

广安市 2023 年初中学业水平考试试题

数学

注意事项：

1. 本试卷分为试题卷（1-4 页）和答题卡两部分。考试时间 120 分钟，满分 120 分。
2. 考生答题前，请先将姓名、准考证号等信息用黑色墨迹签字笔填写在答题卡上的指定位置，待监考教师粘贴条形码后，认真核对条形码上的姓名、准考证号与自己准考证上的信息是否一致。
3. 请将选择题答案用 2B 铅笔填涂在答题卡上的相应位置，非选择题答案用黑色墨迹签字笔答在答题卡上的相应位置。超出答题区域书写的答案无效，在草稿纸、试题卷上答题无效；作图题应先用铅笔画，确定不修改后，再用黑色墨迹签字笔描黑。
4. 考试结束，监考人员必须将参考学生和缺考学生的答题卡、试题卷一并收回。

一、选择题（每小题只有一个选项符合题意，请将所选选项填涂在答题卡相应位置上。本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. -6 的绝对值是（ ）

- A. -6 B. 6 C. $-\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】在数轴上，表示一个数的点到原点的距离叫做这个数的绝对值。

【详解】负数的绝对值等于它的相反数，所以 -6 的绝对值是 6 。

故选：B。

2. 下列运算中，正确的是（ ）

- A. $a^2 + a^4 = a^6$ B. $3a^3 \cdot 4a^2 = 12a^6$ C. $(2a + b)^2 = 4a^2 + b^2$ D. $(-2ab^2)^3 = -8a^3b^6$

【答案】D

【解析】

【分析】根据合并同类项、同底数幂的乘法、完全平方公式、积的乘方与幂的乘方法则逐项判断即可得。

【详解】解：A、 a^2 与 a^4 不是同类项，不可合并，则此项错误，不符合题意；

B、 $3a^3 \cdot 4a^2 = 12a^5$ ，则此项错误，不符合题意；

C、 $(2a+b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$ ，则此项错误，不符合题意；

D、 $(-2ab^2)^3 = -8a^3b^6$ ，则此项正确，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了合并同类项、同底数幂的乘法、完全平方公式、积的乘方与幂的乘方，熟练掌握各运算法则是解题关键.

3. 2023 年以来，广安市全面落实市委、市政府关于促进消费的各项政策措施，积极优化消费运行环境，消费加速回升. 1-2 月，全市实现社会消费品总额 116 亿元，同比增长 10.8%. 请将 116 亿用科学记数法表示 ()

A. 1.16×10^9

B. 1.16×10^{10}

C. 1.16×10^{11}

D. 116×10^8

【答案】B

【解析】

【分析】根据科学记数法的定义即可得.

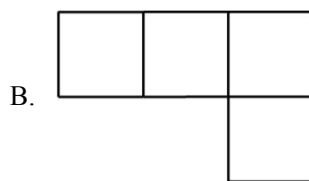
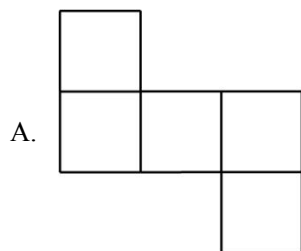
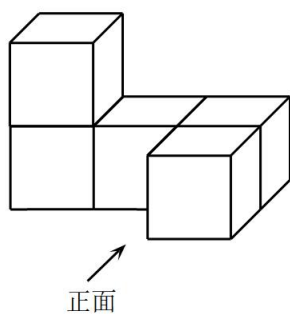
【详解】解：116 亿 $= 1.16 \times 10^2 \times 10^8 = 1.16 \times 10^{10}$ ，

故选：B.

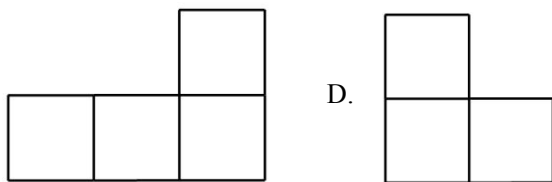
【点睛】本题考查了科学记数法，熟记科学记数法的定义（将一个数表示成 $a \times 10^n$ 的形式，其中

$1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，这种记数的方法叫做科学记数法）是解题关键. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同.

4. 如图，由 5 个大小相同的小正方体搭成的几何体，它的俯视图是 ()



C.

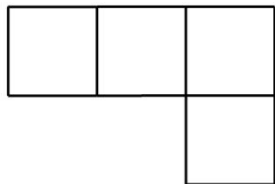


【答案】B

【解析】

【分析】根据俯视图的定义（从上面观察物体所得到的视图是俯视图）即可得.

【详解】解：这个几何体的俯视图是：



故选：B.

【点睛】本题考查了俯视图，熟练掌握俯视图的定义是解题关键.

5. 下列说法正确的是（ ）

- A. 三角形的一个外角等于两个内角的和
- B. 对角线相等且互相垂直的四边形是正方形
- C. 在一组数据 11, 9, 7, 8, 6, 8, 12, 8 中，众数和中位数都是 8
- D. 甲乙两组各 10 名同学参加“安全知识竞赛”，若两组同学的平均成绩相同，甲组的方差 $S_{\text{甲}}^2 = 0.25$ ，乙组的方差 $S_{\text{乙}}^2 = 0.15$ ，则甲组同学的成绩比乙组同学的成绩稳定

【答案】C

【解析】

【分析】根据三角形的外角定理，正方形的判定，众数和中位数的定义，方差的意义判断即可.

【详解】解：A. 三角形的一个外角等于与它不相邻两个内角的和，故选项 A 错误；

B. 要加上“对角线互相平分”这个条件，故选项 B 错误；

C. 这列数据从小到大排列为 6, 7, 8, 8, 8, 9, 11, 12,

8 出现了 3 次，故众数是 8，中位数是 $\frac{8+8}{2} = 8$,

故选项 C 正确；

D. 方差越小，数据越稳定，故选项 D 错误.

故选：C.

【点睛】本题考查了三角形的外角定理，正方形的判定，众数和中位数的定义，方差的意义等知识，本题

的关键是熟练掌握这些知识点，并能灵活运用.

6. 已知 a , b , c 为常数, 点 $P(a, c)$ 在第四象限, 则关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根的情况为()

- A. 有两个相等的实数根
B. 有两个不相等的实数根
C. 没有实数根
D. 无法判定

【答案】B

【解析】

【分析】根据点 $P(a, c)$ 在第四象限, 得出 $ac < 0$, 进而根据一元二次方程根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 即可求解.

【详解】解: $\because$ 点 $P(a, c)$ 在第四象限,

$$\therefore a > 0, c < 0,$$

$$\therefore ac < 0,$$

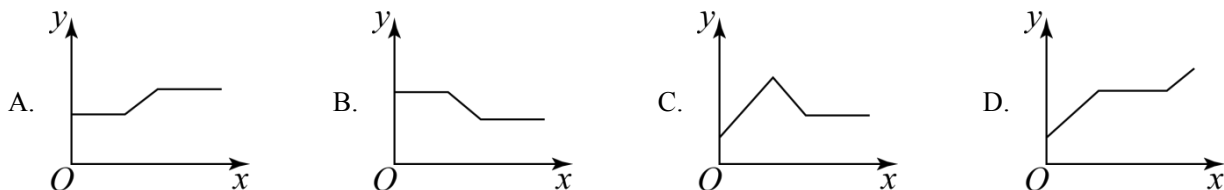
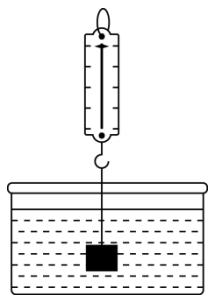
$$\therefore \text{方程 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ 的判别式 } \Delta = b^2 - 4ac > 0,$$

$$\therefore \text{方程 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ 有两个不相等的实数根.}$$

故选: B.

【点睛】本题考查了第四象限点的坐标特征, 一元二次方程根的判别式, 得出 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 是解题的关键.

7. 如图, 用弹簧测力计将一铁块悬于盛有水的水槽中, 然后匀速向上提起, 使铁块完全露出水面, 并上升一定高度, 则下列能反映弹簧测力计的读数 y (单位: N) 与铁块被提起的时间 x (单位: s) 之间的函数关系的大致图象是 ()



【答案】A

【解析】

【分析】根据浮力的知识，铁块露出水面前读数 y 不变，出水面后 y 逐渐增大，离开水面后 y 不变.

【详解】解：由浮力知识得： $F_{\text{拉力}} = G - F_{\text{浮力}}$ ，读数 y 即为 $F_{\text{拉力}}$ ，

在铁块露出水面以前，浮力不变，则此过程中弹簧的读数不变，

当铁块慢慢露出水面开始，浮力减小，则拉力增加，弹簧的读数逐渐增大，

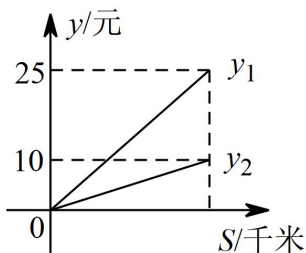
当铁块完全露出水面后，浮力等于 0，拉力等于重力，弹簧的读数不变，

观察四个选项可知，只有选项 A 符合，

故选：A.

【点睛】本题考查了函数图象，解答本题的关键是明确题意，掌握一定的物理知识.

8. 为了降低成本，某出租车公司实施了“油改气”措施. 如图， y_1 、 y_2 分别表示燃油汽车和燃气汽车所需费用 y （单位：元）与行驶路程 S （单位：千米）的关系，已知燃油汽车每千米所需的费用比燃气汽车每千米所需的费用的 3 倍少 0.1 元，设燃气汽车每千米所需的费用为 x 元，则可列方程为（ ）



A. $\frac{25}{x} = \frac{10}{3x-0.1}$

B. $\frac{25}{x} = \frac{10}{3x+0.1}$

C. $\frac{25}{3x+0.1} = \frac{10}{x}$

D. $\frac{25}{3x-0.1} = \frac{10}{x}$

【答案】D

【解析】

【分析】先求出燃油汽车每千米所需的费用为 $(3x-0.1)$ 元，再根据函数图象可得燃油汽车所需费用为 25 元时与燃气汽车所需费用为 10 元时，所行驶的路程相等，据此列出方程即可得.

【详解】解：由题意得：燃油汽车每千米所需的费用为 $(3x-0.1)$ 元，

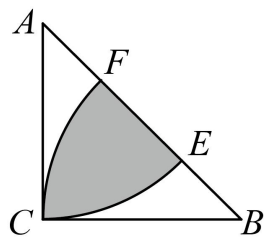
由函数图象可知，燃油汽车所需费用为 25 元时与燃气汽车所需费用为 10 元时，所行驶的路程相等，

则可列方程为 $\frac{25}{3x-0.1} = \frac{10}{x}$ ，

故选：D.

【点睛】本题考查了列分式方程、函数图象，读懂函数图象，正确获取信息是解题关键.

9. 如图, 在等腰直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 2\sqrt{2}$, 以点 A 为圆心, AC 为半径画弧, 交 AB 于点 E , 以点 B 为圆心, BC 为半径画弧, 交 AB 于点 F , 则图中阴影部分的面积是 ()



- A. $\pi - 2$ B. $2\pi - 2$ C. $2\pi - 4$ D. $4\pi - 4$

【答案】C

【解析】

【分析】先利用扇形的面积公式求出扇形 ACE 和扇形 BCF 的面积, 再减去 $\triangle ABC$ 的面积即可得.

【详解】解: $\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$$\angle A = \angle B = 45^\circ,$$

$$\because AC = BC = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{图中阴影部分的面积是 } S_{\text{扇形}ACE} + S_{\text{扇形}BCF} - S_{\text{Rt}\triangle ABC}$$

$$= \frac{45\pi \times (2\sqrt{2})^2}{360} + \frac{45\pi \times (2\sqrt{2})^2}{360} - \frac{1}{2} \times (2\sqrt{2}) \times (2\sqrt{2})$$

$$= 2\pi - 4,$$

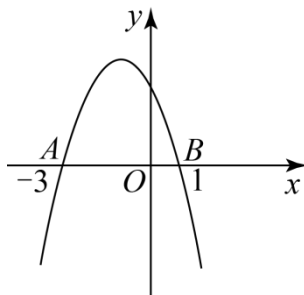
故选: C.

【点睛】本题考查了扇形的面积, 熟练掌握扇形的面积公式是解题关键.

10. 如图所示, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a 、 b 、 c 为常数, $a \neq 0$) 的图象与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$, $B(1, 0)$. 有

下列结论: ① $abc > 0$; ②若点 $(-2, y_1)$ 和 $(-0.5, y_2)$ 均在抛物线上, 则 $y_1 < y_2$; ③ $5a - b + c = 0$;

④ $4a + c > 0$. 其中正确的有 ()



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次函数图像的性质、二次函数图像与系数的关系以及与 x 轴交点问题逐项分析判断即可.

【详解】解：由图可知，二次函数开口方向向下，与 y 轴正半轴交于一点，

$$\therefore a < 0, c > 0.$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} < 0,$$

$$\therefore b < 0.$$

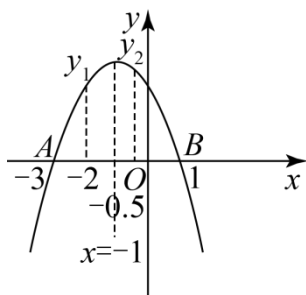
$$\therefore abc > 0.$$

故①正确.

$\because A(-3, 0), B(1, 0)$ 是关于二次函数对称轴对称,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -1.$$

$\therefore (-2, y_1)$ 在对称轴的左边, $(-0.5, y_2)$ 在对称轴的右边, 如图所示,



$$\therefore y_1 < y_2.$$

故②正确.

$\because$ 图象与 x 轴交于点 $A(-3, 0), B(1, 0)$,

$$\therefore 9a - 3b + c = 0, \quad a - b + c = 0.$$

$$\therefore 10a - 4b + 2c = 0.$$

$$\therefore 5a - 2b + c = 0.$$

故③不正确.

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -1,$$

$$\therefore b = 2a.$$

当 $x = 1$ 时, $y = 0$,

$$\therefore a + b + c = 0.$$

$$\therefore 3a + c = 0,$$

$$\therefore c = -3a,$$

$$\therefore 4a + c = 4a - 3a = a < 0.$$

故④不正确.

综上所述, 正确的有①②.

故选: B.

【点睛】本题考查了二次函数图像与系数之间的关系, 解题的关键在于通过图像判断对称轴, 开口方向以及 y 轴交点.

二、填空题 (请把最简答案填写在答题卡相应位置. 本大题共 6 个小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

11. $\sqrt{16}$ 的平方根是_____.

【答案】 ± 2

【解析】

【详解】解: $\because \sqrt{16} = 4$

$$\therefore \sqrt{16} \text{ 的平方根是 } \pm 2.$$

故答案为 ± 2 .

12. 函数 $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq -2$ 且 $x \neq 1$

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件和分式有意义的条件即可求出结论.

【详解】解: 由题意可得
$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$$

解得 $x \geq -2$ 且 $x \neq 1$

故答案为: $x \geq -2$ 且 $x \neq 1$.

【点睛】此题考查的是求自变量的取值范围, 掌握二次根式有意义的条件和分式有意义的条件是解决此题的关键.

13. 定义一种新运算: 对于两个非零实数 a 、 b , $a \ast b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$. 若 $2 \ast (-2) = 1$, 则 $(-3) \ast 3$ 的值是

_____.

【答案】 $-\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 先根据 $2※(-2)=1$ 可得一个关于 x, y 的等式，再根据新运算的定义代入计算即可得.

【详解】 解： $\because 2※(-2)=1$,

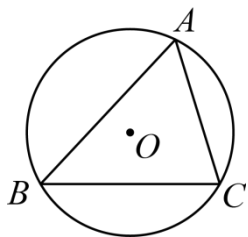
$$\therefore \frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1, \text{ 即 } x - y = 2,$$

$$\therefore (-3)※3 = \frac{x}{-3} + \frac{y}{3} = -\frac{x-y}{3} = -\frac{2}{3},$$

故答案为： $-\frac{2}{3}$.

【点睛】 本题考查了新定义下的实数运算、代数式求值，理解新运算的定义是解题关键.

14. 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，圆的半径为 7， $\angle BAC = 60^\circ$ ，则弦 BC 的长度为_____.

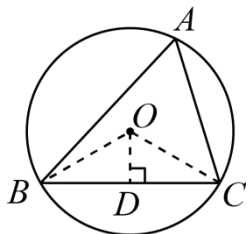


【答案】 $7\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 连接 OB, OC ，过点 O 作 $OD \perp BC$ 于点 D ，先根据圆周角定理可得 $\angle BOC = 2\angle BAC = 120^\circ$ ，再根据等腰三角形的三线合一可得 $\angle BOD = 60^\circ$ ， $BC = 2BD$ ，然后解直角三角形可得 BD 的长，由此即可得.

【详解】 解：如图，连接 OB, OC ，过点 O 作 $OD \perp BC$ 于点 D ，



$$\because \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 2\angle BAC = 120^\circ,$$

$$\because OB = OC, OD \perp BC,$$

$$\therefore \angle BOD = \frac{1}{2}\angle BOC = 60^\circ, \quad BC = 2BD,$$

∵ 圆的半径为 7,

$$\therefore OB = 7,$$

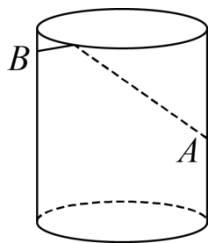
$$\therefore BD = OB \cdot \sin 60^\circ = \frac{7}{2}\sqrt{3},$$

$$\therefore BC = 2BD = 7\sqrt{3},$$

故答案为: $7\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了圆周角定理、解直角三角形、等腰三角形的三线合一，熟练掌握圆周角定理和解直角三角形的方法是解题关键.

15. 如图，圆柱形玻璃杯的杯高为 9cm，底面周长为 16cm，在杯内壁离杯底 4cm 的点 A 处有一滴蜂蜜，此时，一只蚂蚁正好在杯外壁上，它在离杯上沿 1cm，且与蜂蜜相对的点 B 处，则蚂蚁从外壁 B 处到内壁 A 处所走的最短路程为 _____ cm. (杯壁厚度不计)

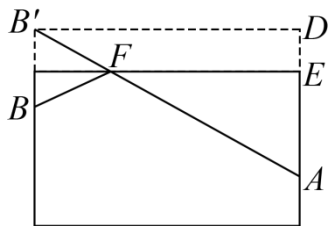


【答案】 10

【解析】

【分析】 如图 (见解析)，将玻璃杯侧面展开，作 B 关于 EF 的对称点 B'，根据两点之间线段最短可知 AB' 的长度即为所求，利用勾股定理求解即可得.

【详解】 解：如图，将玻璃杯侧面展开，作 B 关于 EF 的对称点 B'，作 B'D ⊥ AE，交 AE 延长线于点 D，连接 AB'，



由题意得: $DE = \frac{1}{2}BB' = 1\text{cm}$, $AE = 9 - 4 = 5(\text{cm})$,

$$\therefore AD = AE + DE = 6\text{cm},$$

∵ 底面周长为 16cm,

$$\therefore B'D = \frac{1}{2} \times 16 = 8(\text{cm}),$$

$$\therefore AB' = \sqrt{AD^2 + B'D^2} = 10\text{cm},$$

由两点之间线段最短可知，蚂蚁从外壁 B 处到内壁 A 处所走的最短路程为 $AB' = 10\text{cm}$ ，

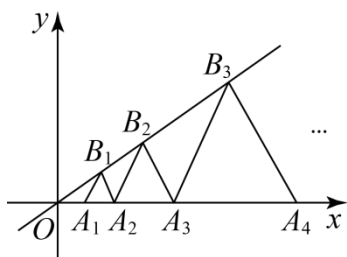
故答案为：10.

【点睛】本题考查了平面展开——最短路径问题，将图形展开，利用轴对称的性质和勾股定理进行计算是解题的关键. 同时也考查了同学们的创造性思维能力.

16. 在平面直角坐标系中，点 $A_1, A_2, A_3, A_4 \cdots$ 在 x 轴的正半轴上，点 $B_1, B_2, B_3 \cdots$ 在直线

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x (x \geq 0)$ 上，若点 A_1 的坐标为 $(2, 0)$ ，且 $\triangle A_1B_1A_2, \triangle A_2B_2A_3, \triangle A_3B_3A_4 \cdots$ 均为等边三角形. 则

点 B_{2023} 的纵坐标为_____.

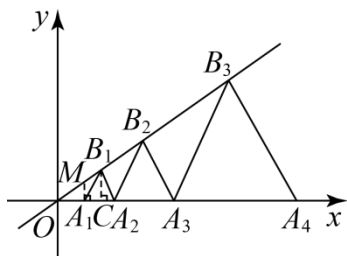


【答案】 $2^{2022}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】过点 A_1 作 $A_1M \perp x$ 轴，交直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x (x \geq 0)$ 于点 M ，过点 B_1 作 $B_1C \perp x$ 轴于点 C ，先求出 $\angle A_1OM = 30^\circ$ ，再根据等边三角形的性质、等腰三角形的判定可得 $A_1B_1 = OA_1 = 2$ ，然后解直角三角形可得 B_1C 的长，即可得点 B_1 的纵坐标，同样的方法分别求出点 B_2, B_3, B_4 的纵坐标，最后归纳类推出一般规律，由此即可得.

【详解】解：如图，过点 A_1 作 $A_1M \perp x$ 轴，交直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x (x \geq 0)$ 于点 M ，过点 B_1 作 $B_1C \perp x$ 轴于点 C ，



$\because A_1(2, 0)$,

$\therefore OA_1 = 2$,

$$\text{当 } x=2 \text{ 时, } y=\frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 即 } M\left(2, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right), A_1M=\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \tan \angle A_1OM = \frac{A_1M}{A_1O} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle A_1OM = 30^\circ,$$

$\because \triangle A_1B_1A_2$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle A_2A_1B_1 = 60^\circ, A_1A_2 = A_1B_1,$$

$$\therefore \angle OB_1A_1 = 30^\circ = \angle A_1OM,$$

$$\therefore A_1B_1 = OA_1 = 2,$$

$$\therefore B_1C = A_1B_1 \cdot \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 即点 } B_1 \text{ 的纵坐标为 } 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{同理可得: 点 } B_2 \text{ 的纵坐标为 } 2^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{点 } B_3 \text{ 的纵坐标为 } 2^3 \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{点 } B_4 \text{ 的纵坐标为 } 2^4 \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{归纳类推得: 点 } B_n \text{ 的纵坐标为 } 2^n \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2^{n-1} \sqrt{3} \quad (n \text{ 为正整数}),$$

$$\text{则点 } B_{2023} \text{ 的纵坐标为 } 2^{2023-1} \sqrt{3} = 2^{2022} \sqrt{3},$$

$$\text{故答案为: } 2^{2022} \sqrt{3}.$$

【点睛】 本题考查了点坐标的规律探索、等边三角形的性质、正比例函数的应用、解直角三角形等知识点, 正确归纳类推出一般规律是解题关键.

三、解答题 (本大题共 4 个小题, 第 17 小题 5 分, 第 18、19、20 小题各 6 分, 共 23 分)

$$17. \text{ 计算: } -1^{2024} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^0 - 2 \cos 60^\circ + |\sqrt{5} - 3|$$

$$\text{【答案】 } 2 - \sqrt{5}$$

【解析】

【分析】先计算有理数的乘方、零指数幂、特殊角的余弦值、化简绝对值，再计算乘法与加减法即可得.

【详解】解：原式 $= -1 + 1 - 2 \times \frac{1}{2} + 3 - \sqrt{5}$

$$= -1 + 3 - \sqrt{5}$$

$$= 2 - \sqrt{5}.$$

【点睛】本题考查了零指数幂、特殊角的余弦值、实数的混合运算，熟练掌握各运算法则是解题关键.

18. 先化简 $\left(\frac{a^2}{a+1} - a + 1\right) \div \frac{a^2 - 1}{a^2 + 2a + 1}$ ，再从不等式 $-2 < a < 3$ 中选择一个适当的整数，代入求值.

【答案】 $\frac{1}{a-1}$ ，选择 $a = 0$ ，式子的值为 -1 （或选择 $a = 2$ ，式子的值为 1 ）

【解析】

【分析】先计算括号内的分式减法，再计算分式的除法，然后根据分式有意义的条件选择适当的 a 的值，代入计算即可得.

【详解】解：原式 $= \left[\frac{a^2}{a+1} - \frac{(a+1)(a-1)}{a+1} \right] \div \frac{(a+1)(a-1)}{(a+1)^2}$

$$= \left(\frac{a^2}{a+1} - \frac{a^2 - 1}{a+1} \right) \cdot \frac{(a+1)^2}{(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{1}{a+1} \cdot \frac{a+1}{a-1}$$

$$= \frac{1}{a-1},$$

$$\because a+1 \neq 0, a-1 \neq 0,$$

$$\therefore a \neq -1, a \neq 1,$$

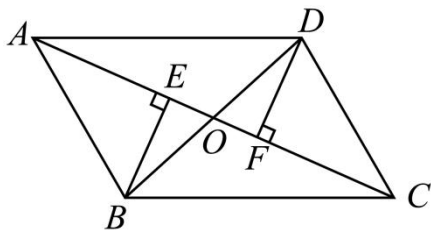
$$\because -2 < a < 3, \text{ 且 } a \text{ 为整数},$$

$$\therefore \text{选择 } a = 0 \text{ 代入得：原式} = \frac{1}{0-1} = -1,$$

$$\text{选择 } a = 2 \text{ 代入得：原式} = \frac{1}{2-1} = 1.$$

【点睛】本题考查了分式的化简求值，熟练掌握分式的运算法则是解题关键.

19. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， AC 与 BD 交于点 O ， $BE \perp AC$ ， $DF \perp AC$ ，垂足分别为点 E 、 F ，且 $AF = CE$ ， $\angle BAC = \angle DCA$ 。求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



【答案】见详解

【解析】

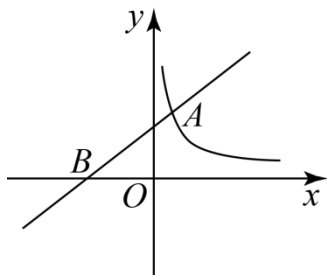
【分析】先证明 $\triangle AEB \cong \triangle CFD$ (ASA)，再证明 $AB = CD, AB \parallel CD$ ，再由平行四边形的判定即可得出结论.

【详解】证明： $\because BE \perp AC, DF \perp AC$ ，
 $\therefore \angle AEB = \angle CFD = 90^\circ$ ，
 $\because AF = CE, AE = AF - EF, CF = CE - EF$ ，
 $\therefore AE = CF$ ，
 又 $\because \angle BAC = \angle DCA$ ，
 $\therefore \triangle AEB \cong \triangle CFD$ (ASA)，
 $\therefore AB = CD$ ，
 $\because \angle BAC = \angle ACD$ ，
 $\therefore AB \parallel CD$ ，

四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

【点睛】本题考查了平行四边形的判定、全等三角形的判定与性质等知识，熟练掌握平行四边形的判定，证明三角形全等是解题的关键.

20. 如图，一次函数 $y = kx + \frac{9}{4}$ (k 为常数， $k \neq 0$) 的图象与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ (m 为常数， $m \neq 0$) 的图象在第一象限交于点 $A(1, n)$ ，与 x 轴交于点 $B(-3, 0)$.



(1) 求一次函数和反比例函数的解析式.

(2) 点 P 在 x 轴上， $\triangle ABP$ 是以 AB 为腰的等腰三角形，请直接写出点 P 的坐标.

【答案】 (1) 一次函数的解析式为 $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$ ，反比例函数的解析式为 $y = \frac{3}{x}$

(2) $(-8, 0)$ 或 $(2, 0)$ 或 $(5, 0)$

【解析】

【分析】 (1) 根据待定系数法，把已知点代入再解方程即可得出答案；

(2) 首先利用勾股定理求得出 AB 的长，再分两种情形讨论即可.

【小问 1 详解】

解：把点 $B(-3, 0)$ 代入一次函数 $y = kx + \frac{9}{4}$ 得，

$$-3k + \frac{9}{4} = 0,$$

解得： $k = \frac{3}{4}$ ，

故一次函数的解析式为 $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$ ，

把点 $A(1, n)$ 代入 $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$ ，得 $n = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3$ ，

$\therefore A(1, 3)$ ，

把点 $A(1, 3)$ 代入 $y = \frac{m}{x}$ ，得 $m = 3$ ，

故反比例函数的解析式为 $y = \frac{3}{x}$ ；

【小问 2 详解】

解： $B(-3, 0)$ ， $A(1, 3)$ ， $AB = 5$ ，

当 $AB = PB = 5$ 时， $P(-8, 0)$ 或 $(2, 0)$ ，

当 $PA = AB$ 时，点 P, B 关于直线 $x = 1$ 对称，

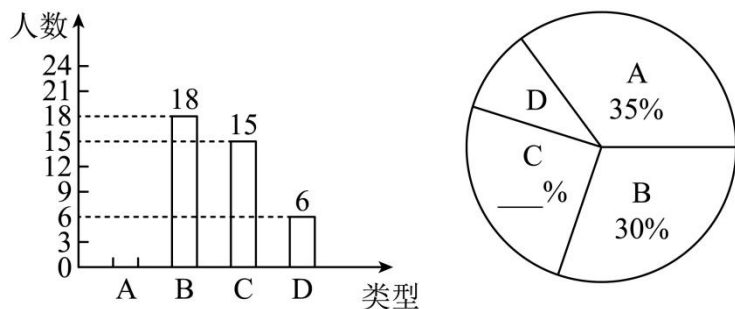
$\therefore P(5, 0)$ ，

综上所述：点 P 的坐标为 $(-8, 0)$ 或 $(2, 0)$ 或 $(5, 0)$ 。

【点睛】 本题是反比例函数综合题，主要考查了函数图象上点的坐标的特征，等腰三角形的性质等知识，运用分类思想是解题的关键。

四、实践应用题 (本大题共 4 个小题，第 21 小题 6 分，第 22、23、24 小题各 8 分，共 30 分)

21. “双减”政策实施后，某校为丰富学生的课余生活，开设了 A 书法， B 绘画， C 舞蹈， D 跆拳道四类兴趣班。为了解学生对这四类兴趣班的喜爱情况，随机抽取该校部分学生进行了问卷调查，并将调查结果整理后绘制成两幅不完整的统计图。请根据统计图信息回答下列问题。



- (1) 本次抽取调查学生共有_____人，估计该校 3000 名学生喜爱“跆拳道”兴趣班的人数约为_____人.
- (2) 请将以上两个统计图补充完整.
- (3) 甲、乙两名学生要选择参加兴趣班，若他们每人从 A, B, C, D 四类兴趣班中随机选取一类，请用画树状图或列表法，求两人恰好选择同一类的概率.

【答案】(1) 60, 300

(2) 见解析 (3) $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】(1) 根据喜欢绘画的条形统计图和扇形统计图信息即可得本次抽取调查学生的总人数，再利用 3000 乘以喜欢跆拳道学生所占百分比即可得；

(2) 先求出喜欢书法的学生人数，据此补全条形统计图，再求出喜欢舞蹈和跆拳道的学生所占百分比，据此补全扇形统计图即可得；

(3) 先画出树状图，从而可得甲、乙两名学生选择参加兴趣班的所有等可能的结果，再找出两人恰好选择同一类的结果，然后利用概率公式计算即可得.

【小问 1 详解】

解：本次抽取调查学生的总人数为 $18 \div 30\% = 60$ (人)，

估计该校 3000 名学生喜爱“跆拳道”兴趣班的人数约为 $3000 \times \frac{6}{60} = 300$ (人)，

故答案为：60, 300.

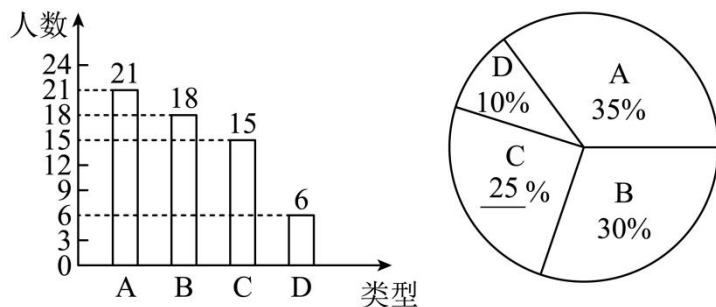
【小问 2 详解】

解：喜欢书法的学生人数 $60 \times 35\% = 21$ (人)，

喜欢舞蹈的学生所占百分比为 $\frac{15}{60} \times 100\% = 25\%$ ，

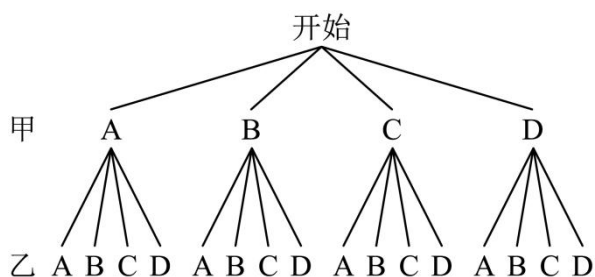
喜欢跆拳道的学生所占百分比为 $\frac{6}{60} \times 100\% = 10\%$.

则补全两个统计图如下：



【小问 3 详解】

解：由题意，画树状图如下：



由图可知，甲、乙两名学生选择参加兴趣班的所有等可能的结果共有 16 种，其中，两人恰好选择同一类的结果有 4 种，

则两人恰好选择同一类的概率为 $P = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ ，

答：两人恰好选择同一类的概率为 $\frac{1}{4}$ 。

【点睛】本题考查了条形统计图和扇形统计图的信息关联、画条形统计图和扇形统计图、利用列举法求概率，熟练掌握统计调查的相关知识和列举法是解题关键。

22. “广安盐皮蛋”是小平故里的名优特产，某超市销售 A、B 两种品牌的盐皮蛋，若购买 9 箱 A 种盐皮蛋和 6 箱 B 种盐皮蛋共需 390 元；若购买 5 箱 A 种盐皮蛋和 8 箱 B 种盐皮蛋共需 310 元。

(1) A 种盐皮蛋、B 种盐皮蛋每箱价格分别是多少元？

(2) 若某公司购买 A、B 两种盐皮蛋共 30 箱，且 A 种的数量至少比 B 种的数量多 5 箱，又不超过 B 种的 2 倍，怎样购买才能使总费用最少？并求出最少费用。

【答案】(1) A 种盐皮蛋每箱价格是 30 元，B 种盐皮蛋每箱价格是 20 元

(2) 购买 A 种盐皮蛋 18 箱，B 种盐皮蛋 12 箱才能使总费用最少，最少费用为 780 元

【解析】

【分析】(1) 设 A 种盐皮蛋每箱价格是 x 元，B 种盐皮蛋每箱价格是 y 元，根据题意建立方程组，解方程组即可得；

(2) 设购买 A 种盐皮蛋 m 箱，则购买 B 种盐皮蛋 $(30-m)$ 箱，根据题意建立不等式组，解不等式组可得 m 的取值范围，再结合 m 为正整数可得 m 所有可能的取值，然后根据 (1) 的结果逐个计算总费用，找出总费用最少的购买方案即可。

【小问 1 详解】

解：设 A 种盐皮蛋每箱价格是 x 元，B 种盐皮蛋每箱价格是 y 元，

$$\text{由题意得：} \begin{cases} 9x + 6y = 390 \\ 5x + 8y = 310 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 30 \\ y = 20 \end{cases},$$

答：A 种盐皮蛋每箱价格是 30 元，B 种盐皮蛋每箱价格是 20 元.

【小问 2 详解】

解：设购买 A 种盐皮蛋 m 箱，则购买 B 种盐皮蛋 $(30-m)$ 箱，

$\because$ 购买 A 种的数量至少比 B 种的数量多 5 箱，又不超过 B 种的 2 倍，

$$\therefore \begin{cases} m - (30 - m) \geq 5 \\ m \leq 2(30 - m) \end{cases},$$

$$\text{解得} \frac{35}{2} \leq m \leq 20,$$

又 $\because m$ 为正整数，

$\therefore m$ 所有可能的取值为 18, 19, 20,

①当 $m = 18$ ， $30 - m = 12$ 时，购买总费用为 $30 \times 18 + 20 \times 12 = 780$ (元)，

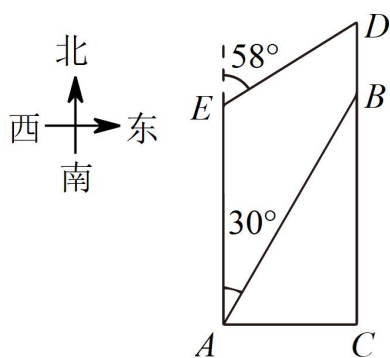
②当 $m = 19$ ， $30 - m = 11$ 时，购买总费用为 $30 \times 19 + 20 \times 11 = 790$ (元)，

③当 $m = 20$ ， $30 - m = 10$ 时，购买总费用为 $30 \times 20 + 20 \times 10 = 800$ (元)，

所以购买 A 种盐皮蛋 18 箱，B 种盐皮蛋 12 箱才能使总费用最少，最少费用为 780 元.

【点睛】本题考查了二元一次方程组的应用、一元一次不等式组的应用，正确建立方程组和不等式组是解题关键.

23. 为了美化环境, 提高民众的生活质量, 市政府在三角形花园 ABC 边上修建一个四边形人工湖泊 $ABDE$, 并沿湖泊修建了人行步道. 如图, 点 C 在点 A 的正东方向 170 米处, 点 E 在点 A 的正北方向, 点 B, D 都在点 C 的正北方向, BD 长为 100 米, 点 B 在点 A 的北偏东 30° 方向, 点 D 在点 E 的北偏东 58° 方向.



(1) 求步道 DE 的长度.

(2) 点 D 处有一个小商店, 某人从点 A 出发沿人行步道去商店购物, 可以经点 B 到达点 D , 也可以经点 E 到达点 D , 请通过计算说明他走哪条路较近. 结果精确到个位) (参考数据:

$\sin 58^\circ \approx 0.85, \cos 58^\circ \approx 0.53, \tan 58^\circ \approx 1.60, \sqrt{3} \approx 1.73$)

【答案】(1) 200 米

(2) $A \rightarrow B \rightarrow D$ 这条路较近, 理由见解析

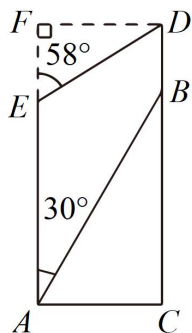
【解析】

【分析】(1) 根据矩形的性质和锐角三角函数中的正弦值即可求出答案.

(2) 根据矩形的性质和锐角三角函数中的正切值、余弦值分别求出 AB 和 AE 的长度, 比较 $AB + BD$ 和 $AE + ED$ 即可求出答案.

【小问 1 详解】

解: 由题意得, 过点 D 作 DF 垂直 AE 的延长线于点 F , 如图所示,



$\because$ 点 C 在点 A 的正东方向 170 米处, 点 E 在点 A 的正北方向, 点 B, D 都在点 C 的正北方向,

$\therefore AE \perp AC, DC \perp AC,$

$\because DF \perp AF,$

$\therefore \angle EAC = \angle BCA = \angle DFE = 90^\circ,$

$\therefore ACDF$ 为矩形.

$\therefore DF = AC.$

$\therefore AC = 170$ 米,

$\therefore DF = 170$ 米.

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle DFE$ 中, $DE = \frac{DF}{\sin 58^\circ} = \frac{170}{0.85} = 200$ 米.

故答案为: 200 米.

【小问 2 详解】

解: $A \rightarrow B \rightarrow D$ 这条路较近, 理由如下:

$\therefore \angle EAB = 30^\circ$, $\angle EAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 60^\circ$.

$\therefore AC = 170$ 米, $\sqrt{3} \approx 1.73$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BAC$ 中, $AB = \frac{AC}{\cos 60^\circ} = 170 \div \frac{1}{2} = 340$ 米.

$CB = AC \cdot \tan 60^\circ = 170\sqrt{3} = 170 \times 1.73 = 294.1$ 米.

$\therefore ACDF$ 为矩形, $BD = 100$ 米,

$\therefore CD = AF = CB + DB = 294.1 + 100 = 394.1$ 米.

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle DFE$ 中, $EF = \frac{DF}{\tan 58^\circ} = \frac{170}{1.60} = 106.25$ 米.

$\therefore AE = AF - EF = 394.1 - 106.25 = 287.85$ 米.

$\therefore$ 结果精确到个位,

$\therefore AE + ED = 287.85 + 200 = 487.85 \approx 488$ 米.

$AB + DB = 340 + 100 = 440$ 米.

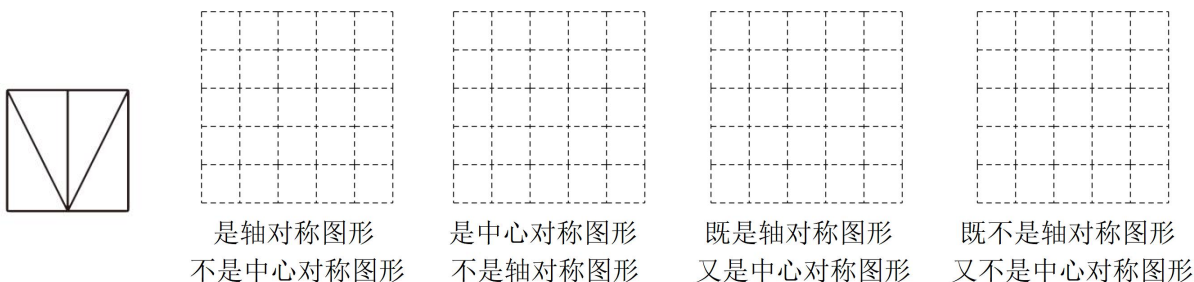
$\therefore AE + ED > AB + DB$.

$\therefore$ 从 $A \rightarrow B \rightarrow D$ 这条路较近.

故答案为: $A \rightarrow B \rightarrow D$ 这条路较近.

【点睛】 本题考查了解直角三角形的实际应用, 涉及到锐角三角函数正弦、余弦、正切, 矩形的性质, 解题的关键在于构建直角三角形利用三角函数求边长.

24. 将边长为 2 的正方形剪成四个全等的直角三角形, 用这四个直角三角形拼成符合要求的四边形, 请在下列网格中画出你拼成的四边形 (注: ①网格中每个小正方形的边长为 1; ②所拼的图形不得与原图形相同; ③四边形的各顶点都在格点上).

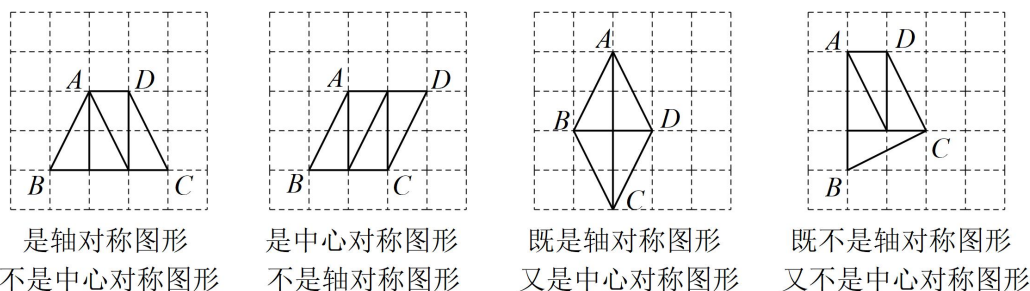


【答案】见解析（答案不唯一，符合题意即可）

【解析】

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的性质进行作图即可.

- 【详解】解：①要求是轴对称图形但不是中心对称图形，则可作等腰梯形，如图四边形 $ABCD$ 即为所求；
- ②要求是中心对称图形但不是轴对称图形，则可作一般平行四边形，如图四边形 $ABCD$ 即为所求；
- ③要求既是轴对称图形又是中心对称图形，则可作菱形、矩形等，如图四边形 $ABCD$ 即为所求；
- ④要求既不是轴对称图形又不是中心对称图形，则考虑作任意四边形，如图四边形 $ABCD$ 即为所求.

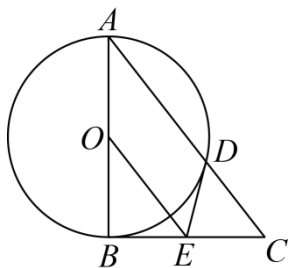


【点睛】本题

考查轴对称图形和中心对称图形的概念及作图，轴对称图形：把一个图形沿着某条直线折叠，能够与另一个图形重合；中心对称图形：把一个图形绕着某个点旋转 180° 能够和原图形重合.

五、推理论证题

25. 如图，以 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的直角边 AB 为直径作 $\odot O$ ，交斜边 AC 于点 D ，点 E 是 BC 的中点，连接 OE 、 DE .



(1) 求证： DE 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 若 $\sin C = \frac{4}{5}$, $DE = 5$, 求 AD 的长.

(3) 求证: $2DE^2 = CD \cdot OE$.

【答案】(1) 见详解 (2) $\frac{32}{3}$

(3) 见详解

【解析】

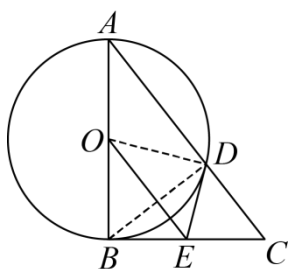
【分析】(1) 连接 BD, OD , 先根据直角三角形的性质, 证明 $BE = DE$, 再证明 $\triangle OBE \cong \triangle ODE$ (SSS) 即可;

(2) 由 (1) 中结论, 得 $BC = 2DE = 10$, 先根据三角函数及勾股定理求出 BD, CD 的长, 再证明 $\triangle ADB \sim \triangle BDC$ 即可;

(3) 证明 $\triangle OBE \sim \triangle BDC$ 即可得出结论.

【小问 1 详解】

证明: 连接 BD, OD ,



在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$, 即 $BD \perp AC$,

在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中, 点 E 是 BC 的中点,

$\therefore BE = DE = \frac{1}{2}BC$,

又 $\because OB = OD, OE = OE$,

$\therefore \triangle OBE \cong \triangle ODE$ (SSS),

$\therefore \angle OBE = \angle ODE = 90^\circ$,

$\therefore D$ 在 $\odot O$ 上

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线.

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 中结论, 得 $BC = 2DE = 10$,

$$\text{在 Rt}\triangle BDC \text{ 中, } \sin C = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{10} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore BD = 8, CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = 6,$$

$$\because \angle A + \angle C = 90^\circ, \angle A + \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle ABD,$$

$$\because \angle ADB = \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\triangle ADB \sim \triangle BDC,$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD}, AD = \frac{BD^2}{CD} = \frac{8^2}{6} = \frac{32}{3};$$

【小问 3 详解】

$$\text{证明: } \because OA = OB, BE = CE,$$

$$\therefore OE \parallel AC,$$

$$\therefore \angle OEB = \angle C,$$

$$\because \angle OBE = \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle OBE \sim \triangle BDC,$$

$$\therefore \frac{OE}{BC} = \frac{BE}{CD},$$

由 (1) 中结论 $\triangle OBE \cong \triangle ODE$, 得 $BE = DE$,

$$BC = 2DE,$$

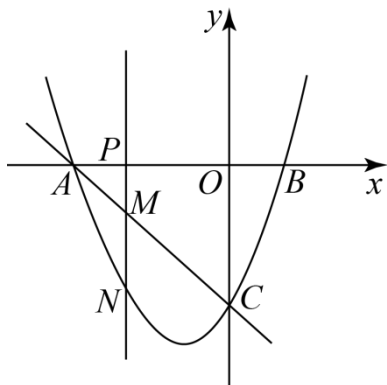
$$\therefore \frac{OE}{2DE} = \frac{DE}{CD},$$

$$\text{即 } 2DE^2 = CD \cdot OE.$$

【点睛】此题是圆的综合题，主要考查了切线的性质，直角三角形的性质，三角形的中位线定理，相似三角形的判定和性质，锐角三角函数，判断出 $\triangle ADB \sim \triangle BDC$ 是解本题的关键。

六、拓展探究题

26. 如图，二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象交 x 轴于点 A , B ，交 y 轴于点 C ，点 B 的坐标为 $(1, 0)$ ，对称轴是直线 $x = -1$ ，点 P 是 x 轴上一动点， $PM \perp x$ 轴，交直线 AC 于点 M ，交抛物线于点 N 。



- (1) 求这个二次函数的解析式.
- (2) 若点 P 在线段 AO 上运动 (点 P 与点 A 、点 O 不重合), 求四边形 $ABCN$ 面积的最大值, 并求出此时点 P 的坐标.
- (3) 若点 P 在 x 轴上运动, 则在 y 轴上是否存在点 Q , 使以 M 、 N 、 C 、 Q 为顶点的四边形是菱形? 若存在, 请直接写出所有满足条件的点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $y = x^2 + 2x - 3$

(2) $S_{\text{四边形}ABCN}$ 最大值为 $\frac{75}{8}$, 此时 $P\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

(3) $Q(0, -1)$ 或 $Q(0, 3\sqrt{2} - 1)$ 或 $Q(0, -1 - 3\sqrt{2})$

【解析】

【分析】(1) 先根据二次函数对称轴公式求出 $b = 2$, 再把 $B(1, 0)$ 代入二次函数解析式中进行求解即可;

(2) 先求出 $A(-3, 0)$, $C(0, -3)$, 则 $AB = 4$, $OC = 3$, 求出直线 AC 的解析式为 $y = -x - 3$, 设 $P(m, 0)$, 则 $M(m, -m - 3)$, $N(m, m^2 + 2m - 3)$, 则 $MN = -m^2 - 3m$; 再由 $S_{\text{四边形}ABCN} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACN}$ 得到

$$S_{\text{四边形}ABCN} = -\frac{3}{2}\left(m + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{75}{8},$$

故当 $m = -\frac{3}{2}$ 时, $S_{\text{四边形}ABCN}$ 最大, 最大值为 $\frac{75}{8}$, 此时点 P 的坐标为

$$\left(-\frac{3}{2}, 0\right);$$

(3) 分如图 3-1, 图 3-2, 图 3-3, 图 3-4, 图 3-5, 图 3-6 所示, MC 为对角线和边, 利用菱形的性质进行列式求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的对称轴为直线 $x = -1$,

$$\therefore -\frac{b}{2} = -1,$$

$$\therefore b = 2,$$

$$\therefore \text{二次函数经过点 } B(1,0),$$

$$\therefore 1^2 + b + c = 0, \text{ 即 } 1 + 2 + c = 0,$$

$$\therefore c = -3,$$

$$\therefore \text{二次函数解析式为 } y = x^2 + 2x - 3;$$

【小问 2 详解】

解： $\because$ 二次函数经过点 $B(1,0)$ ，且对称轴为直线 $x = -1$ ，

$$\therefore A(-3,0),$$

$$\therefore AB = 4,$$

$\because$ 二次函数 $y = x^2 + 2x - 3$ 与 y 轴交于点 C ，

$$\therefore C(0, -3),$$

$$\therefore OC = 3;$$

设直线 AC 的解析式为 $y = kx + b'$ ，

$$\therefore \begin{cases} -3k + b' = 0 \\ b' = -3 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -1 \\ b' = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y = -x - 3$ ，

设 $P(m, 0)$ ，则 $M(m, -m - 3)$ ， $N(m, m^2 + 2m - 3)$ ，

$$\therefore MN = -m - 3 - (m^2 + 2m - 3) = -m^2 - 3m;$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot OC = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6,$$

$$\therefore S_{\text{四边形} ABCN} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACN}$$

$$= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle AMN} + S_{\triangle CMN}$$

$$= \frac{1}{2} AP \cdot MN + \frac{1}{2} OP \cdot MN + 6$$

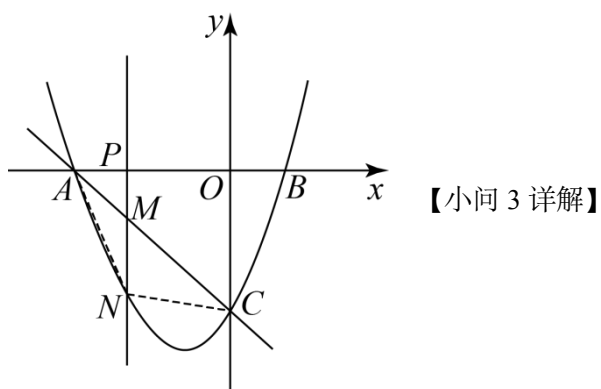
$$= \frac{1}{2} \times 3(-m^2 - 3m) + 6$$

$$= -\frac{3}{2} \left(m + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{75}{8},$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < 0,$$

$$\therefore \text{当 } m = -\frac{3}{2} \text{ 时, } S_{\text{四边形}ABCN} \text{ 最大, 最大值为 } \frac{75}{8},$$

$$\therefore \text{此时点 } P \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{3}{2}, 0\right);$$



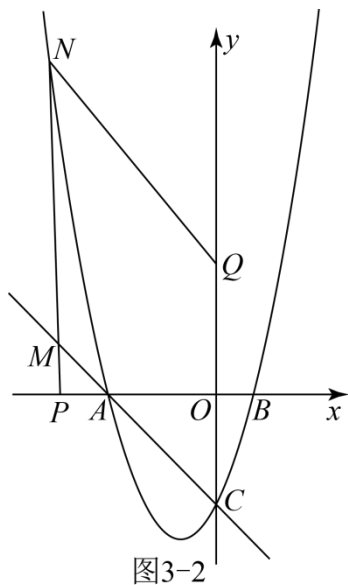
$$\text{解: 设 } P(m, 0), \text{ 则 } M(m, -m-3), N(m, m^2+2m-3),$$

$$\because PM \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore PM \parallel y \text{ 轴, 即 } MN \parallel CQ,$$

$$\therefore MN、CQ \text{ 是以 } M、N、C、Q \text{ 为顶点的菱形的边};$$

如图 3-1 所示, 当 MC 为对角线时,



$$\therefore OA = OC = 3,$$

$\therefore \triangle AOC$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle ACO = 45^\circ$,

$\because QM = QC$,

$\therefore \angle QMC = \angle QCM = 45^\circ$,

$\therefore \angle MQC = 90^\circ$,

$\therefore MQ \perp y$ 轴,

$\therefore NC \perp y$ 轴, 即 $NC \parallel x$ 轴,

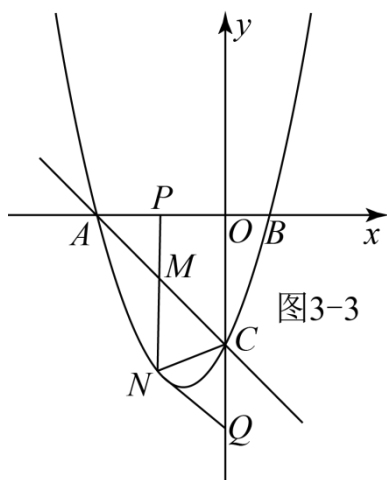
$\therefore$ 点 C 与点 N 关于抛物线对称轴对称,

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(-2, -3)$,

$\therefore CQ = CN = 2$,

$\therefore Q(0, -1)$;

如图 3-2 所示, 当 MC 为边时, 则 $MN = CM$,



$\therefore M(m, -m-3), C(0, -3), N(m, m^2+2m-3)$

$\therefore CM = \sqrt{m^2 + [(-m-3) - (-3)]^2} = -\sqrt{2}m, MN = m^2 + 2m - 3 - (-m-3) = m^2 + 3m$

$\therefore m^2 + 3m = -\sqrt{2}m$,

解得 $m = -3 - \sqrt{2}$ 或 $m = 0$ (舍去),

$\therefore CQ = CM = -\sqrt{2}m = 3\sqrt{2} + 2$,

$\therefore Q(0, 3\sqrt{2} - 1)$;

如图 3-3 所示，当 MC 为边时，则 $MN = CM$ ，

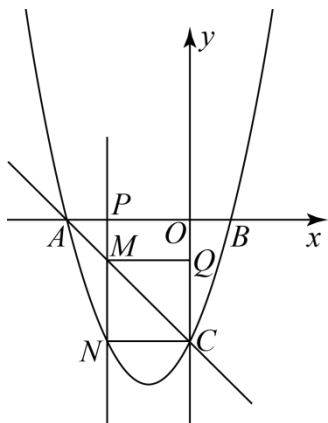


图3-1

同理可得 $CM = -\sqrt{2}m$ ，

$$\therefore -m^2 - 3m = -\sqrt{2}m,$$

解得 $m = \sqrt{2} - 3$ 或 $m = 0$ (舍去)，

$$\therefore CQ = CM = -\sqrt{2}m = 3\sqrt{2} - 2,$$

$$\therefore Q(0, -1 - 3\sqrt{2});$$

如图 3-4 所示，当 MC 为边时，则 $CM = MN$ ，

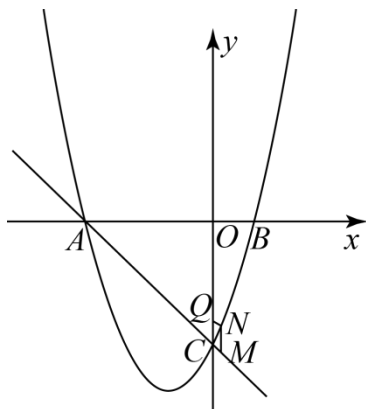


图3-4

同理可得 $m^2 + 3m = \sqrt{2}m$ ，

解得 $m = \sqrt{2} - 3$ (舍去) 或 $m = 0$ (舍去)；

如图 3-5 所示，当 MC 为对角线时，

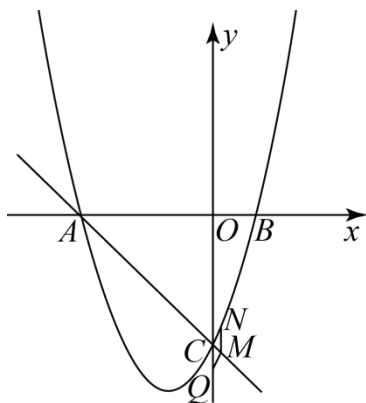


图3-5

$$\therefore \angle MCQ = \angle ACO = 45^\circ,$$

$$\therefore CQ = MQ,$$

$$\therefore \angle QCM = \angle QMC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle MQC = 90^\circ,$$

$$\therefore MQ \perp y \text{ 轴},$$

$$\therefore NC \perp y \text{ 轴}, \text{ 这与题意相矛盾},$$

$\therefore$ 此种情形不存在

如图 3-6 所示, 当 MC 为对角线时, 设 MC , QN 交于 S ,

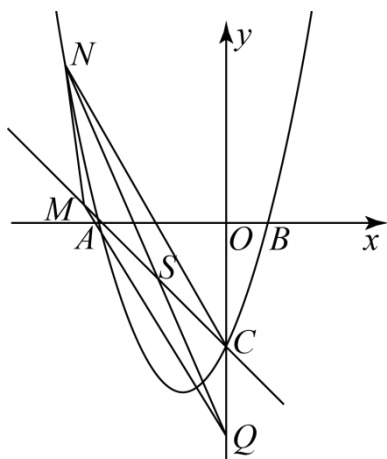


图3-6

$$\therefore MN \parallel y \text{ 轴},$$

$$\therefore \angle NMC = 180^\circ - \angle MCO = 135^\circ,$$

$$\therefore NQ \perp CM,$$

$$\therefore \angle NSM = 90^\circ, \text{ 这与三角形内角和为 } 180^\circ \text{ 度矛盾},$$

∴此种情况不存在；

综上所述， $Q(0, -1)$ 或 $Q(0, 3\sqrt{2} - 1)$ 或 $Q(0, -1 - 3\sqrt{2})$.

【点睛】 本题主要考查了二次函数综合，一次函数与几何综合，菱形的性质，勾股定理，求二次函数解析式等等，利用分类讨论的思想求解是解题的关键.

