

2023 年四川省广元市中考数学试卷

一、选择题（每小题给出的四个选项中，只有一个符合题意.每小题 3 分，共 30 分）

1. $-\frac{1}{2}$ 的相反数是 ()

- A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据相反数的性质，互为相反数的两个数的和为 0 即可求解.

【详解】解：因为 $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$,

所以 $-\frac{1}{2}$ 的相反数是 $\frac{1}{2}$.

故选：D.

【点睛】本题考查求一个数的相反数，掌握相反数的性质是解题关键.

2. 下列计算正确的是()

- A. $2ab - 2a = b$ B. $a^2 \cdot a^3 = a^6$
C. $3a^2b \div a = 3a$ D. $(a+2)(2-a) = 4 - a^2$

【答案】D

【解析】

【分析】根据合并同类项，同底数幂的乘法，同底数幂的除法，平方差公式进行计算即可求解.

【详解】A. $2ab - 2a \neq b$ ，故该选项不正确，不符合题意；

B. $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故该选项不正确，不符合题意；

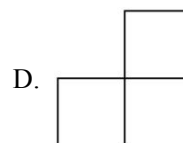
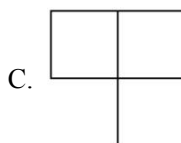
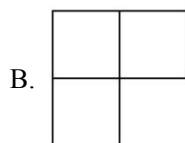
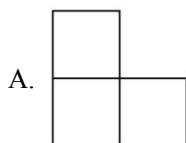
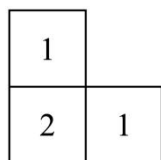
C. $3a^2b \div a = 3ab$ ，故该选项不正确，不符合题意；

D. $(a+2)(2-a) = 4 - a^2$ ，故该选项正确，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了合并同类项，同底数幂的乘法，同底数幂的除法，平方差公式，熟练掌握以上知识是解题的关键.

3. 某几何体是由四个大小相同的小立方块拼成，其俯视图如图所示，图中数字表示该位置上的小立方块个数，则这个几何体的左视图是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】先细心观察原立体图形中正方体的位置关系，从左面看去，一共两排，左边底部有1个小正方形，右边有2个小正方形．结合四个选项选出答案．

【详解】解：从左面看去，一共两排，左边底部有1个小正方形，右边有2个小正方形．
故选：D．

【点睛】本题考查了由三视图判断几何体，解题的关键是具有几何体的三视图及空间想象能力．

4. 某中学开展“读书节活动”，该中学某语文老师随机抽样调查了本班10名学生平均每周的课外阅读时间，统计如表：

每周课外阅读时间（小时）	2	4	6	8
学生数（人）	2	3	4	1

下列说法错误的是（ ）

- A. 众数是1
B. 平均数是4.8
C. 样本容量是10
D. 中位数是5

【答案】A

【解析】

【分析】根据众数、平均数、样本的容量、中位数的定义，逐项分析判断即可求解．

【详解】解：A.6出现的次数最多，则众数是6，故该选项不正确，符合题意；

B. 平均数是 $\frac{2 \times 2 + 4 \times 3 + 6 \times 4 + 8 \times 1}{10} = 4.8$ ，故该选项正确，不符合题意；

C. 样本容量是 $2 + 3 + 4 + 1 = 10$ ，故该选项正确，不符合题意；

D. 中位数是第5个和第6个数的平均数即 $\frac{4 + 6}{2} = 5$ ，故该选项正确，不符合题意；

故选：A．

【点睛】本题考查了众数、平均数、样本的容量、中位数，熟练掌握众数、平均数、样本的容量、中位数的定义是解题的关键．

5. 关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - 3x + \frac{3}{2} = 0$ 根的情况，下列说法中正确的是（ ）

- A. 有两个不相等的实数根
B. 有两个相等的实数根
C. 没有实数根
D. 无法确定

【答案】C

【解析】

【分析】直接利用一元二次方程根的判别式即可得.

【详解】解： $2x^2 - 3x + \frac{3}{2} = 0$ ，

其中 $a = 2$ ， $b = -3$ ， $c = \frac{3}{2}$ ，

$$\therefore \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{3}{2} = -3 < 0,$$

$\therefore$ 方程没有实数根.

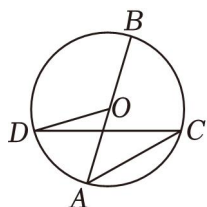
故选：C.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程根的判别式，对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)，若

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ，则方程有两个不相等的实数根，若 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，则方程有两个相等的实数根，若

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ，则方程没有实数根.

6. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C, D 在 $\odot O$ 上，连接 CD, OD, AC ，若 $\angle BOD = 124^\circ$ ，则 $\angle ACD$ 的度数是（ ）



- A. 56°
B. 33°
C. 28°
D. 23°

【答案】C

【解析】

【分析】根据圆周角定理计算即可.

【详解】解： $\because \angle BOD = 124^\circ$ ，

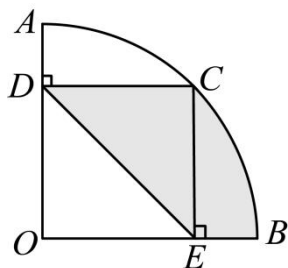
$$\therefore \angle AOD = 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \frac{1}{2} \angle AOD = 28^\circ,$$

故选：C.

【点睛】此题考查圆周角定理，熟知同弧所对的圆周角是圆心角的一半是解题的关键.

7. 如图，半径为5的扇形 AOB 中， $\angle AOB = 90^\circ$ ， C 是 $\widehat{AB}$ 上一点， $CD \perp OA$ ， $CE \perp OB$ ，垂足分别为 D ， E ，若 $CD = CE$ ，则图中阴影部分面积为()



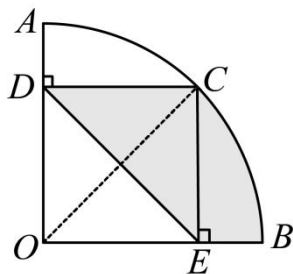
- A. $\frac{25\pi}{16}$ B. $\frac{25\pi}{8}$ C. $\frac{25\pi}{6}$ D. $\frac{25\pi}{4}$

【答案】B

【解析】

【分析】连接 OC ，证明四边形 $CDOE$ 是正方形，进而得出 $S_{\triangle CDE} = S_{\triangle OCE}$ ， $\angle COE = 45^\circ$ ，然后根据扇形面积公式即可求解.

【详解】解：如图所示，连接 OC ，



$$\because CD \perp OA, CE \perp OB, \angle AOB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $CDOE$ 是矩形,

$$\because CD = CE,$$

$\therefore$ 四边形 $CDOE$ 是正方形,

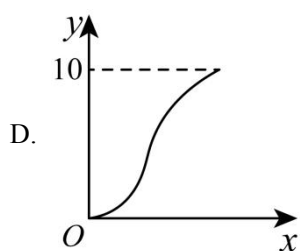
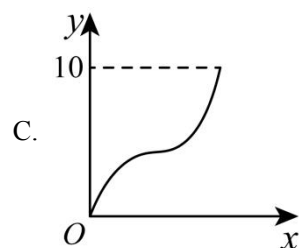
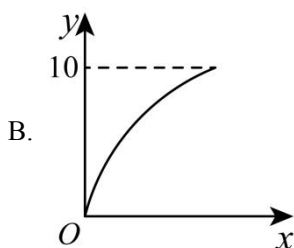
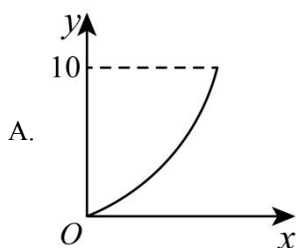
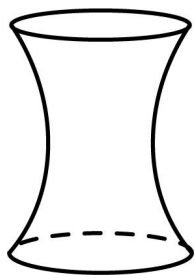
$$\therefore S_{\triangle CDE} = S_{\triangle OCE}, \angle COE = 45^\circ,$$

$$\therefore \text{图中阴影部分面积} = S_{\text{扇形}BOC} = \frac{45}{360} \pi \times 5^2 = \frac{25}{8} \pi,$$

故选：B.

【点睛】本题考查了正方形的性质与判定，求扇形面积，证明四边形 $CDOE$ 是正方形是解题的关键.

8. 向高为10的容器(形状如图)中注水，注满为止，则水深 h 与注水量 v 的函数关系的大致图象是()



【答案】D

【解析】

【分析】从水瓶的构造形状上看，从底部到顶部的变化关系为：开始宽，逐渐细小，再变宽，再从函数的图象上看，选出答案.

【详解】解：从水瓶的构造形状上看，从底部到顶部的变化关系为：开始宽，逐渐细小，再变宽.

则注入的水量 v 随水深 h 的变化关系为：先慢再快，最后又变慢，

那么从函数的图象上看，

C 对应的图象变化为先快再慢，最后又变快，不符合；

A、B 对应的图象中间没有变化，只有 D 符合条件.

故选：D.

【点睛】本题主要考查函数的定义及函数的图象的关系，抓住变量之间的变化关系是解题的关键.

9. 近年来，我市大力发展交通，建成多条快速通道，小张开车从家到单位有两条路线可选择，路线 a 为全程 10 千米的普通道路，路线 b 包含快速通道，全程 7 千米，走路线 b 比路线 a 平均速度提高 40%，时间节省 10 分钟，求走路线 a 和路线 b 的平均速度分别是多少？设走路线 a 的平均速度为 x 千米/小时，依题意，可列方程为（ ）

A. $\frac{10}{x} - \frac{7}{(1+40\%)x} = \frac{10}{60}$

B. $\frac{10}{x} - \frac{7}{(1+40\%)x} = 10$

$$C. \frac{7}{(1+40\%)x} - \frac{10}{x} = \frac{10}{60}$$

$$D. \frac{7}{(1+40\%)x} - \frac{10}{x} = 10$$

【答案】A

【解析】

【分析】若设路线 a 时的平均速度为 x 千米/小时，则走路线 b 时的平均速度为 $(1+40\%)x$ 千米/小时，根据路线 b 的全程比路线 a 少用 10 分钟可列出方程.

【详解】解：由题意可得走路线 b 时的平均速度为 $(1+40\%)x$ 千米/小时，

$$\therefore \frac{10}{x} - \frac{7}{(1+40\%)x} = \frac{10}{60},$$

故选：A.

【点睛】本题考查了由实际问题抽象出分式方程，找到关键描述语，找到合适的等量关系是解决问题的关键.

10. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数且 $a < 0$) 过 $(-1, 0)$ 和 $(m, 0)$ 两点，且 $3 < m < 4$ ，下列四个结论：① $abc > 0$ ；② $3a + c > 0$ ；③ 若抛物线过点 $(1, 4)$ ，则 $-1 < a < -\frac{2}{3}$ ；④ 关于 x 的方程

$a(x+1)(x-m) = 3$ 有实数根，则其中正确的结论有 ()

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】由抛物线过 $(-1, 0)$ 和 $(m, 0)$ 两点得到对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = \frac{m-1}{2}$ ，且 $3 < m < 4$ ， $a < 0$ 所以得到 $1 < -\frac{b}{2a} < \frac{3}{2}$ ，进而判断 abc 的符号，得到 $abc < 0$ ， $3a + c > 0$ ；抛物线过点 $(-1, 0)$ 和 $(1, 4)$ ，代入可得 $a - b + c = 0$ 和 $a + b + c = 4$ ，解得 $b = 2$ ，又由 $1 < -\frac{b}{2a} < \frac{3}{2}$ ，得 $-1 < a < -\frac{2}{3}$ ；对称轴为直线 $x = \frac{m-1}{2}$ ， $a < 0$ ，开口向下，所以 y 有最大值为 $-a\left(\frac{m+1}{2}\right)^2$ ，且 $3 < m < 4$ ，无法判断关于 x 的方程 $a(x+1)(x-m) = 3$ 是否有实数根.

【详解】解：已知抛物线过 $(-1, 0)$ 和 $(m, 0)$ 两点，则对称轴为直线 $x = \frac{m+(-1)}{2} = \frac{m-1}{2}$ ，

$\therefore 3 < m < 4$ ，所以 $1 < \frac{m-1}{2} < \frac{3}{2}$ ，即 $1 < -\frac{b}{2a} < \frac{3}{2}$ ， $a < 0$ ，则 $b > 0$ ，

当 $x = -1$ 时, $y = a(-1)^2 + b(-1) + c = a - b + c = 0$, 则 $c > 0$, 所以 $abc < 0$, 故结论①错误;

因为 $-\frac{b}{2a} > 1$, 所以 $2a > -b$, $3a + c = a + 2a + c > a - b + c$, 即 $3a + c > 0$, 故结论②正确;

抛物线过 $(-1, 0)$ 和 $(1, 4)$ 两点, 代入可得 $a - b + c = 0$ 和 $a + b + c = 4$, 两式相减解得 $b = 2$, 由

$1 < -\frac{b}{2a} < \frac{3}{2}$ 可得 $1 < -\frac{2}{2a} < \frac{3}{2}$, 解得 $-1 < a < -\frac{2}{3}$, 故结论③正确;

对称轴为直线 $x = \frac{m-1}{2}$, $a < 0$, 开口向下,

$$\therefore y = a(x+1)(x-m) = a\left[x^2 + (1-m)x - m\right] = a\left(x + \frac{1-m}{2}\right)^2 - am - a\left(\frac{1-m}{2}\right)^2 = a\left(x + \frac{1-m}{2}\right)^2 - a\left(\frac{1+m}{2}\right)^2,$$

$\therefore$ 所以 y 有最大值为 $-a\left(\frac{m+1}{2}\right)^2$,

$\therefore -a\left(\frac{m+1}{2}\right)^2 > 3$ 不一定成立,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $a(x+1)(x-m) = 3$ 有实数根无法确定, 故结论④错误.

故选: B

【点睛】 本题主要考查二次函数的图象与性质, 根据题意判断 a, b, c 与 0 的关系, 再借助点的坐标得出结论.

二、填空题 (把正确答案直接写在答题卡对应题目的横线上. 每小题 4 分, 共 24 分)

11. 若 $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$ 有意义, 则实数 x 的取值范围是_____

【答案】 $x > 3$

【解析】

【分析】 根据分式有意义的条件, 二次根式有意义的条件计算即可.

【详解】 $\because \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ 有意义,

$\therefore x - 3 \geq 0$, 且 $x - 3 \neq 0$,

解得 $x > 3$,

故答案为: $x > 3$.

【点睛】 本题考查了分式有意义的条件, 二次根式有意义的条件, 熟练掌握分式有意义的条件, 二次根式有意义的条件是解题的关键.

12. 广元市聚焦“1345”发展战略和“十四五”规划, 牢牢牵住重点项目建设“牛鼻子”, 《2023 年广元市

重点项目名单》共编列项目 300 个，其中生态环保项目 10 个，计划总投资约 45 亿元，将 45 亿这个数据用科学记数法表示为 _____.

【答案】 4.5×10^9

【解析】

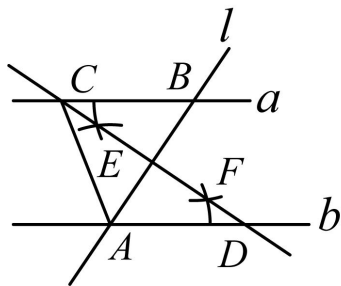
【分析】 根据科学记数法的表示方法求解即可.

【详解】 解：将 45 亿这个数据用科学记数法表示为 4.5×10^9 .

故答案为： 4.5×10^9 .

【点睛】 此题考查了科学记数法的表示方法，解题的关键是熟练掌握科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同.

13. 如图， $a \parallel b$ ，直线 l 与直线 a ， b 分别交于 B ， A 两点，分别以点 A ， B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧，两弧相交于点 E ， F ，作直线 EF ，分别交直线 a ， b 于点 C ， D ，连接 AC ，若 $\angle CDA = 34^\circ$ ，则 $\angle CAB$ 的度数为 _____.



【答案】 56°

【解析】

【分析】 先判断 EF 为线段 AB 的垂直平分线，即可得 $\angle CAB = \angle CBA$ ， $\angle ACD = \angle BCD$ ，再由 $a \parallel b$ ，可得 $\angle CDA = \angle BCD = 34^\circ$ ，即有 $\angle ACD = \angle BCD = 34^\circ$ ，利用三角形内角和定理可求 $\angle CAB$ 的度数.

【详解】 解：由作图可知 EF 为线段 AB 的垂直平分线，

$$\therefore AC = BC,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle CBA, \quad \angle ACD = \angle BCD,$$

$$\because a \parallel b,$$

$$\therefore \angle CDA = \angle BCD = 34^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCD = 34^\circ,$$

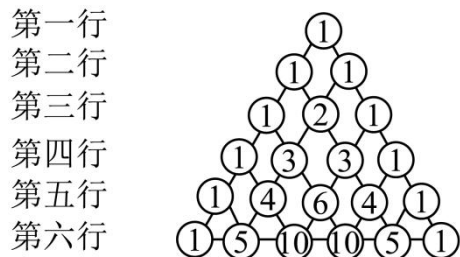
$$\therefore \angle ACD + \angle BCD + \angle CAB + \angle CBA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB = 56^\circ,$$

故答案为： 56° 。

【点睛】本题考查了垂直平分线的作图、垂直平分线的性质、平行线的性质以及三角形内角和定理等知识，判断 EF 为线段 AB 的垂直平分线是解答本题的关键。

14. 在我国南宋数学家杨辉所著的《详解九章算术》(1261 年) 一书中，用如图的三角形解释二项和的乘方规律，因此我们称这个三角形为“杨辉三角”，根据规律第八行从左到右第三个数为 _____。



【答案】 21

【解析】

【分析】根据前六行的规律写出第 7, 8 行的规律进而即可求解。

【详解】解：根据规律可得第七行的规律为 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

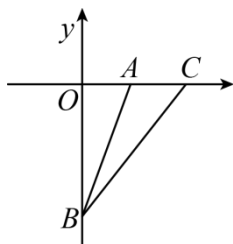
第八行的规律为 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1

$\therefore$ 根据规律第八行从左到右第三个数为 21,

故答案为：21。

【点睛】本题考查了数字类规律，找到规律是解题的关键。

15. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 $A(1, 0)$ ，点 $B(0, -3)$ ，点 C 在 x 轴上，且点 C 在点 A 右方，连接 AB ， BC ，若 $\tan \angle ABC = \frac{1}{3}$ ，则点 C 的坐标为 _____。



【答案】 $\left(0, \frac{9}{4}\right)$

【解析】

【分析】根据已知条件得出 $\angle ABO = \angle ABC$ ，根据等面积法得出 $\frac{AC}{OA} = \frac{CB}{OB}$ ，设 $C(m, 0)$ ，则 $AC = m - 1$ ，

进而即可求解.

【详解】解： $\because$ 点 $A(1,0)$ ，点 $B(0,-3)$ ，

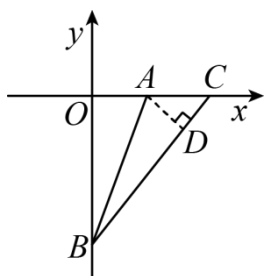
$$\therefore OA=1, OB=3,$$

$$\tan \angle OBA = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \tan \angle ABC = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \angle ABO = \angle ABC,$$

过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D ，



$\because AO \perp BO, AD \perp BC$ ， AB 是 $\angle OBC$ 的角平分线，

$$\therefore AO = AD = 1$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}OA \times OB}{\frac{1}{2}AC \times OB} = \frac{\frac{1}{2}OB \times OA}{\frac{1}{2}BC \times AD}$$

$$\therefore \frac{AC}{OA} = \frac{CB}{OB}$$

设 $C(m,0)$ ，则 $AC = m-1$ ， $BC = \sqrt{3^2 + m^2}$

$$\therefore \frac{m-1}{1} = \frac{\sqrt{3^2 + m^2}}{3}$$

解得： $m = \frac{9}{4}$ 或 $m = 0$ (舍去)

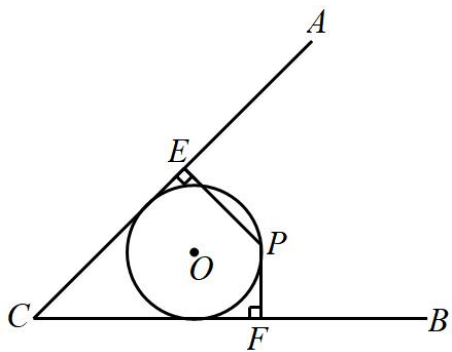
$$\therefore C\left(0, \frac{9}{4}\right)$$

故答案为： $\left(0, \frac{9}{4}\right)$.

【点睛】本题考查了正切的定义，角平分线的性质，勾股定理，熟练掌握角平分线的定义是解题的关键.

16. 如图， $\angle ACB = 45^\circ$ ，半径为 2 的 $\odot O$ 与角的两边相切，点 P 是 $\odot O$ 上任意一点，过点 P 向角的两边

作垂线，垂足分别为 E, F ，设 $t = PE + \sqrt{2}PF$ ，则 t 的取值范围是 _____.

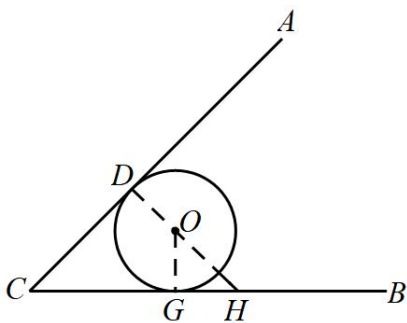


【答案】 $2\sqrt{2} \leq t \leq 2\sqrt{2} + 4$

【解析】

【分析】利用切线的性质以及等腰直角三角形的性质求得 $CD = DH = 2\sqrt{2} + 2$ ，再求得 $t = PE + PQ = EQ$ ，分两种情况讨论，画出图形，利用等腰直角三角形的性质即可求解.

【详解】解：设 $\odot O$ 与 $\angle ACB$ 两边的切点分别为 D, G ，连接 OG, OD ，延长 DO 交 CB 于点 H ，



由 $\angle OGC = \angle ODC = \angle OGH = 90^\circ$ ，

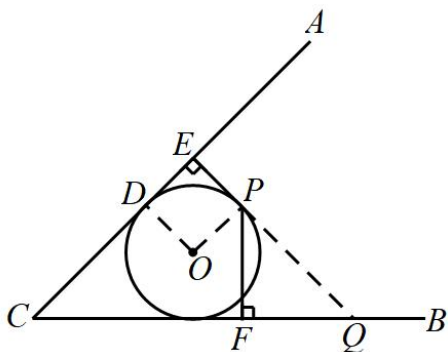
$\therefore \angle ACB = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle OHC = 45^\circ$ ，

$\therefore OH = \sqrt{2}OG = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore CD = DH = 2\sqrt{2} + 2$ ，

如图，延长 EP 交 CB 于点 Q ，



同理 $PQ = \sqrt{2}PF$,

$$\therefore t = PE + \sqrt{2}PF,$$

$$\therefore t = PE + PQ = EQ,$$

当 EQ 与 $\odot O$ 相切时, EQ 有最大或最小值,

连接 OP ,

$\therefore D, E$ 都是切点,

$$\therefore \angle ODE = \angle DEP = \angle OPE = 90^\circ,$$

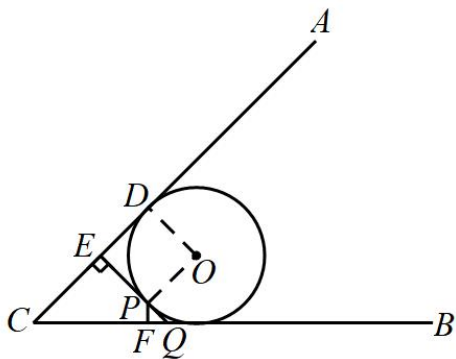
$\therefore$ 四边形 $ODEP$ 是矩形,

$$\therefore OD = OP,$$

$\therefore$ 四边形 $ODEP$ 是正方形,

$$\therefore t \text{ 的最大值为 } EQ = CE = CD + DE = 2\sqrt{2} + 4;$$

如图,



同理, t 的最小值为 $EQ = CE = CD - DE = 2\sqrt{2}$;

综上, t 的取值范围是 $2\sqrt{2} \leq t \leq 2\sqrt{2} + 4$.

故答案为: $2\sqrt{2} \leq t \leq 2\sqrt{2} + 4$.

【点睛】 本题考查了切线的性质, 等腰直角三角形的性质, 勾股定理, 求得 $t = EQ$ 是解题的关键.

三、解答题 (要求写出必要的解答步骤或证明过程, 共 96 分)

17. 计算: $\frac{\sqrt{18}}{3} + |\sqrt{2} - 2| + 2023^0 - (-1)^1$.

【答案】 4

【解析】

【分析】 先化简二次根式, 绝对值, 计算零次幂, 再合并即可.

【详解】解： $\frac{\sqrt{18}}{3} + |\sqrt{2} - 2| + 2023^0 - (-1)^1$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{3} + 2 - \sqrt{2} + 1 + 1$$

$$= \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + 1 + 1$$

$$= 4.$$

【点睛】 本题考查的是二次根式的加减运算，化简绝对值，零次幂的含义，掌握运算法则是解本题的关键.

18. 先化简，再求值： $\left(\frac{3x+y}{x^2-y^2} + \frac{2x}{y^2-x^2} \right) \div \frac{2}{x^2y-xy^2}$ ，其中 $x = \sqrt{3} + 1$ ， $y = \sqrt{3}$.

【答案】 $\frac{xy}{2}$ ； $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 先根据分式的加减计算括号内的，同时将除法转化为乘法，再根据分式的性质化简，最后将字母的值代入求解.

【详解】解： $\left(\frac{3x+y}{x^2-y^2} + \frac{2x}{y^2-x^2} \right) \div \frac{2}{x^2y-xy^2}$

$$= \frac{3x+y-2x}{x^2-y^2} \times \frac{xy(x-y)}{2}$$

$$= \frac{x+y}{(x+y)(x-y)} \times \frac{xy(x-y)}{2}$$

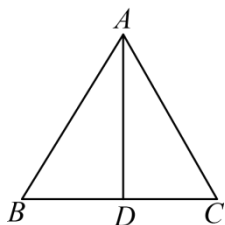
$$= \frac{xy}{2},$$

当 $x = \sqrt{3} + 1$ ， $y = \sqrt{3}$ 时，

$$\text{原式} = \frac{(\sqrt{3}+1) \times \sqrt{3}}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

【点睛】 本题考查了分式化简求值，二次根式的混合运算，解题关键是熟练运用分式运算法则进行求解.

19. 如图，将边长为 4 的等边三角形纸片沿边 BC 上的高 AD 剪成两个三角形，用这两个三角形拼成一个平行四边形.



- (1) 画出这个平行四边形（画出一种情况即可）；
 (2) 根据（1）中所画平行四边形求出两条对角线长.

【答案】(1) 见解析 (2) 4 或 $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{7}$ 或 2, $2\sqrt{17}$

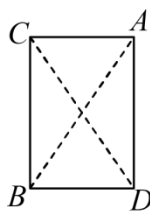
【解析】

【分析】(1) 根据题意画出拼接图形即可；

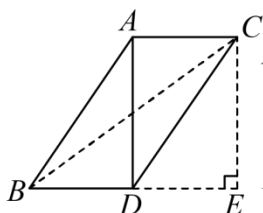
(2) 利用等边三角形的性质求得 BD 、 CD 、 AD ，分情况分别利用平行四边形和矩形的性质和勾股定理求解即可.

【小问 1 详解】

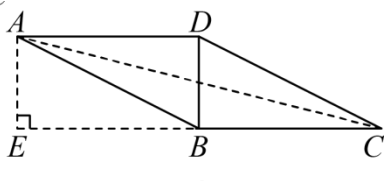
解：如图①或②或③，



图①



图②



图③

【小问 2 详解】

解：∵ 等边 $\triangle ABC$ 边 $AB = AC = BC = 4$,

$$\therefore BD = DC = 2,$$

$$\therefore AD = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

如图①所示：可得四边形 $ACBD$ 是矩形，则其对角线长为 $AB = CD = 4$ ；

如图②所示： $AD = 2\sqrt{3}$,

连接 BC ，过点 C 作 $CE \perp BD$ 于点 E ，则可得四边形 $ACED$ 是矩形，

$$\therefore EC = AD = 2\sqrt{3}, \quad BE = 2BD = 4,$$

$$\text{则 } BC = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 4^2} = 2\sqrt{7};$$

如图③所示： $BD = 2$,

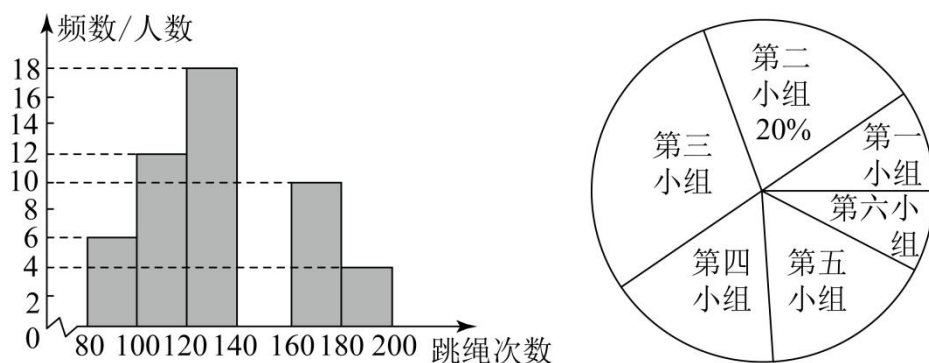
连接 AC ，过点 A 作 $AE \perp BC$ 交 CB 延长线于点 E ，可得四边形 $AEBD$ 是矩形，

由题意可得： $AE = BD = 2$, $EC = 2BC = 8$,

故 $AC = \sqrt{2^2 + 8^2} = 2\sqrt{17}$.

【点睛】本题考查图形的剪拼，涉及等边三角形的性质、平行四边形的性质、矩形的性质、勾股定理，熟练掌握等腰三角形的性质和矩形性质，作辅助线构造直角三角形求解是解答的关键.

20. 为进一步落实“德、智、体、美、劳”五育并举工作，某校开展以“文化、科技、体育、艺术、劳动”为主题的活动，其中体育活动有“一分钟跳绳”比赛项目，为了解学生“一分钟跳绳”的能力，体育老师随机抽取部分学生进行测试并将测试成绩作为样本，绘制出如图所示的频数分布直方图（从左到右依次为第一到第六小组，每小组含最小值，不含最大值）和扇形统计图，请根据统计图中提供的信息解答下列问题：



- (1) 求第四小组的频数，并补全频数分布直方图；
- (2) 若“一分钟跳绳”不低于 160 次的成绩为优秀，本校学生共有 1260 人，请估计该校学生“一分钟跳绳”成绩为优秀的人数；
- (3) 若“一分钟跳绳”不低于 180 次的成绩为满分，经测试某班恰有 3 名男生 1 名女生成绩为满分，现要从这 4 人中随机抽取 2 人去参加学校组织的“一分钟跳绳”比赛，请用画树状图或列表的方法，求所选 2 人都是男生的概率.

【答案】(1) 第四小组的频数为 10，补全图形见解析

(2) 该校学生“一分钟跳绳”成绩为优秀的人数为 294 人

(3) 所选 2 人都是男生的概率为 $\frac{1}{2}$.

【解析】

【分析】(1) 首先利用第二小组的人数及所占比例求得总人数，然后求得第四组的人数，即可作出统计图；

(2) 利用总人数 1260 乘以优秀成绩所占的比例即可求解；

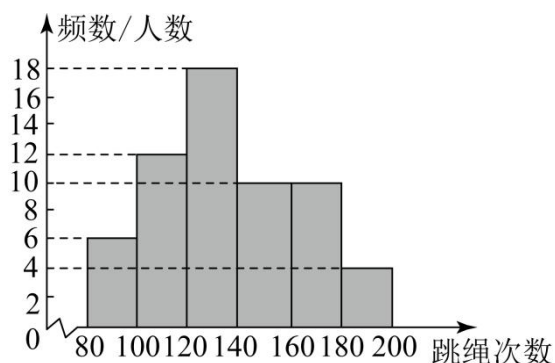
(3) 画树状图展示所有 12 种等可能的结果数，再找出符合条件的结果数，然后根据概率公式计算即可.

【小问 1 详解】

解：样本容量是 $12 \div 20\% = 60$ (人)，

第四组的人数是： $60 - 6 - 12 - 18 - 10 - 4 = 10$ (人)，

补全统计图如图：

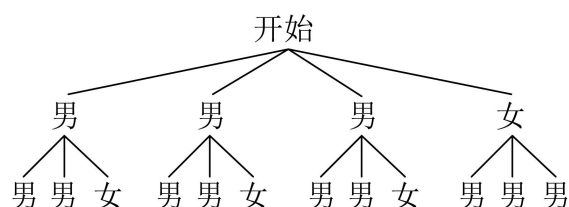


【小问 2 详解】

解：该校学生“一分钟跳绳”成绩为优秀的人数为 $1260 \times \frac{10+4}{60} = 294$ (人)；

【小问 3 详解】

解：画树状图：

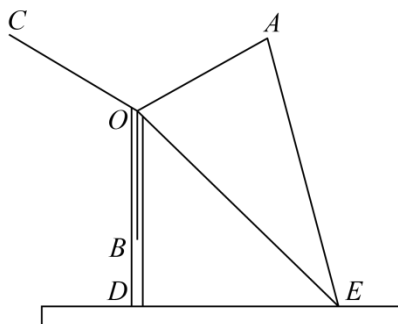


共有 12 种等可能的结果数，其中抽到的 2 人都是男生的结果数为 6，

所以抽到的 2 人都是男生的概率为 $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ 。

【点睛】此题考查的是用列表法或树状图法求概率。列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件。用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比。还考查读频数分布直方图的能力和利用统计图获取信息的能力。

21. “一缕清风银叶转”，某市 20 台风机依次矗立在云遮雾绕的山脊之上，风叶转动，风能就能转换成电能，造福千家万户。某中学初三数学兴趣小组，为测量风叶的长度进行了实地测量。如图，三片风叶两两所成的角为 120° ，当其中一片风叶 OB 与塔干 OD 叠合时，在与塔底 D 水平距离为 60 米的 E 处，测得塔顶部 O 的仰角 $\angle OED = 45^\circ$ ，风叶 OA 的视角 $\angle OEA = 30^\circ$ 。



(1) 已知 α, β 两角和的余弦公式为： $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ ，请利用公式计算 $\cos 75^\circ$ ；

(2) 求风叶 OA 的长度.

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) 风叶 OA 的长度为 $(60\sqrt{3}-60)$ 米

【解析】

【分析】 (1) 根据题中公式计算即可；

(2) 过点 A 作 $AF \perp DE$ ，连接 AC ， $OG \perp AC$ ，先根据题意求出 OE ，再根据等腰对等边证明 $OE = AE$ ，结合第一问的结论用三角函数即可求 EF ，再证明四边形 $DFAG$ 是矩形，即可求出.

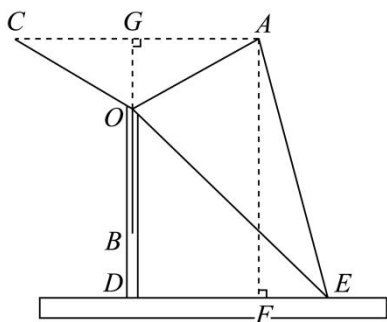
【小问 1 详解】

解：由题意可得： $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$ ，

$$\therefore \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};$$

【小问 2 详解】

解：过点 A 作 $AF \perp DE$ ，连接 AC ， $OG \perp AC$ ，如图所示，



由题意得： $DE = 60$ 米， $\angle OED = 45^\circ$ ，

$$\therefore OE = \frac{DE}{\cos 45^\circ} = \frac{60}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 60\sqrt{2} \text{ 米}, \quad \angle DOE = 45^\circ,$$

$\therefore$ 三片风叶两两所成的角为 120° ，

$$\therefore \angle DOA = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AOE = 120^\circ - 45^\circ = 75^\circ,$$

又 $\therefore \angle OEA = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle OAE = 180^\circ - 75^\circ - 30^\circ = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle OAE = \angle AOE,$$

$$\therefore OE = AE = 60\sqrt{2} \text{ 米},$$

$$\therefore \angle OEA = 30^\circ, \quad \angle OED = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = 75^\circ,$$

$$\text{由 (1) 得: } \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore EF = AE \times \cos 75^\circ = 30\sqrt{3} - 30 \text{ 米},$$

$$\therefore DF = DE - EF = 60 - (30\sqrt{3} - 30) = 90 - 30\sqrt{3} \text{ 米},$$

$$\therefore AF \perp DE, \quad OG \perp AC, \quad OD \perp DE,$$

$\therefore$ 四边形 $DFAG$ 是矩形,

$$\therefore AG = DF = 90 - 30\sqrt{3} \text{ 米},$$

$\therefore$ 三片风叶两两所成的角为 120° , 且三片风叶长度相等,

$$\therefore \angle OAG = 30^\circ,$$

$$\therefore OA = \frac{AG}{\cos 30^\circ} = \frac{90 - 30\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = (60\sqrt{3} - 60) \text{ 米},$$

$\therefore$ 风叶 OA 的长度为 $(60\sqrt{3} - 60)$ 米.

【点睛】本题考查解直角三角形的实际应用，正确理解题意和作出辅助线是关键.

22. 某移动公司推出 A , B 两种电话计费方式.

计费方式	月使用费/元	主叫限定时间/min	主叫超时费/(元/min)	被叫
A	78	200	0.25	免费
B	108	500	0.19	免费

(1) 设一个月内用移动电话主叫时间为 t min, 根据上表, 分别写出在不同时间范围内, 方式 A , 方式 B 的计费金额关于 t 的函数解析式;

(2) 若你预计每月主叫时间为 350 min, 你将选择 A , B 哪种计费方式, 并说明理由;

(3) 请你根据月主叫时间 t 的不同范围, 直接写出最省钱的计费方式.

【答案】(1) 见解析;

(2) 选方式 B 计费, 理由见解析;

(3) 见解析.

【解析】

【分析】(1) 根据题意, 设两种计费金额分别为 y_1 、 y_2 , 分别计算 $t \leq 200$, $200 < t \leq 500$, $t > 500$, 三个不

同范围内的 A 、 B 两种方式的计费金额即可；

(2) 令 $t = 350$ ，根据 (1) 中范围求出对应两种计费金额，选择费用低的方案即可；

(3) 令 $y_1 = 108$ ，求出此时 t 的值 t_0 ，当主叫时间 $t < t_0$ 时，方式 A 省钱；当主叫时间 $t = t_0$ 时，方式 A 和 B 一样；当主叫时间 $t > t_0$ 时，方式 B 省钱；

【小问 1 详解】

解：根据题意，设两种计费金额分别为 y_1 、 y_2

当 $t \leq 200$ 时，方式 A 的计费金额为 78 元，方式 B 的计费金额为 108 元；

$200 < t \leq 500$ ，方式 A 的计费金额 $y_1 = 78 + (t - 200) \times 0.25 = 0.25t + 28$ ，方式 B 的计费金额为 108 元；

当 $t > 500$ 时，方式 A 的计费金额为 $y_1 = 0.25t + 28$ ，方式 B 的计费金额为

$$y_2 = 108 + (t - 500) \times 0.19 = 0.19t + 13$$

总结如下表：

主叫时间 t / 分钟	方式 A 计费(y_1)	方式 B 计费(y_2)
$t \leq 200$	78	108
$200 < t \leq 500$	$0.25t + 28$	108
$t > 500$	$0.25t + 28$	$0.19t + 13$

【小问 2 详解】解：当 $t = 350$ 时， $y_1 = 0.25 \times 350 + 28 = 115.5$

$$y_2 = 108$$

$y_1 > y_2$ ，故选方式 B 计费。

【小问 3 详解】

解：令 $y_1 \leq 108$ ，有 $0.25t + 28 \leq 108$ 解得 $t \leq 320$

$\therefore$ 当 $t < 320$ 时，方式 A 更省钱；

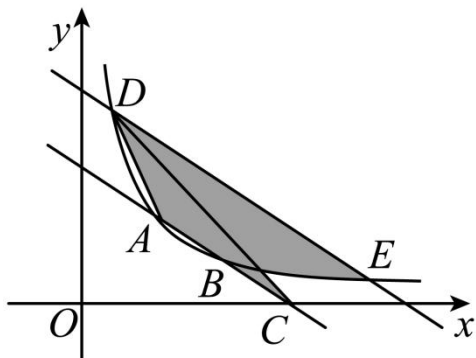
当 $t = 320$ 时，方式 A 和 B 金额一样；

当 $t > 320$ 时，方式 B 更省钱。

【点睛】 本题考查了一次函数在电话计费中的应用，根据题意分段讨论是求解的关键。

23. 如图，已知一次函数 $y = kx + 6$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ ($m > 0$) 的图象交于 $A(3, 4)$ ， B 两点，与 x

轴交于点 C ，将直线 AB 沿 y 轴向上平移 3 个单位长度后与反比例函数图象交于点 D ， E 。



- (1) 求 k ， m 的值及 C 点坐标；
 (2) 连接 AD ， CD ，求 $\triangle ACD$ 的面积。

【答案】(1) $k = -\frac{2}{3}$ ； $m = 12$ ； $C(9, 0)$

(2) $S_{\triangle ACD} = 9$

【解析】

【分析】(1) 把点 $A(3, 4)$ 代入 $y = kx + 6$ 和 $y = \frac{m}{x} (m > 0)$ 求出 k 、 m 的值即可；把 $y = 0$ 代入 AB 的解析式，求出点 C 的坐标即可；

(2) 延长 DA 交 x 轴于点 F ，先求出 AB 平移后的关系式，再求出点 D 的坐标，然后求出 AD 解析式，得出点 F 的坐标，根据 $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle CDF} - S_{\triangle CAF}$ 求出结果即可。

【小问 1 详解】

解：把点 $A(3, 4)$ 代入 $y = kx + 6$ 和 $y = \frac{m}{x} (m > 0)$ 得：

$$3k + 6 = 4, \quad 4 = \frac{m}{3},$$

$$\text{解得：} k = -\frac{2}{3}, \quad m = 12,$$

$$\therefore AB \text{ 的解析式为 } y = -\frac{2}{3}x + 6, \text{ 反比例函数解析式为 } y = \frac{12}{x},$$

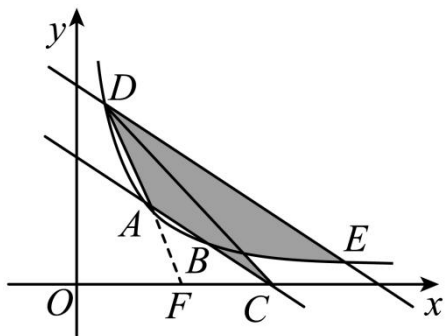
$$\text{把 } y = 0 \text{ 代入 } y = -\frac{2}{3}x + 6 \text{ 得：} 0 = -\frac{2}{3}x + 6,$$

$$\text{解得：} x = 9,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (9, 0);$$

【小问 2 详解】

解：延长 DA 交 x 轴于点 F ，如图所示：



将直线 AB 沿 y 轴向上平移 3 个单位长度后解析式为：

$$y = -\frac{2}{3}x + 6 + 3 = -\frac{2}{3}x + 9,$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 9 \\ y = \frac{12}{x} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}, \\ y_1 = 8 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 12 \\ y_2 = 1 \end{cases},$$

$$\therefore \text{点 } D\left(\frac{3}{2}, 8\right),$$

设直线 AD 的解析式为 $y = k_1x + b_1$ ，把 $D\left(\frac{3}{2}, 8\right)$ ， $A(3, 4)$ 代入得：

$$\begin{cases} \frac{3}{2}k_1 + b_1 = 8 \\ 3k_1 + b_1 = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k_1 = -\frac{8}{3}, \\ b_1 = 12 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AD \text{ 的解析式为 } y = -\frac{8}{3}x + 12,$$

$$\text{把 } y = 0 \text{ 代入 } y = -\frac{8}{3}x + 12 \text{ 得 } 0 = -\frac{8}{3}x + 12,$$

$$\text{解得: } x = \frac{9}{2},$$

$$\therefore \text{点 } F \text{ 的坐标为 } \left(\frac{9}{2}, 0\right),$$

$$\therefore CF = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2},$$

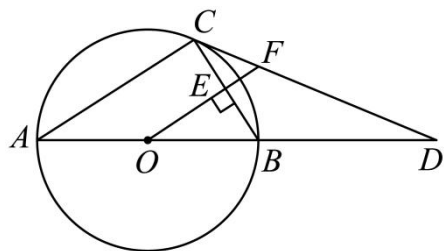
$$\therefore S_{\triangle ACD} = S_{\triangle CDF} - S_{\triangle CAF}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times 8 - \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times 4$$

$$= 9.$$

【点睛】本题主要考查了一次函数和反比例函数的综合应用，求一次函数解析式，反比例函数解析式，解题的关键是数形结合，熟练掌握待定系数法，能求出一次函数和反比例函数的交点坐标.

24. 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径， C 为 $\odot O$ 上一点，连接 AC ， BC ，过点 C 作 $\odot O$ 的切线交 AB 延长线于点 D ， $OF \perp BC$ 于点 E ，交 CD 于点 F .



(1) 求证： $\angle BCD = \angle BOE$ ；

(2) 若 $\sin \angle CAB = \frac{3}{5}$ ， $AB = 10$ ，求 BD 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) BD 的长为 $\frac{90}{7}$.

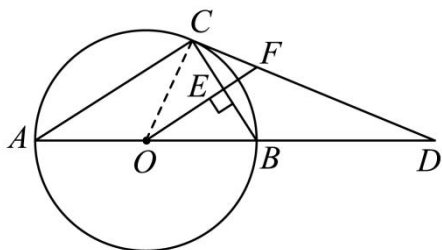
【解析】

【分析】(1) 连接 OC ，利用圆周角定理及半径相等求得 $\angle OAC + \angle OCB = 90^\circ$ ，根据切线的性质求得 $\angle BCD + \angle OCB = \angle OCD = 90^\circ$ ，推出 $\angle BCD = \angle OAC$ ，再证明 $OE \parallel AC$ ，据此即可证明结论成立；

(2) 先求得 $BC = 6$ ， $AC = 8$ ，设 $BD = x$ ，证明 $\triangle BCD \sim \triangle CAD$ ，利用相似三角形的性质得到 $9(10 + x) = 16x$ ，解之即可.

【小问 1 详解】

证明：连接 OC ，



$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,
 $\therefore \angle ACO + \angle OCB = \angle ACB = 90^\circ$,
 $\because OC = OA$,
 $\therefore \angle OCA = \angle OAC$,
 $\therefore \angle OAC + \angle OCB = 90^\circ$,
 $\because CD$ 是 $\odot O$ 的切线,
 $\therefore \angle BCD + \angle OCB = \angle OCD = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BCD = \angle OAC$,
 $\because OF \perp BC$,
 $\therefore \angle OFB = \angle ACB = 90^\circ$,
 $\therefore OE \parallel AC$,
 $\therefore \angle BOE = \angle OAC$,
 $\therefore \angle BCD = \angle BOE$;

【小问 2 详解】

解: $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,
 $\because \sin \angle CAB = \frac{3}{5}$, $AB = 10$,
 $\therefore \sin \angle CAB = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$,
 $\therefore BC = 6$, $AC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$,

设 $BD = x$, 则 $AD = 10 + x$,

由 (1) 得 $\angle BCD = \angle CAD$,

又 $\angle D = \angle D$,

$\therefore \triangle BCD \sim \triangle CAD$,

$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$, 即 $\frac{6}{8} = \frac{CD}{10+x} = \frac{x}{CD}$,

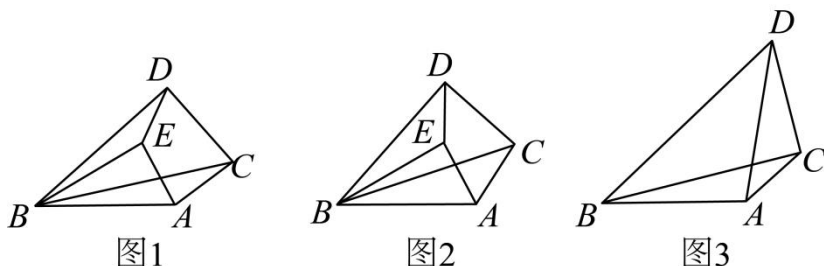
整理得 $9(10+x) = 16x$,

$$\text{解得 } x = \frac{90}{7},$$

$$\therefore BD \text{ 的长为 } \frac{90}{7}.$$

【点睛】本题考查了切线的性质，圆周角定理，相似三角形的判定和性质，正弦函数的定义，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题.

25. 如图 1，已知线段 AB ， AC ，线段 AC 绕点 A 在直线 AB 上方旋转，连接 BC ，以 BC 为边在 BC 上方作 $\text{Rt}\triangle BDC$ ，且 $\angle DBC = 30^\circ$.



(1) 若 $\angle BDC = 90^\circ$ ，以 AB 为边在 AB 上方作 $\text{Rt}\triangle BAE$ ，且 $\angle AEB = 90^\circ$ ， $\angle EBA = 30^\circ$ ，连接 DE ，用等式表示线段 AC 与 DE 的数量关系是 _____；

(2) 如图 2，在(1)的条件下，若 $DE \perp AB$ ， $AB = 4$ ， $AC = 2$ ，求 BC 的长；

(3) 如图 3，若 $\angle BCD = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ， $AC = 2$ ，当 AD 的值最大时，求此时 $\tan \angle CBA$ 的值.

【答案】(1) $AC = \frac{2}{3}\sqrt{3}DE$

(2) $BC = 2\sqrt{7}$

(3) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

【解析】

【分析】(1) 在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中， $\angle DBC = 30^\circ$ ， $\text{Rt}\triangle BAE$ ，且 $\angle AEB = 90^\circ$ ， $\angle EBA = 30^\circ$ ，可得 $\triangle ABE \sim \triangle CBD$ ，根据相似三角形的性质得出 $\frac{AB}{BC} = \frac{BE}{BD}$ ， $\angle DBE = \angle CBA$ ，进而证明 $\triangle ABC \sim \triangle EBD$ ，根据相似三角形的性质即可求解；

(2) 延长 DE 交 AB 于点 F ，如图所示，在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中，求得 EF, AF ，进而求得 BF 的长，根据 (1) 的结论，得出 $DE = \sqrt{3}$ ，在 $\text{Rt}\triangle BFD$ 中，勾股定理求得 BD ，进而根据 $\triangle ABC \sim \triangle EBD$ ，即可求解.

(3) 如图所示，以 AB 为边在 AB 上方作 $\text{Rt}\triangle BAE$ ，且 $\angle EAB = 90^\circ$ ， $\angle EBA = 30^\circ$ ，连接 BE ， EA ， ED, EC ，同 (1) 可得 $\triangle BDE \sim \triangle BCA$ ，进而得出 D 在以 E 为圆心， $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 为半径的圆上运动，当点 A, E, D

三点共线时， AD 的值最大，进而求得 $\cos \angle BDA = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ ， $\sin \angle BDA = \frac{\sqrt{21}}{7}$ ，根据 $\triangle ABC \sim \triangle EBD$ 得出 $\angle BDE = \angle BCA$ ，过点 A 作 $AF \perp BC$ ，于点 F ，分别求得 AF, CF ，然后求得 BF ，最后根据正切的定义即可求解。

【小问 1 详解】

解：在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中， $\angle DBC = 30^\circ$ ， $\text{Rt}\triangle BAE$ ，且 $\angle AEB = 90^\circ$ ， $\angle EBA = 30^\circ$ ，

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CBD, \angle DBE + \angle EBC = \angle ABC + \angle EBC, BE = AB \times \cos \angle ABE = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BE}{BD}, \angle DBE = \angle CBA,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EBD$$

$$\therefore \frac{AC}{DE} = \frac{AB}{BE} = \frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2} AB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore AC = \frac{2}{3}\sqrt{3}DE,$$

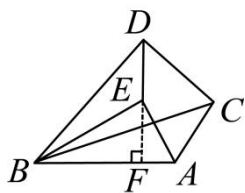
$$\text{故答案为: } AC = \frac{2}{3}\sqrt{3}DE.$$

【小问 2 详解】

$$\therefore \text{Rt}\triangle BAE, \text{ 且 } \angle AEB = 90^\circ, \angle EBA = 30^\circ, AB = 4$$

$$\therefore AE = AB \cdot \sin \angle EBA = \frac{1}{2} AB = 2, \angle BAE = 60^\circ,$$

延长 DE 交 AB 于点 F ，如图所示，



$$\therefore DE \perp AB,$$

$$\therefore \angle BFD = \angle DFA = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle AEF \text{ 中, } EF = AE \times \sin \angle BAE = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}, AF = \frac{1}{2} AE = 1,$$

$$\therefore BF = AB - AF = 4 - 1 = 3,$$

$$\text{由 (1) 可得 } AC = \frac{2}{3}\sqrt{3}DE,$$

$$\therefore DE = \frac{\sqrt{3}}{2} AC = \sqrt{3},$$

$$\therefore DF = DE + EF = 2\sqrt{3},$$

$$\text{在 Rt}\triangle BFD \text{ 中, } BD = \sqrt{BF^2 + DF^2} = \sqrt{3^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{21},$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EBD,$$

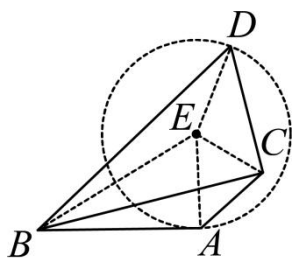
$$\therefore \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{DE} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore BC = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{21} = 2\sqrt{7},$$

$$\therefore BC = 2\sqrt{7};$$

【小问 3 详解】

解：如图所示，以 AB 为边在 AB 上方作 $\text{Rt}\triangle BAE$ ，且 $\angle EAB = 90^\circ$ ， $\angle EBA = 30^\circ$ ，连接 BE ， EA ， ED ， EC ，



同 (1) 可得 $\triangle BDE \sim \triangle BCA$

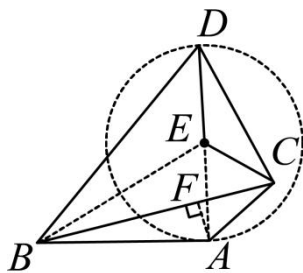
$$\text{则 } \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore AC = 2, \text{ 则 } DE = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEB \text{ 中, } AB = 4, \quad AE = AB \times \tan \angle EBA = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore D$ 在以 E 为圆心， $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 为半径的圆上运动，

$$\therefore \text{当点 } A, E, D \text{ 三点共线时, } AD \text{ 的值最大, 此时如图所示, 则 } AD = AE + DE = \frac{8\sqrt{3}}{3},$$



在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{21}}{3}$

$$\therefore \cos \angle BDA = \frac{AD}{BD} = \frac{\frac{8\sqrt{3}}{3}}{\frac{4\sqrt{21}}{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}, \sin \angle BDA = \frac{AB}{BD} = \frac{4}{\frac{4\sqrt{21}}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EBD,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle BCA,$$

过点 A 作 $AF \perp BC$, 于点 F,

$$\therefore CF = AC \times \cos \angle ACB = 2 \times \frac{2\sqrt{7}}{7} = \frac{4\sqrt{7}}{7}, \quad AF = AC \times \sin \angle ACB = \frac{2\sqrt{21}}{7},$$

$$\therefore \angle DBC = 30^\circ,$$

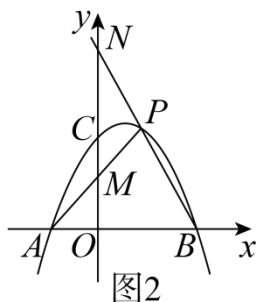
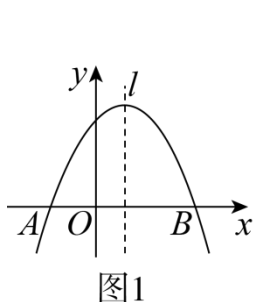
$$\therefore BC = \frac{\sqrt{3}}{2} BD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{4\sqrt{21}}{3} = 2\sqrt{7},$$

$$\therefore BF = BC - CF = 2\sqrt{7} - \frac{4\sqrt{7}}{7} = \frac{10\sqrt{7}}{7},$$

$$\text{Rt}\triangle AFB \text{ 中, } \tan \angle CBA = \frac{AF}{BF} = \frac{\frac{2\sqrt{21}}{7}}{\frac{10\sqrt{7}}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质与判定, 勾股定理, 解直角三角形, 正切的定义, 求圆外一点到圆的距离的最值问题, 熟练掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键.

26. 如图 1, 在平面直角坐标系中, 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + 4$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$, 与 y 轴交于点 C .



- (1) 求抛物线的解析式;
- (2) 已知 E 为抛物线上一点, F 为抛物线对称轴 l 上一点, 以 B, E, F 为顶点的三角形是等腰直角三角形, 且 $\angle BFE = 90^\circ$, 求出点 F 的坐标;
- (3) 如图 2, P 为第一象限内抛物线上一点, 连接 AP 交 y 轴于点 M , 连接 BP 并延长交 y 轴于点 N , 在点 P 运动过程中, $OM + \frac{1}{2}ON$ 是否为定值? 若是, 求出这个定值; 若不是, 请说明理由.

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

(2) $F(1, 1)$ 或 $F(1, -5)$ 或 $F(1, -3)$

(3) $OM + \frac{1}{2}ON = 6$, 理由见解析

【解析】

【分析】(1) 待定系数法求解析式即可;

(2) 先求得抛物线的对称轴为直线 $x = 1$, 设 l 与 x 交于点 G , 过点 E 作 $ED \perp l$ 于点 D , 证明 $\triangle DFG \cong \triangle GBF$, 设 $F(1, m)$, 则 $DE = 1 + m$, $DG = DF + FG = GB + FG = 3 + m$, 进而得出 E 点的坐标, 代入抛物线解析式, 求得 m 的值, 同理可求得当点 F 在 x 轴下方时的坐标; 当 E 点与 A 点重合时, 求得另一个解, 进而即可求解;

(3) 设 $P(s, t)$, 直线 AP 的解析式为 $y = dx + f$, BP 的解析式为 $y = gx + h$, 求得解析式, 然后求得 OM, ON , 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 将点 $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$, 代入 $y = ax^2 + bx + 4$

$$\text{得} \begin{cases} 4a - 2b + 4 = 0 \\ 16a + 4b + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

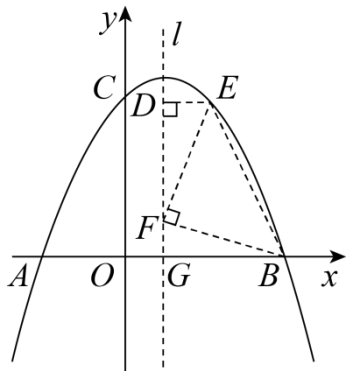
∴ 抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$;

【小问 2 详解】

∴ 点 $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$,

∴ 抛物线的对称轴为直线 $l: x = \frac{-2+4}{2} = 1$,

如图所示, 设 l 与 x 交于点 G , 过点 E 作 $ED \perp l$ 于点 D



∴ 以 B , E , F 为顶点的三角形是等腰直角三角形, 且 $\angle BFE = 90^\circ$,

∴ $EF = BF$,

∴ $\angle DFE = 90^\circ - \angle BFG = \angle GBF$,

∴ $\triangle DFE \cong \triangle GBF$,

∴ $GF = DE, GB = FD$,

设 $F(1, m)$, 则 $DE = m$, $DG = DF + FG = GB + FG = 3 + m$

∴ $E(1+m, 3+m)$,

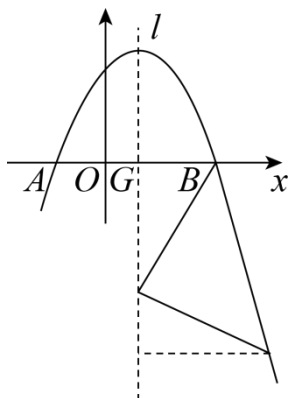
∴ E 点在抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ 上

∴ $3+m = -\frac{1}{2}(1+m)^2 + (1+m) + 4$

解得: $m = -3$ (舍去) 或 $m = 1$,

∴ $F(1, 1)$,

如图所示, 设 l 与 x 交于点 G , 过点 E 作 $ED \perp l$ 于点 D



$\because$ 以 B, E, F 为顶点的三角形是等腰直角三角形, 且 $\angle BFE = 90^\circ$,

$$\therefore EF = BF,$$

$$\because \angle DFE = 90^\circ - \angle BFG = \angle GBF,$$

$$\therefore \triangle DFE \cong \triangle GBF,$$

$$\therefore GF = DE, GB = FD,$$

设 $F(1, m)$, 则 $DE = m$, $DG = DF + FG = GB + FG = 3 - m$

$$\therefore E(1 - m, m - 3),$$

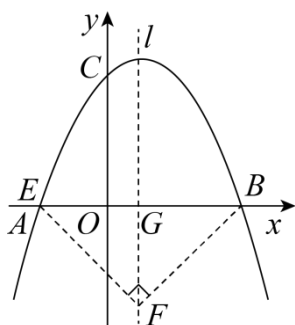
$\because E$ 点在抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ 上

$$\therefore m - 3 = -\frac{1}{2}(1 - m)^2 + (1 - m) + 4$$

解得: $m = 3$ (舍去) 或 $m = -5$,

$$\therefore F(1, -5),$$

当 E 点与 A 点重合时, 如图所示,



$\because AB = 6$, $\triangle ABF$ 是等腰直角三角形, 且 $\angle BFE = 90^\circ$,

$$\therefore GF = \frac{1}{2}AB = 3$$

此时 $F(0, -3)$,

综上所述, $F(1, 1)$ 或 $F(1, -5)$ 或 $F(0, -3)$;

【小问3 详解】

设 $P(s, t)$ ，直线 AP 的解析式为 $y = dx + f$ ， BP 的解析式为 $y = gx + h$ ，

$\therefore$ 点 $A(-2, 0)$ ， $B(4, 0)$ ， $P(s, t)$ ，

$$\therefore \begin{cases} -2d + f = 0 \\ sd + f = t \end{cases}, \begin{cases} 4g + h = 0 \\ sg + h = t \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} d = \frac{t}{s+2} \\ f = \frac{2t}{s+2} \end{cases}, \begin{cases} g = \frac{t}{s-4} \\ h = \frac{4t}{4-s} \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AP 的解析式为 $y = \frac{t}{s+2}x + \frac{2t}{s+2}$ ， BP 的解析式为 $y = \frac{t}{s-4}x + \frac{4t}{4-s}$ ，

对于 $y = \frac{t}{s+2}x + \frac{2t}{s+2}$ ，当 $x = 0$ 时， $y = \frac{2t}{s+2}$ ，即 $M\left(0, \frac{2t}{s+2}\right)$ ，

对于 $y = \frac{t}{s-4}x + \frac{4t}{4-s}$ ，当 $x = 0$ 时， $y = \frac{4t}{4-s}$ ，即 $N\left(0, \frac{4t}{4-s}\right)$ ，

$\therefore P(s, t)$ 在抛物线上，则 $t = -\frac{1}{2}s^2 + s + 4 = -\frac{1}{2}(s-4)(s+2)$

$$\therefore OM + \frac{1}{2}ON = \frac{2t}{s+2} + \frac{1}{2} \times \frac{4t}{4-s} = \frac{12t}{-s^2 + 2s + 8}$$

$$= \frac{-6(s-4)(s+2)}{-(s-4)(s+2)} = 6$$

$\therefore OM + \frac{1}{2}ON$ 为定值 6.

【点睛】 本题考查了二次函数综合问题，待定系数法求二次函数解析式，等腰直角三角形的性质，一次函数与坐标轴交点问题，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

