$ ，

$\therefore CF = EF - CE = 8 - 5 = 3$ ，

故答案为：3.

【点睛】本题考查平移性质，熟练掌握平移性质是解答的关键.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $P(5, -1)$ 关于 y 轴对称的点的坐标是_____.

【答案】 $(-5, -1)$

【解析】

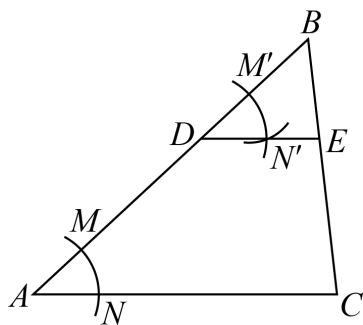
【分析】根据关于 y 轴对称的点，纵坐标相同，横坐标互为相反进行求解即可.

【详解】解：在平面直角坐标系 xOy 中，点 $P(5, -1)$ 关于 y 轴对称的点的坐标是 $(-5, -1)$ ，

故答案为： $(-5, -1)$.

【点睛】本题主要考查了坐标与图形变化—轴对称，解决本题的关键是掌握关于 y 轴对称的点，纵坐标相同，横坐标互为相反数.

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是边 AB 上一点，按以下步骤作图：①以点 A 为圆心，以适当长为半径作弧，分别交 AB ， AC 于点 M ， N ；②以点 D 为圆心，以 AM 长为半径作弧，交 DB 于点 M' ；③以点 M' 为圆心，以 MN 长为半径作弧，在 $\angle BAC$ 内部交前面的弧于点 N' ；④过点 N' 作射线 DN' 交 BC 于点 E . 若 $\triangle BDE$ 与四边形 $ACED$ 的面积比为 $4:21$ ，则 $\frac{BE}{CE}$ 的值为_____.



【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】根据作图可得 $\angle BDE = \angle A$ ，然后得出 $DE \parallel AC$ ，可证明 $\triangle BDE \sim \triangle BAC$ ，进而根据相似三角形的性质即可求解.

【详解】解：根据作图可得 $\angle BDE = \angle A$ ，

$\therefore DE \parallel AC$ ，

$\therefore \triangle BDE \sim \triangle BAC$ ，

$\therefore \triangle BDE$ 与四边形 $ACED$ 的面积比为 $4:21$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{4}{21+4} = \left(\frac{BE}{BC}\right)^2$$

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \frac{BE}{CE} = \frac{2}{3},$$

故答案为： $\frac{2}{3}$.

【点睛】本题考查了作一个角等于已知角，相似三角形的性质与判定，熟练掌握基本作图与相似三角形的性质与判定是解题的关键.

三、解答题（本大题共 5 个小题，共 48 分）

14. （1）计算： $\sqrt{4} + 2\sin 45^\circ - (\pi - 3)^0 + |\sqrt{2} - 2|$.

$$(2) \text{ 解不等式组: } \begin{cases} 2(x+2) - x \leq 5 & \text{①} \\ \frac{4x+1}{3} > x-1 & \text{②} \end{cases}$$

【答案】 (1) 3; (2) $-4 < x \leq 1$

【解析】

【分析】(1) 先计算算术平方根、特殊角的三角函数值、零指数幂和绝对值，再加减运算即可求解；

(2) 先求得每个不等式的解集，再求得它们的公共部分即可求解；

【详解】解：(1) $\sqrt{4} + 2\sin 45^\circ - (\pi - 3)^0 + |\sqrt{2} - 2|$

$$= 2 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + 2 - \sqrt{2}$$

$$= 3 + \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$= 3;$$

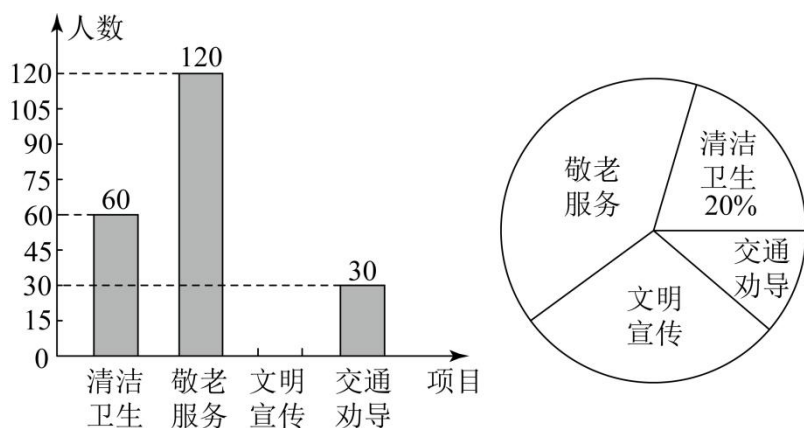
(2) 解不等式①，得 $x \leq 1$ ，

解不等式②，得 $x > -4$ ，

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-4 < x \leq 1$ 。

【点睛】本题主要考查实数的混合运算和解一元一次不等式组，涉及到特殊角的三角函数值、零指数幂、绝对值、二次根式的加减等知识，熟练掌握相关运算法则并正确求解是解答的关键。

15. 文明是一座城市的名片，更是一座城市的底蕴。成都市某学校于细微处着眼，于贴心处落地，积极组织师生参加“创建全国文明典范城市志愿者服务”活动，其服务项目有“清洁卫生”“敬老服务”“文明宣传”“交通劝导”，每名参加志愿者服务的师生只参加其中一项。为了解各项目参与情况，该校随机调查了参加志愿者服务的部分师生，将调查结果绘制成如下两幅不完整的统计图。



根据统计图信息，解答下列问题：

- (1) 本次调查的师生共有_____人，请补全条形统计图；
- (2) 在扇形统计图中，求“敬老服务”对应的圆心角度数；
- (3) 该校共有 1500 名师生，若有 80% 的师生参加志愿者服务，请你估计参加“文明宣传”项目的师生人数。

【答案】(1) 300，图见解析；

(2) 144° ；

(3) 360 人；

【解析】

【分析】(1) 根据“清洁卫生”的人数除以占比即可得出样本的容量，进而求“文明宣传”的人数，补全统计图；

(2) 根据“敬老服务”的占比乘以 360° 即可求解；

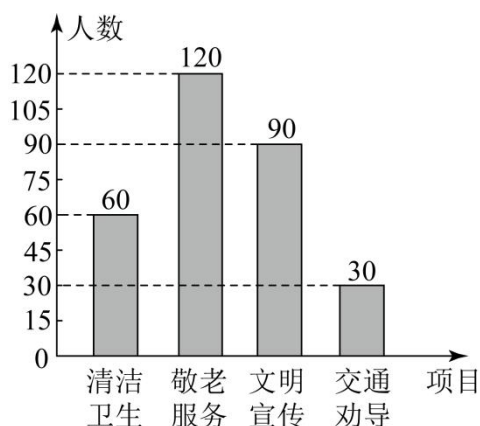
(3) 用样本估计总体，用1500乘以80%再乘以“文明宣传”的比即可求解.

【小问1详解】

解：依题意，本次调查的师生共有 $60 \div 20\% = 300$ 人，

$\therefore$ “文明宣传”的人数为 $300 - 60 - 120 - 30 = 90$ (人)

补全统计图，如图所示，



故答案为：300.

【小问2详解】

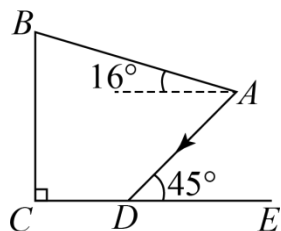
在扇形统计图中，求“敬老服务”对应的圆心角度数为 $\frac{120}{300} \times 360^\circ = 144^\circ$ ，

【小问3详解】

估计参加“文明宣传”项目的师生人数为 $1500 \times 80\% \times \frac{90}{300} = 360$ (人).

【点睛】本题主要考查了条形统计图和扇形统计图的综合运用，样本估计总体，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

16. 为建设美好公园社区，增强民众生活幸福感，某社区服务中心在文化活动室墙外安装遮阳篷，便于社区居民休憩. 如图，在侧面示意图中，遮阳篷 AB 长为5米，与水平面的夹角为 16° ，且靠墙端离地高 BC 为4米，当太阳光线 AD 与地面 CE 的夹角为 45° 时，求阴影 CD 的长. (结果精确到0.1米；参考数据： $\sin 16^\circ \approx 0.28, \cos 16^\circ \approx 0.96, \tan 16^\circ \approx 0.29$)

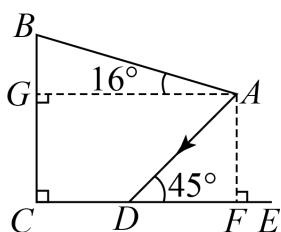


【答案】 2.2 米

【解析】

【分析】 过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G ， $AF \perp CE$ 于点 F ，则四边形 $AFCG$ 是矩形，在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 中，求得 BG, AG ，进而求得 CG, AF, DF ，根据 $CD = CF - DF$ ，即可求解。

【详解】 解：如图所示，过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G ， $AF \perp CE$ 于点 F ，则四边形 $AFCG$ 是矩形，



依题意， $\angle BAG = 16^\circ$ ， $AB = 5$ （米）

在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 中， $GB = AB \times \sin \angle BAG = 5 \times \sin 16^\circ \approx 5 \times 0.28 = 1.4$ （米），

$AG = AB \times \cos 16^\circ \approx 5 \times 0.96 = 4.8$ （米），则 $CF = AG = 4.8$ （米）

$\therefore BC = 4$ （米）

$\therefore AF = CG = BC - BG = 4 - 1.4 = 2.6$ （米）

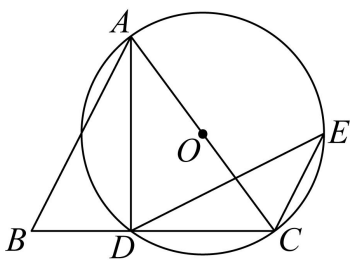
$\therefore \angle ADF = 45^\circ$ ，

$\therefore DF = AF = 2.6$ （米）

$\therefore CD = CF - DF = 4.8 - 2.6 = 2.2$ （米）。

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用，添加辅助线构造直角三角形是解题的关键。

17. 如图，以 $\triangle ABC$ 的边 AC 为直径作 $\odot O$ ，交 BC 边于点 D ，过点 C 作 $CE \parallel AB$ 交 $\odot O$ 于点 E ，连接 AD ， DE ， $\angle B = \angle ADE$ 。



(1) 求证： $AC = BC$ ；

(2) 若 $\tan B = 2$ ， $CD = 3$ ，求 AB 和 DE 的长。

【答案】(1) 见解析 (2) $AB = 2\sqrt{5}$, $DE = 2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) 根据 $CE \parallel AB$, 得到 $\angle ACE = \angle BAC$, 再根据同弦所对的圆周角相等, 得到 $\angle ACE = \angle ADE = \angle B$, 可证明 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 即可解答;

(2) 根据直径所对的圆周角为直角, 得到 $\tan B = 2 = \frac{AD}{BD}$, 设 $BD = x$, 根据勾股定理列方程, 解得 x 的值, 即可求出 AB ; 过点 E 作 DC 的垂线段, 交 DC 的延长线于点 F , 证明 $\angle B = \angle ECF$, 求出 EF, DF 的长, 根据勾股定理即可解出 DE 的长.

【小问1详解】

证明: $\because CE \parallel AB$,

$$\therefore \angle BAC = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACE = \angle ADE,$$

$$\therefore \widehat{CB} = \widehat{ADE},$$

$$\therefore \angle B = \angle BAC,$$

$$\therefore AC = BC;$$

【小问2详解】

解: 设 $BD = x$,

$\because AC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ADC = \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\because \tan B = 2,$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = 2, \text{ 即 } AD = 2x,$$

根据 (1) 中的结论, 可得 $AC = BC = BD + DC = x + 3$,

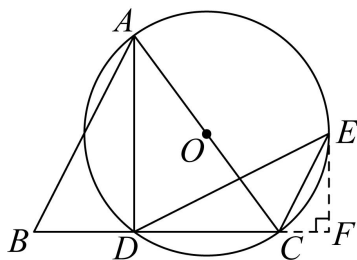
根据勾股定理, 可得 $AD^2 + DC^2 = AC^2$, 即 $(2x)^2 + 3^2 = (x + 3)^2$,

解得 $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ (舍去),

$$\therefore BD = 2, AD = 4,$$

根据勾股定理, 可得 $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 2\sqrt{5}$;

如图, 过点 E 作 DC 的垂线段, 交 DC 的延长线于点 F ,



$$\because CB = CA,$$

$$\therefore \angle ACB = 180^\circ - 2\angle B,$$

(1) 中已证明 $\angle B = \angle ACE$,

$$\therefore \angle ECF = 180^\circ - \angle ACB - \angle ACE = \angle B,$$

$$\because EF \perp CF,$$

$$\therefore \tan \angle ECF = \tan \angle B = 2, \text{ 即 } \frac{EF}{CF} = 2,$$

$$\because \angle B + \angle BAD = 90^\circ, \angle ADE + \angle EDF = 90^\circ, \angle B = \angle ADE,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle EDF,$$

$$\therefore \angle DEF = 90^\circ - \angle EDF = 90^\circ - \angle BAD = \angle B,$$

$$\therefore \frac{DF}{EF} = 2,$$

$$\text{设 } CF = a, \text{ 则 } DF = DC + CF = a + 3,$$

$$\therefore EF = 2a,$$

$$\text{可得方程 } \frac{a+3}{2a} = 2, \text{ 解得 } a = 1,$$

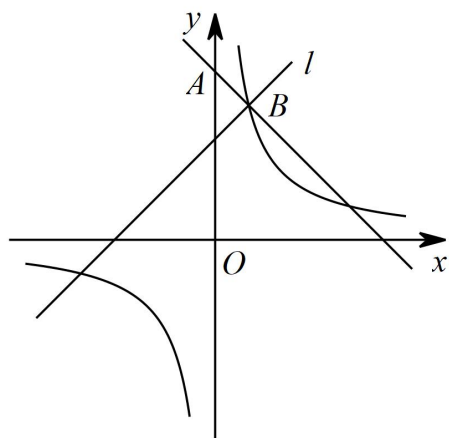
$$\therefore EF = 2, DF = 4,$$

$$\text{根据勾股定理, 可得 } DE = \sqrt{DF^2 + EF^2} = 2\sqrt{5}.$$

【点睛】 本题考查了圆周角定理，等腰三角形的判定和性质，平行线的性质，勾股定理，正切的概念，利用等量代换证明相关角相等是解题的关键.

18. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = -x + 5$ 与 y 轴交于点 A ，与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象的一个

交点为 $B(a, 4)$ ，过点 B 作 AB 的垂线 l .



- (1) 求点 A 的坐标及反比例函数的表达式；
- (2) 若点 C 在直线 l 上，且 $\triangle ABC$ 的面积为 5，求点 C 的坐标；
- (3) P 是直线 l 上一点，连接 PA ，以 P 为位似中心画 $\triangle PDE$ ，使它与 $\triangle PAB$ 位似，相似比为 m 。若点 D ， E 恰好都落在反比例函数图象上，求点 P 的坐标及 m 的值。

【答案】(1) 点 A 的坐标为 $(0, 5)$ ，反比例函数的表达式为 $y = \frac{4}{x}$ ；

(2) 点 C 的坐标为 $(6, 9)$ 或 $(-4, -1)$

(3) 点 P 的坐标为 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{11}{4}\right)$ ； m 的值为 3

【解析】

【分析】(1) 利用直线 $y = -x + 5$ 解析式可得的点 C 的坐标，将点 $B(a, 4)$ 代入 $y = -x + 5$ 可得 a 的值，再将点 B 代入反比例函数解析式可得 k 的值，从而得解；

(2) 设直线 l 于 y 轴交于点 M ，由点 B 的坐标和直线 l 是 AB 的垂线先求出点 M 的坐标，再用待定系数法求直线 l 的解析式 $y = x + 3$ ， C 点坐标为 $(t, t + 3)$ ，根据 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AM \cdot |x_B - x_C| = 5$ (x_B, x_C 分别代表点 B 与点 C 的横坐标)可得点 C 的横坐标，从而得解；

(3) 位似图形的对应点与位似中心三点共线可知点 B 的对应点也在直线 l 上，不妨设为点 E ，则点 A 的对应点是点 D ，直线 l 与双曲线的解析式联立方程组得到 $E(-4, -1)$ ，由 $\triangle PAB \sim \triangle PDE$ 得到 $AB \parallel DE$ ，继而得到直线 AB 与直线 DE 的解析式中的一次项系数相等，设直线 DE 的解析式是： $y = -x + b_2$ ，将 $E(-4, -1)$ 代入 $y = -x + b_2$ 求得 DE 的解析式是： $y = -x - 5$ ，再将直线 DE 与双曲线的解析式联立求得 $D(-1, -4)$ ，再用待定系数法求出 AD 的解析式是 $y = 9x + 5$ ，利用直线 AD 的解析式与直线 l 的解析式联

立求得点 P 的坐标为 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{11}{4}\right)$ ，再用两点间的距离公式得到 $BP = \frac{5}{4}\sqrt{2}$ ， $EP = \frac{15}{4}\sqrt{2}$ 从而求得

$$m = \frac{EP}{BP} = 3.$$

【小问 1 详解】

解：令 $x = 0$ ，则 $y = -x + 5 = 5$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(0, 5)$ ，

将点 $B(a, 4)$ 代入 $y = -x + 5$ 得： $4 = -a + 5$

解得： $a = 1$

$\therefore B(1, 4)$

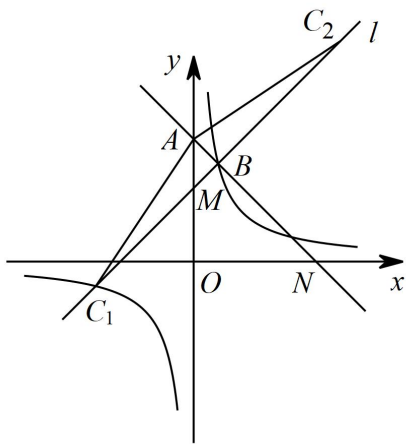
将点 $B(1, 4)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得： $4 = \frac{k}{1}$

解得： $k = 4$

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y = \frac{4}{x}$ ；

【小问 2 详解】

解：设直线 l 于 y 轴交于点 M ，直线 $y = -x + 5$ 与 x 轴得交点为 N ，



令 $y = -x + 5 = 0$ 解得： $x = 5$

$\therefore N(5, 0)$ ，

$\therefore OA = ON = 5$ ，

又 $\because \angle AON = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle OAN = 45^\circ$$

$$\therefore A(0,5), B(1,4)$$

$$\therefore AB = \sqrt{(1-0)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{2}$$

又 $\because$ 直线 l 是 AB 的垂线即 $\angle ABM = 90^\circ$, $\angle OAN = 45^\circ$,

$$\therefore AB = BM = \sqrt{2}, AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = 2$$

$$\therefore M(0,3)$$

设直线 l 得解析式是: $y = k_1x + b_1$,

$$\text{将点 } M(0,3), \text{ 点 } B(1,4) \text{ 代入 } y = k_1x + b_1 \text{ 得: } \begin{cases} k_1 + b_1 = 4 \\ b_1 = 3 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k_1 = 4 \\ b_1 = 3 \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的解析式是: } y = x + 3,$$

设点 C 的坐标是 $(t, t+3)$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot |x_B - x_C| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |1 - t| = 5, \quad (x_B, x_C \text{ 分别代表点 } B \text{ 与点 } C \text{ 的横坐标})$$

解得: $t = -4$ 或 6 ,

当 $t = -4$ 时, $t + 3 = -1$;

当 $t = 6$ 时, $t + 3 = 9$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(6,9)$ 或 $(-4,-1)$

【小问 3 详解】

$\because$ 位似图形的对应点与位似中心三点共线,

$\therefore$ 点 B 的对应点也在直线 l 上, 不妨设为点 E , 则点 A 的对应点是点 D ,

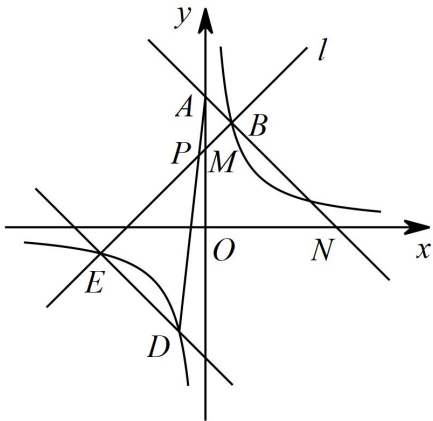
$\therefore$ 点 E 是直线 l 与双曲线 $y = \frac{4}{x}$ 的另一个交点,

$$\text{将直线 } l \text{ 与双曲线的解析式联立得: } \begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ y = x + 3 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\therefore E(-4, -1)$$

画出图形如下：



$$\text{又} \because \triangle PAB \sim \triangle PDE$$

$$\therefore \angle PAB = \angle PDE$$

$$\therefore AB \parallel DE$$

$\therefore$ 直线 AB 与直线 DE 的解析式中的一次项系数相等，

设直线 DE 的解析式是： $y = -x + b_2$

将点 $E(-4, -1)$ 代入 $y = -x + b_2$ 得： $-1 = -(-4) + b_2$

$$\text{解得： } b_2 = -5$$

$$\therefore \text{直线 } DE \text{ 的解析式是： } y = -x - 5$$

$\therefore$ 点 D 也在双曲线 $y = \frac{4}{x}$ 上，

$\therefore$ 点 D 是直线 DE 与双曲线 $y = \frac{4}{x}$ 的另一个交点，

$$\text{将直线 } DE \text{ 与双曲线的解析式联立得： } \begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ y = -x - 5 \end{cases}$$

$$\text{解得： } \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\therefore D(-1, -4)$$

设直线 AD 的解析式是： $y = k_3x + b_3$

将点 $A(0, 5)$, $D(-1, -4)$ 代入 $y = k_3x + b_3$ 得:
$$\begin{cases} -k_3 + b_3 = -4 \\ b_3 = 5 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} k_1 = 9 \\ b_1 = 5 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AD 的解析式是: $y = 9x + 5$,

又将直线 AD 的解析式与直线 l 的解析式联立得:
$$\begin{cases} y = 9x + 5 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = \frac{11}{4} \end{cases}$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{11}{4}\right)$

$$\therefore BP = \sqrt{\left(-\frac{1}{4} - 1\right)^2 + \left(\frac{11}{4} - 4\right)^2} = \frac{5}{4}\sqrt{2}$$

$$EP = \sqrt{\left[-\frac{1}{4} - (-4)\right]^2 + \left[\frac{11}{4} - (-1)\right]^2} = \frac{15}{4}\sqrt{2}$$

$$\therefore m = \frac{EP}{BP} = 3$$

【点睛】本题考查直线与坐标轴的交点，求反比例函数解析式，反比例函数的图象与性质，反比例函数综合-几何问题，三角形的面积公式，位似的性质等知识，综合性大，利用联立方程组求交点和掌握位似的性质是解题的关键.

B 卷 (共 50 分)

一、填空题 (本大题共 5 个小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

19. 若 $3ab - 3b^2 - 2 = 0$, 则代数式 $\left(1 - \frac{2ab - b^2}{a^2}\right) \div \frac{a - b}{a^2b}$, 的值为_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】根据分式的化简法则，将代数式化简可得 $ab - b^2$ ，再将 $3ab - 3b^2 - 2 = 0$ 变形，即可得到答案.

【详解】解: $\left(1 - \frac{2ab - b^2}{a^2}\right) \div \frac{a - b}{a^2b},$

$$= \left(\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2} \right) \times \frac{a^2 b}{a - b},$$

$$= \frac{(a - b)^2}{a^2} \times \frac{a^2 b}{a - b},$$

$$= ab - b^2,$$

$$\because 3ab - 3b^2 - 2 = 0,$$

$$\therefore 3ab - 3b^2 = 2,$$

$$\therefore ab - b^2 = \frac{2}{3},$$

故原式的值为 $\frac{2}{3}$,

故答案为: $\frac{2}{3}$.

【点睛】本题考查了分式的化简法则，整式的整体代入，熟练对代数式进行化简是解题的关键.

20. 一个几何体由几个大小相同的小立方块搭成，它的主视图和俯视图如图所示，则搭成这个几何体的小立方块最多有_____个.

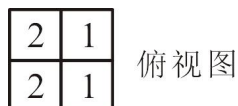


【答案】 6

【解析】

【分析】根据主视图和俯视图可得第一列最多 2 个，第二列最多 1 个小正方形，即可求解.

【详解】解：根据主视图和俯视图可得第一列最多 2 个，第二列最多 1 个小正方形，如图所示，



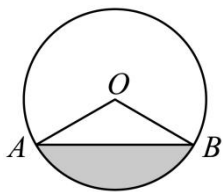
$\therefore$ 搭成这个几何体的小立方块最多有 $2 + 2 + 1 + 1 = 6$,

故答案为: 6.

【点睛】本题考查了三视图，熟练掌握三视图的定义是解题的关键.

21. 为传承非遗文化，讲好中国故事，某地准备在一个场馆进行川剧演出. 该场馆底面为一个圆形，如图所示，其半径是 10 米，从 A 到 B 有一笔直的栏杆，圆心 O 到栏杆 AB 的距离是 5 米，观众在阴影区域里观看演出，如果每平方米可以坐 3 名观众，那么最多可容纳_____名观众同时观看演出. (π 取 3.14, $\sqrt{3}$

取 1.73)

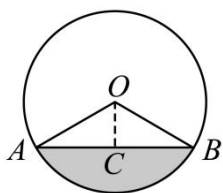


【答案】 184

【解析】

【分析】 过点 O 作 AB 的垂线段，交 AB 于点 C ，根据直角三角形的边长关系求出 $\angle AOB$ 的角度，阴影面积即为扇形 AOB 的面积减去三角形 AOB 的面积，随机可以求出容纳观众的数量.

【详解】 解：如图，过点 O 作 AB 的垂线段，交 AB 于点 C ，



$\because$ 圆心 O 到栏杆 AB 的距离是 5 米,

$\therefore OC = 5$ 米,

$\because OC \perp AB$,

$\therefore \sin \angle OBC = \frac{OC}{OB} = \frac{1}{2}$, $AB = 2BC = 2AC = \sqrt{OB^2 - OC^2} = 10\sqrt{3}$ 米,

$\therefore \angle OBC = 30^\circ$,

$\because OA = OB$,

$\therefore \angle AOB = 180^\circ - 2\angle OAB = 120^\circ$,

$\therefore$ 可容纳的观众 = 阴影部分面积

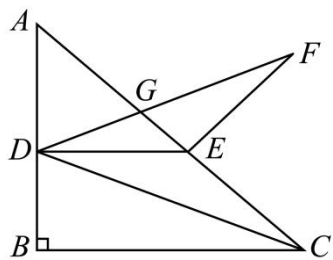
$$\times 3 = 3 \times \left(S_{\text{扇形}AOB} - S_{\triangle AOB} \right) = 3 \times \left(\frac{120^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 10^2 - \frac{1}{2} \times 10\sqrt{3} \times 5 \right) \approx 184.25 \text{ (人)},$$

$\therefore$ 最多可容纳 184 名观众同时观看演出,

故答案为: 184.

【点睛】 本题考查了弓形的面积，根据特殊角三角函数值求角的度数，熟知扇形面积公式是解题的关键.

22. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D ，过 D 作 $DE \parallel BC$ 交 AC 于点 E ，将 $\triangle DEC$ 沿 DE 折叠得到 $\triangle DEF$ ， DF 交 AC 于点 G 。若 $\frac{AG}{GE} = \frac{7}{3}$ ，则 $\tan A =$ _____.

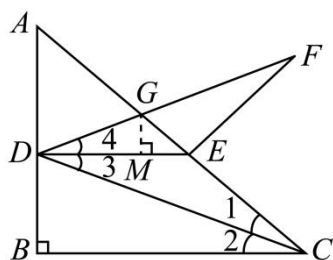


【答案】 $\frac{3\sqrt{7}}{7}$

【解析】

【分析】 过点 G 作 $GM \perp DE$ 于 M ，证明 $\triangle DGE \sim \triangle CGD$ ，得出 $DG^2 = GE \times GC$ ，根据 $AD \parallel GM$ ，得 $\frac{AG}{GE} = \frac{7}{3} = \frac{DM}{ME}$ ，设 $GE = 3, AG = 7$ ， $EM = 3n$ ，则 $DM = 7n$ ，则 $EC = DE = 10n$ ，在 $\text{Rt} \triangle DGM$ 中， $GM^2 = DG^2 - DM^2$ ，在 $\text{Rt} \triangle GME$ 中， $GM^2 = GE^2 - EM^2$ ，则 $DG^2 - DM^2 = GE^2 - EM^2$ ，解方程求得 $n = \frac{3}{4}$ ，则 $EM = \frac{9}{4}$ ， $GE = 3$ ，勾股定理求得 GM ，根据正切的定义，即可求解。

【详解】 解：如图所示，过点 G 作 $GM \perp DE$ 于 M ，



$\because CD$ 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D ， $DE \parallel BC$

$\therefore \angle 1 = \angle 2, \angle 2 = \angle 3$

$\therefore \angle 1 = \angle 3$

$\therefore ED = EC$

$\because$ 折叠，

$\therefore \angle 3 = \angle 4$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 4$ ，

又 $\because \angle DGE = \angle CGD$

$\therefore \triangle DGE \sim \triangle CGD$

$\therefore \frac{DG}{CG} = \frac{GE}{DG}$

$$\therefore DG^2 = GE \times GC$$

$\because \angle ABC = 90^\circ$, $DE \parallel BC$, 则 $AD \perp DE$,

$$\therefore AD \parallel GM$$

$$\therefore \frac{AG}{GE} = \frac{DM}{ME}, \quad \angle MGE = \angle A,$$

$$\therefore \frac{AG}{GE} = \frac{7}{3} = \frac{DM}{ME}$$

设 $GE = 3$, $AG = 7$, $EM = 3n$, 则 $DM = 7n$, 则 $EC = DE = 10n$,

$$\therefore DG^2 = GE \times GC$$

$$\therefore DG^2 = 3 \times (3 + 10n) = 9 + 30n$$

在 $\text{Rt}\triangle DGM$ 中, $GM^2 = DG^2 - DM^2$

在 $\text{Rt}\triangle GME$ 中, $GM^2 = GE^2 - EM^2$

$$\therefore DG^2 - DM^2 = GE^2 - EM^2$$

$$\text{即 } 9 + 30n - (7n)^2 = 3^2 - (3n)^2$$

$$\text{解得: } n = \frac{3}{4}$$

$$\therefore EM = \frac{9}{4}, \quad GE = 3$$

$$\text{则 } GM = \sqrt{GE^2 - ME^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$$

$$\therefore \tan A = \tan \angle EGM = \frac{ME}{MG} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3\sqrt{7}}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

$$\text{故答案为: } \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

【点睛】 本题考查了求正切, 折叠的性质, 勾股定理, 平行线分线段成比例, 相似三角形的性质与判定, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

23. 定义: 如果一个正整数能表示为两个正整数 m , n 的平方差, 且 $m - n > 1$, 则称这个正整数为“智慧优数”. 例如, $16 = 5^2 - 3^2$, 16 就是一个智慧优数, 可以利用 $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$ 进行研究. 若将

智慧优数从小到大排列，则第3个智慧优数是_____；第23个智慧优数是_____.

【答案】 ①. 15 ②. 57

【解析】

【分析】根据新定义，列举出前几个智慧优数，找到规律，进而即可求解.

【详解】解：依题意，当 $m=3$ ， $n=1$ ，则第1个智慧优数为 $3^2-1^2=8$

当 $m=4$ ， $n=2$ ，则第2个智慧优数为 $4^2-2^2=14$

当 $m=4$ ， $n=1$ ，则第3个智慧优数为 $4^2-1^2=15$ ，

当 $m=5$ ， $n=3$ ，则第5个智慧优数为 $5^2-3^2=16$

当 $m=5$ ， $n=2$ ，则第6个智慧优数为 $5^2-2^2=21$

当 $m=5$ ， $n=1$ ，则第7个智慧优数为 $5^2-3^2=24$

.....

$m=6$ 时有4个智慧优数，同理 $m=7$ 时有5个， $m=8$ 时有6个，

$$1+2+3+4+5+6=21$$

第22个智慧优数，当 $m=9$ 时， $n=7$ ，第22个智慧优数为 $9^2-7^2=81-49=32$ ，

第23个智慧优数为 $m=9, n=6$ 时， $9^2-6^2=81-36=57$ ，

故答案为：15，57.

【点睛】本题考查了新定义，平方差公式的应用，找到规律是解题的关键.

二、解答题（本大题共3个小题，共30分）

24. 2023年7月28日至8月8日，第31届世界大学生运动会将在成都举行. “当好东道主，热情迎嘉宾”，成都某知名小吃店计划购买A，B两种食材制作小吃. 已知购买1千克A种食材和1千克B种食材共需68元，购买5千克A种食材和3千克B种食材共需280元.

(1) 求A，B两种食材的单价；

(2) 该小吃店计划购买两种食材共36千克，其中购买A种食材千克数不少于B种食材千克数的2倍，当A，B两种食材分别购买多少千克时，总费用最少？并求出最少总费用.

【答案】(1) A种食材单价是每千克38元，B种食材单价是每千克30元

(2) A种食材购买24千克，B种食材购买12千克时，总费用最少，为1272元

【解析】

【分析】(1) 设A种食材的单价为 a 元，B种食材的单价为 b 元，根据题意列出二元一次方程组，解方程组

即可求解；

(2) 设 A 种食材购买 x 千克，则 B 种食材购买 $(36-x)$ 千克，根据题意列出不等式，得出 $x \leq 24$ ，进而设总费用为 y 元，根据题意， $y = 38x + 30(36-x) = 8x + 1080$ ，根据一次函数的性质即可求解。

【小问 1 详解】

解：设 A 种食材的单价为 a 元，B 种食材的单价为 b 元，根据题意得，

$$\begin{cases} a+b=68 \\ 5a+3b=280 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a=38 \\ b=30 \end{cases},$$

答：A 种食材的单价为 38 元，B 种食材的单价为 30 元；

【小问 2 详解】

解：设 A 种食材购买 x 千克，则 B 种食材购买 $(36-x)$ 千克，根据题意，

$$x \leq 2(36-x)$$

解得： $x \leq 24$ ，

设总费用为 y 元，根据题意， $y = 38x + 30(36-x) = 8x + 1080$

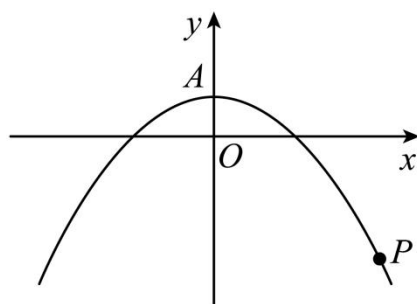
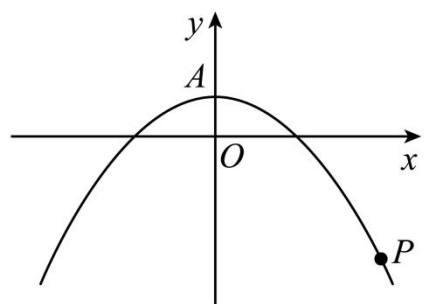
$\because 8 > 0$ ， y 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $x = 24$ 时， y 最小，

$\therefore$ 最少总费用为 $8 \times 24 + 1080 = 1272$ (元)

【点睛】 本题考查了二元一次方程组的应用，一元一次不等式的应用，一次函数的应用，根据题意列出方程组，不等式以及一次函数关系式是解题的关键。

25. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = ax^2 + c$ 经过点 $P(4, -3)$ ，与 y 轴交于点 $A(0, 1)$ ，直线 $y = kx (k \neq 0)$ 与抛物线交于 B, C 两点。



备用图

(1) 求抛物线的函数表达式；

(2) 若 $\triangle ABP$ 是以 AB 为腰的等腰三角形，求点 B 的坐标；

(3) 过点 $M(0, m)$ 作 y 轴的垂线，交直线 AB 于点 D ，交直线 AC 于点 E 。试探究：是否存在常数 m ，使得 $OD \perp OE$ 始终成立？若存在，求出 m 的值；若不存在，请说明理由。

【答案】(1) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$

(2) 点 B 的坐标为 $(-4, -3)$ 或 $(-2 - 2\sqrt{5}, -5 - 2\sqrt{5})$ 或 $(-2 + 2\sqrt{5}, -5 + 2\sqrt{5})$

(3) 存在， m 的值为 2 或 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求解即可；

(2) 设 $B\left(t, -\frac{1}{4}t^2 + 1\right)$ ，分 $AB = AP$ 和 $AB = BP$ 两种情况，分别根据等腰三角形性质和两点坐标距离公式列方程求解即可；

(3) 先根据题意画出图形，设抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ 与直线 $y = kx (k \neq 0)$ 的交点坐标为 $B(a, ka)$ ， $C(b, kb)$ ，联立抛物线和直线解析式，根据根与系数关系得到 $a + b = -4k$ ， $ab = -4$ ，利用待定系数法分别求得直线 AB 、 AC 的表达式为得到 $D\left(\frac{a(m-1)}{ka-1}, m\right)$ ， $E\left(\frac{b(m-1)}{kb-1}, m\right)$ ，过 E 作 $EQ \perp x$ 轴于 Q ，过 D 作 $DN \perp x$ 轴于 N ，证明 $\triangle EQO \sim \triangle OND$ 得到 $\frac{m}{\frac{a(m-1)}{ka-1}} = \frac{-\frac{b(m-1)}{kb-1}}{m}$ ，整理可得到 $m^2 = 4(m-1)^2$ ，进而求解即可。

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $y = ax^2 + c$ 经过点 $P(4, -3)$ ，与 y 轴交于点 $A(0, 1)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 16a + c = -3 \\ c = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ c = 1 \end{cases},$$

∴ 抛物线的函数表达式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ ；

【小问 2 详解】

解：设 $B\left(t, -\frac{1}{4}t^2 + 1\right)$ ，

$$\text{由 } y = -\frac{1}{4}x^2 + 1 = kx \text{ 得 } x^2 + 4kx - 4 = 0,$$

$$\therefore a + b = -4k, \quad ab = -4;$$

设直线 AB 的表达式为 $y = px + q$,

$$\text{则 } \begin{cases} ap + q = ka \\ q = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} p = \frac{ka-1}{a} \\ q = 1 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的表达式为 } y = \frac{ka-1}{a}x + 1,$$

$$\text{令 } y = m, \text{ 由 } y = \frac{ka-1}{a}x + 1 = m \text{ 得 } x = \frac{a(m-1)}{ka-1},$$

$$\therefore D\left(\frac{a(m-1)}{ka-1}, m\right),$$

$$\text{同理, 可得直线 } AC \text{ 的表达式为 } y = \frac{kb-1}{b}x + 1, \text{ 则 } E\left(\frac{b(m-1)}{kb-1}, m\right),$$

过 E 作 $EQ \perp x$ 轴于 Q , 过 D 作 $DN \perp x$ 轴于 N ,

$$\text{则 } \angle EQO = \angle OND = 90^\circ, \quad EQ = ND = m, \quad QO = -\frac{b(m-1)}{kb-1}, \quad ON = \frac{a(m-1)}{ka-1},$$

若 $OD \perp OE$, 则 $\angle EOD = 90^\circ$,

$$\therefore \angle QEO + \angle QOE = \angle DON + \angle QOE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle QEO = \angle DON,$$

$$\therefore \triangle EQO \sim \triangle OND,$$

$$\therefore \frac{EQ}{ON} = \frac{QO}{ND},$$

$$\text{则 } \frac{m}{\frac{a(m-1)}{ka-1}} = \frac{-\frac{b(m-1)}{kb-1}}{m},$$

$$\text{整理, 得 } m^2(ka-1)(kb-1) = -ab(m-1)^2,$$

$$\text{即 } m^2[abk^2 - k(a+b) + 1] = -ab(m-1)^2,$$

将 $a+b=-4k$, $ab=-4$ 代入, 得 $m^2(-4k^2+4k^2+1)=4(m-1)^2$,

即 $m^2=4(m-1)^2$, 则 $m=2(m-1)$ 或 $m=-2(m-1)$,

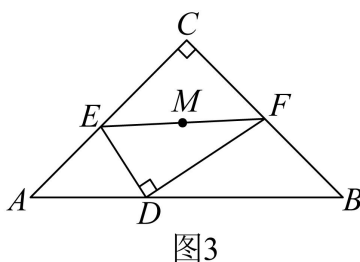
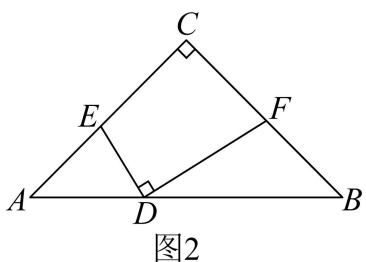
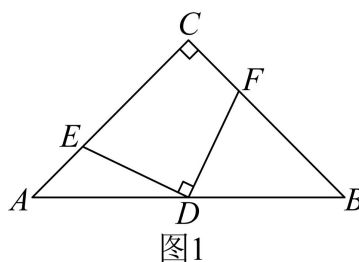
解得 $m_1=2$, $m_2=\frac{2}{3}$,

综上, 存在常数 m , 使得 $OD \perp OE$, m 的值为 2 或 $\frac{2}{3}$.

【点睛】本题是二次函数的综合题, 主要考查了待定系数法求函数的解析式、等腰三角形的性质、一元二次方程根与系数关系、相似三角形的判定与性质、解一元二次方程、坐标与图形等知识, 综合性强, 难度较大, 熟练掌握相关知识的联系与运用, 添加辅助线构造相似三角形, 并利用数形结合和分类讨论思想解决问题是解答的关键.

26. 探究式学习是新课程倡导的重要学习方式, 某兴趣小组拟做以下探究.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=BC$, D 是 AB 边上一点, 且 $\frac{AD}{BD}=\frac{1}{n}$ (n 为正整数), E 是 AC 边上的动点, 过点 D 作 DE 的垂线交直线 BC 于点 F .



【初步感知】

(1) 如图 1, 当 $n=1$ 时, 兴趣小组探究得出结论: $AE+BF=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$, 请写出证明过程.

【深入探究】

(2) ①如图 2, 当 $n=2$, 且点 F 在线段 BC 上时, 试探究线段 AE , BF , AB 之间的数量关系, 请写出结论并证明;

②请通过类比、归纳、猜想, 探究出线段 AE , BF , AB 之间数量关系的一般结论 (直接写出结论, 不必证明)

【拓展运用】

(3) 如图 3, 连接 EF , 设 EF 的中点为 M . 若 $AB=2\sqrt{2}$, 求点 E 从点 A 运动到点 C 的过程中, 点 M 运动的路径长 (用含 n 的代数式表示).

【答案】(1) 见解析 (2) ① $AE+\frac{1}{2}BF=\frac{\sqrt{2}}{3}AB$, 证明过程略; ②当点 F 在射线 BC 上时,

$$AE + \frac{1}{n}BF = \frac{\sqrt{2}}{n+1}AB, \text{ 当点 } F \text{ 在 } CB \text{ 延长线上时, } AE - \frac{1}{n}BF = \frac{\sqrt{2}}{n+1}AB$$

$$(3) \sqrt{n^2+1}$$

【解析】

【分析】(1) 连接 CD ，当 $n=1$ 时， $\frac{AD}{BD}=1$ ，即 $AD=BD$ ，证明 $AD=CD$ ，从而得到 $\triangle ADE \cong \triangle CDF$

即可解答；

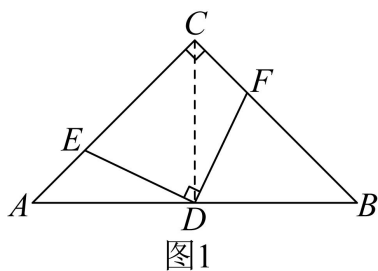
(2) ①过 BD 的中点 G 作 BC 的平行线，交 DF 于点 J ，交 AC 于点 H ，当 $n=2$ 时， $AD=DG$ ，根据 $GH \parallel BC$ ，可得 $\triangle AHG$ 是等腰直角三角形， $JG = \frac{1}{2}FB$ ，根据 (1) 中结论可得 $AE + JG = \frac{\sqrt{2}}{2}AG$ ，

再根据 $JG = \frac{1}{2}FB$ ， $AG = \frac{2}{3}AB$ ，即可得到 $AE + \frac{1}{2}BF = \frac{\sqrt{2}}{3}AB$ ；

②分类讨论，即当点 F 在射线 BC 上时；当点 F 在 CB 延长线上时，画出图形，根据①中的原理即可解答；

(3) 如图，当 E_1 与 A 重合时，取 E_1F_1 的中点 M_1 ，当 E_2 与 C 重合时，取 E_2F_2 的中点 M_2 ，可得 M 的轨迹长度即为 M_1M_2 的长度，可利用建系的方法表示出 E_1, F_1, E_2, F_2 的坐标，再利用中点公式求出 M_1, M_2 ，最后利用勾股定理即可求出 M_1M_2 的长度。

【小问 1 详解】

证明：如图，连接 CD ，

当 $n=1$ 时， $\frac{AD}{BD}=1$ ，即 $AD=BD$ ，

$\because \angle C=90^\circ, AC=BC$ ，

$\therefore \angle A=\angle B=45^\circ, CD \perp AB, \angle FCD=\frac{1}{2}\angle ACB=45^\circ$ ，

$\therefore CD=AD, AB=\sqrt{2}BC$ ，即 $BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$ ，

$$\because DE \perp FD,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle EDC = \angle FDC + \angle EDC = 90^\circ,$$

$$\angle ADE = \angle CDF$$

在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle CDF$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADE = \angle CDF \\ DA = DC \\ \angle DAE = \angle DCF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AE = CF,$$

$$\therefore BC = CF + BF = AE + BF = \frac{\sqrt{2}}{2} AB;$$

【小问 2 详解】

$$\textcircled{1} AE + \frac{1}{2} BF = \frac{\sqrt{2}}{3} AB$$

证明：如图，过 BD 的中点 G 作 BC 的平行线，交 DF 于点 J ，交 AC 于点 H ，

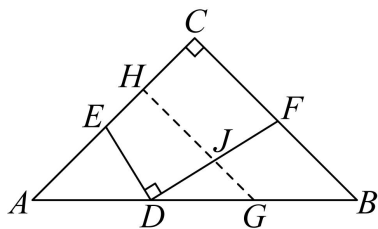


图2

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } \frac{AD}{DB} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } 2AD = DB,$$

$\because G$ 是 DB 的中点,

$$\therefore AD = DG, \quad AG = \frac{2}{3} AB,$$

$\because HG \parallel BC,$

$$\therefore \angle AHG = \angle C = 90^\circ, \quad \angle HGA = \angle B = 45^\circ,$$

$\because \angle A = 45^\circ,$

$\therefore \triangle AHG$ 是等腰直角三角形, 且 $\triangle DJG \sim \triangle DBF$,

$$\therefore \frac{JG}{FB} = \frac{DG}{DB} = \frac{1}{2},$$

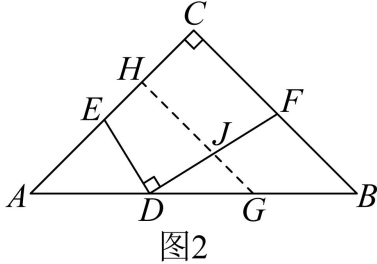
$$\text{根据 (1) 中的结论可得 } AE + JG = \frac{\sqrt{2}}{2} AG,$$

$$\therefore AE + JG = AE + \frac{1}{2}FB = \frac{\sqrt{2}}{2}AG = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{3}AB;$$

故线段 AE , BF , AB 之间的数量关系为 $AE + \frac{1}{2}BF = \frac{\sqrt{2}}{3}AB$;

②解：当点 F 在射线 BC 上时，

如图，在 DB 上取一点 G 使得 $AD = DG$ ，过 G 作 BC 的平行线，交 DF 于点 J ，交 AC 于点 H ，



同①，可得 $AE + JG = \frac{\sqrt{2}}{2}AG$ ，

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{1}{n}, \quad AD = DG,$$

$$\therefore \frac{DG}{BD} = \frac{1}{n}, \quad AG = \frac{2}{n+1}AB,$$

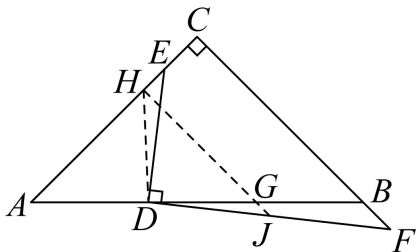
$$\text{同①可得 } \frac{JG}{FB} = \frac{DG}{DB} = \frac{1}{n},$$

$$\therefore AE + JG = AE + \frac{1}{n}FB = \frac{\sqrt{2}}{2}AG = \frac{2}{n+1} \times \frac{\sqrt{2}}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{n+1}AB,$$

即线段 AE , BF , AB 之间数量关系为 $AE + \frac{1}{n}BF = \frac{\sqrt{2}}{n+1}AB$;

当点 F 在 CB 延长线上时，

如图，在 DB 上取一点 G 使得 $AD = DG$ ，过 G 作 BC 的平行线，交 DF 于点 J ，交 AC 于点 H ，连接 HD



同 (1) 中原理，可证明 $\triangle DHE \cong \triangle DGJ$ (ASA)，

$$\text{可得 } AE - GJ = \frac{\sqrt{2}}{2} AG,$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{1}{n}, \quad AD = DG,$$

$$\therefore \frac{DG}{BD} = \frac{1}{n}, \quad AG = \frac{2}{n+1} AB,$$

$$\text{同①可得 } \frac{JG}{FB} = \frac{DG}{DB} = \frac{1}{n},$$

$$\therefore AE - JG = AE - \frac{1}{n} FB = \frac{\sqrt{2}}{2} AG = \frac{2}{n+1} \times \frac{\sqrt{2}}{2} AB = \frac{\sqrt{2}}{n+1} AB$$

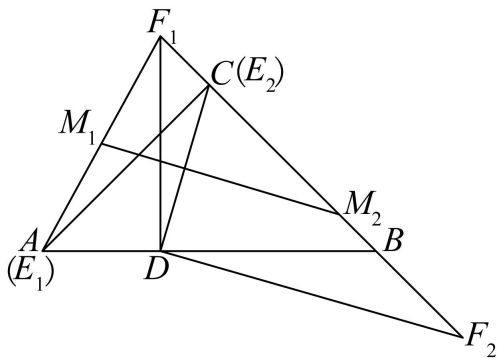
$$\text{即线段 } AE, BF, AB \text{ 之间数量关系为 } AE - \frac{1}{n} BF = \frac{\sqrt{2}}{n+1} AB,$$

综上所述，当点 F 在射线 BC 上时， $AE + \frac{1}{n} BF = \frac{\sqrt{2}}{n+1} AB$ ；当点 F 在 CB 延长线上时，

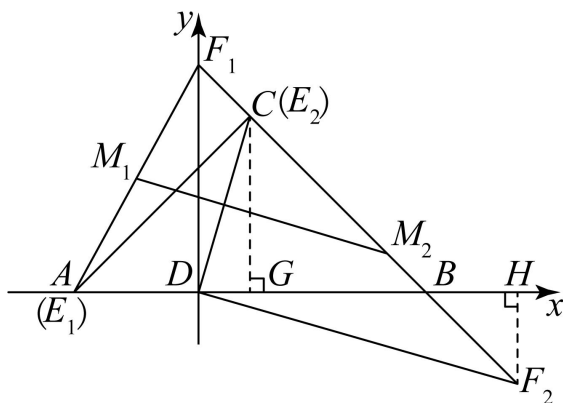
$$AE - \frac{1}{n} BF = \frac{\sqrt{2}}{n+1} AB;$$

【小问3 详解】

解：如图，当 E_1 与 A 重合时，取 E_1F_1 的中点 M_1 ，当 E_2 与 C 重合时，取 E_2F_2 的中点 M_2 ，可得 M 的轨迹长度即为 M_1M_2 的长度，



如图，以点 D 为原点， DF_1 为 y 轴， DB 为 x 轴建立平面直角坐标系，过点 E_2 作 AB 的垂线段，交 AB 于点 G ，过点 F_2 作 AB 的垂线段，交 AB 于点 H ，



$$\because AB = 2\sqrt{2}, \frac{AD}{DB} = \frac{1}{n},$$

$$\therefore AD = \frac{2\sqrt{2}}{n+1}, \quad DB = \frac{2\sqrt{2}n}{n+1},$$

$$\therefore E_1 \left(-\frac{2\sqrt{2}}{n+1}, 0 \right),$$

$$\because \angle F_1BD = 45^\circ,$$

$$\therefore F_1D = BD,$$

$$\therefore F_1 \left(0, \frac{2\sqrt{2}n}{n+1} \right),$$

$$\because M_1 \text{ 是 } E_1F_1 \text{ 的中点},$$

$$\therefore M_1 \left(-\frac{\sqrt{2}}{n+1}, \frac{\sqrt{2}n}{n+1} \right),$$

$$\because GB = GC = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2},$$

$$\therefore DG = DB - BG = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}n}{n+1},$$

$$\therefore E_2 \left(\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}n}{n+1}, \sqrt{2} \right),$$

$$\text{根据 (2) 中的结论 } AE_2 - \frac{1}{n}BF_2 = \frac{\sqrt{2}}{n+1}AB,$$

$$\therefore BF_2 = n \left(AE_2 - \frac{\sqrt{2}}{n+1}AB \right) = \frac{2n^2 - 2n}{n+1},$$

$$\therefore BH = F_2H = \frac{\sqrt{2}}{2} BF_2 = \frac{\sqrt{2}n^2 - \sqrt{2}n}{n+1},$$

$$\therefore DH = DB + BH = \sqrt{2}n,$$

$$\therefore F_2 \left(\sqrt{2}n, -\frac{\sqrt{2}n^2 - \sqrt{2}n}{n+1} \right),$$

$$\therefore M_2 \left(\frac{\sqrt{2}n^2 + 2\sqrt{2}n - \sqrt{2}}{2n+2}, \frac{-\sqrt{2}n^2 + 2\sqrt{2}n + \sqrt{2}}{2n+2} \right),$$

$$\therefore M_1M_2 = \sqrt{n^2 + 1}.$$

【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质，全等三角形的判定及性质，相似三角形的判定及性质，平行线的性质，正确地画出图形，作出辅助线，找对边之间的关系是解题的关键.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】