

宜宾市 2023 年初中学业水平考试暨高中阶段学校招生考试

数学

(考试时间：120 分钟，全卷满分：150 分)

注意事项：

1. 答题时，务必将自己的姓名、座位号，准考证号填写在答题卡指定的位置并将答题卡背面座位号对应标号涂黑.
2. 答选择题时，务必使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号.
3. 答非选择题时，务必使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上.
4. 所有题目必须在答题卡规定的位置上作答，在试卷上答题无效.

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 4 分，共 48 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确选项填涂在答题卡对应题目上.

1. 2 的相反数是 ()

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】

【详解】2 的相反数是-2.

故选：B.

2. 下列计算正确的是 ()

- A. $4a - 2a = 2$ B. $2ab + 3ba = 5ab$
C. $a + a^2 = a^3$ D. $5x^2y - 3xy^2 = 2xy$

【答案】B

【解析】

【分析】根据整式的加减计算即可.

【详解】A、 $4a - 2a = 2a$ ，不符合题意；

B、 $2ab + 3ba = 2ab + 3ab = 5ab$ ，符合题意；

C、 a, a^2 不是同类项，无法计算，不符合题意；

D、 $5x^2y, -3xy^2$ ，不是同类项，无法计算，不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查了整式的加减，熟练掌握同类项的判定与合并是解题的关键.

3. 下列图案中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（ ）



【答案】D

【解析】

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的定义：如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做轴对称图形；中心对称图形的定义：把一个图形绕着某一个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点就是它的对称中心，进行逐一判断即可.

【详解】解：A、是轴对称图形但不是中心对称图形，故A选项不符合题意；

B、是中心对称图形但不是轴对称图形，故B选项不合题意；

C、既不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故C选项不合题意；

D、既是轴对称图形，又是中心对称图形，故D选项符合题意.

故选D.

【点睛】本题主要考查了轴对称图形和中心对称图形，解题的关键在于能够熟练掌握轴对称图形和中心对称图形的定义.

4. 为积极践行节能减排的发展理念，宜宾大力推进“电动宜宾”工程，2022年城区已建成充电基础设施接口超过8500个. 将8500用科学记数法表示为（ ）

- A. 0.85×10^4 B. 85×10^2 C. 8.5×10^3 D. 8.5×10^4

【答案】C

【解析】

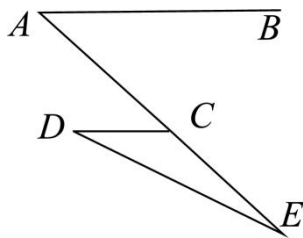
【分析】用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，比位数少1位，按要求表示即可.

【详解】解：根据科学记数法要求，8500共有4位数，从而用科学记数法表示为 8.5×10^3 ，

故选：C.

【点睛】本题考查科学记数法，按照定义，确定 a 与 n 的值是解决问题的关键.

5. 如图, $AB \parallel CD$, 且 $\angle A = 40^\circ$, $\angle D = 24^\circ$, 则 $\angle E$ 等于 ()



- A. 40° B. 32° C. 24° D. 16°

【答案】D

【解析】

【分析】可求 $\angle ACD = 40^\circ$, 再由 $\angle ACD = \angle D + \angle E$, 即可求解.

【详解】解: $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle ACD = \angle A = 40^\circ,$$

$$\because \angle ACD = \angle D + \angle E,$$

$$\therefore 24^\circ + \angle E = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle E = 16^\circ.$$

故选: D.

【点睛】本题考查了平行线的性质, 三角形外角性质, 掌握三角形外角的性质是解题的关键.

6. “今有鸡兔同笼, 上有三十五头, 下有九十四足, 问鸡兔各几何”是《孙子算经》卷中著名数学问题. 意思是: 鸡兔同笼, 从上面数, 有 35 个头; 从下面数, 有 94 条腿. 问鸡兔各有多少只? 若设鸡有 x 只, 兔有 y 只, 则所列方程组正确的是 ()

A. $\begin{cases} x + y = 35 \\ 4x + 2y = 94 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + y = 35 \\ 2x + 4y = 94 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + y = 94 \\ 4x + 2y = 35 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x + y = 94 \\ 2x + 4y = 35 \end{cases}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意, 由设鸡有 x 只, 兔有 y 只, 则由等量关系有 35 个头和有 94 条腿列出方程组即可得到答案.

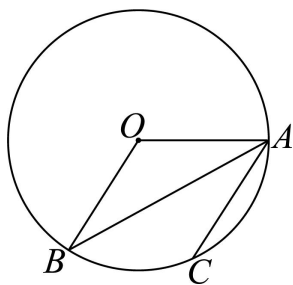
【详解】解: 设鸡有 x 只, 兔有 y 只, 则由题意可得

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 2x + 4y = 94 \end{cases}$$

故选: B.

【点睛】本题考查列二元一次方程组解决古代数学问题, 读懂题意, 找准等量关系列方程组是解决问题的关键.

7. 如图，已知点 A 、 B 、 C 在 $\odot O$ 上， C 为 $\widehat{AB}$ 的中点. 若 $\angle BAC = 35^\circ$ ，则 $\angle AOB$ 等于 ()



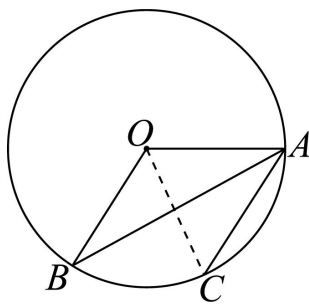
- A. 140° B. 120° C. 110° D. 70°

【答案】A

【解析】

【分析】连接 OC ，如图所示，根据圆周角定理，找到各个角之间的关系即可得到答案.

【详解】解：连接 OC ，如图所示：



$\because$ 点 A 、 B 、 C 在 $\odot O$ 上， C 为 $\widehat{AB}$ 的中点，

$$\therefore \widehat{BC} = \widehat{AC},$$

$$\therefore \angle BOC = \angle AOC = \frac{1}{2} \angle AOB,$$

$$\because \angle BAC = 35^\circ,$$

根据圆周角定理可知 $\angle BOC = 2\angle BAC = 70^\circ$,

$$\therefore \angle AOB = 2\angle BOC = 140^\circ,$$

故选：A.

【点睛】本题考查圆中求角度问题，涉及圆周角定理，找准各个角之间的和差倍分关系是解决问题的关键.

8. 分式方程 $\frac{x-2}{x-3} = \frac{2}{x-3}$ 的解为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】根据分式方程的解法直接求解即可得到答案.

【详解】解： $\frac{x-2}{x-3} = \frac{2}{x-3}$,

方程两边同时乘以 $(x-3)$ 得到 $x-2=2$,

$\therefore x=4$,

检验：当 $x=4$ 时， $x-3=4-3=1 \neq 0$,

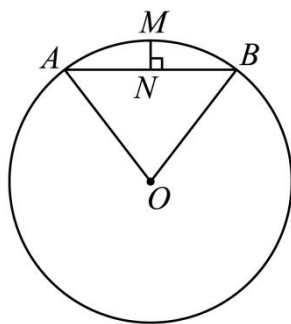
$\therefore x=4$ 是原分式方程的解，

故选：C.

【点睛】本题考查分式方程的解法，对于分式方程求解验根是解决问题的关键步骤.

9. 《梦溪笔谈》是我国古代科技著作，其中它记录了计算圆弧长度的“会圆术”. 如图， $\widehat{AB}$ 是以点 O 为圆心、 OA 为半径的圆弧， N 是 AB 的中点， $MN \perp AB$. “会圆术”给出 $\widehat{AB}$ 的弧长 l 的近似值计算公式：

$l = AB + \frac{MN^2}{OA}$. 当 $OA=4$ ， $\angle AOB=60^\circ$ 时，则 l 的值为 ()



A. $11-2\sqrt{3}$

B. $11-4\sqrt{3}$

C. $8-2\sqrt{3}$

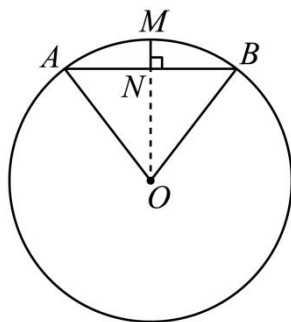
D. $8-4\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】连接 ON ，根据等边三角形的性质，垂径定理，勾股定理，特殊角的三角函数，后代入公式计算即可.

【详解】连接 ON ，根据题意， $\widehat{AB}$ 是以点 O 为圆心、 OA 为半径的圆弧， N 是 AB 的中点， $MN \perp AB$ ，



得 $ON \perp AB$ ，

$\therefore$ 点 M, N, O 三点共线,

$\because OA = 4, \angle AOB = 60^\circ,$

$\therefore \triangle OAB$ 是等边三角形,

$\therefore OA = AB = 4, \angle OAN = 60^\circ, ON = OA \sin 60^\circ = 2\sqrt{3},$

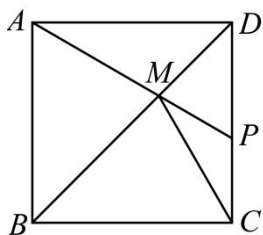
$\therefore OA = AB = 4, \angle OAN = 60^\circ, ON = OA \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$

$$\therefore l = AB + \frac{MN^2}{OA} = 4 + \frac{(4 - 2\sqrt{3})^2}{4} = 11 - 4\sqrt{3}.$$

故选 B.

【点睛】本题考查了等边三角形的性质，垂径定理，勾股定理，特殊角的函数值，熟练掌握相关知识是解题的关键.

10. 如图，边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中， M 为对角线 BD 上的一点，连接 AM 并延长交 CD 于点 P . 若 $PM = PC$ ，则 AM 的长为 ()



- A. $3(\sqrt{3} - 1)$ B. $3(3\sqrt{3} - 2)$ C. $6(\sqrt{3} - 1)$ D. $6(3\sqrt{3} - 2)$

【答案】C

【解析】

【分析】先根据正方形的性质、三角形全等的判定证出 $\triangle ADM \cong \triangle CDM$ ，根据全等三角形的性质可得 $\angle DAM = \angle DCM$ ，再根据等腰三角形的性质可得 $\angle CMP = \angle DCM$ ，从而可得 $\angle DAM = 30^\circ$ ，然后利用勾股定理、含 30° 度角的直角三角形的性质求解即可得.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形，

$\therefore AD = CD = 6, \angle ADC = 90^\circ, \angle ADM = \angle CDM = 45^\circ,$

$$\text{在 } \triangle ADM \text{ 和 } \triangle CDM \text{ 中, } \begin{cases} DM = DM \\ \angle ADM = \angle CDM = 45^\circ, \\ AD = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADM \cong \triangle CDM (\text{SAS}),$

$\therefore \angle DAM = \angle DCM,$

$$\therefore PM = PC,$$

$$\therefore \angle CMP = \angle DCM,$$

$$\therefore \angle APD = \angle CMP + \angle DCM = 2\angle DCM = 2\angle DAM,$$

$$\text{又} \because \angle APD + \angle DAM = 180^\circ - \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAM = 30^\circ,$$

$$\text{设 } PD = x, \text{ 则 } AP = 2PD = 2x, \quad PM = PC = CD - PD = 6 - x,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AP^2 - PD^2} = \sqrt{3}x = 6,$$

$$\text{解得 } x = 2\sqrt{3},$$

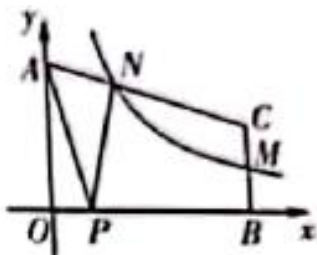
$$\therefore PM = 6 - x = 6 - 2\sqrt{3}, \quad AP = 2x = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore AM = AP - PM = 4\sqrt{3} - (6 - 2\sqrt{3}) = 6(\sqrt{3} - 1),$$

故选：C.

【点睛】本题考查了正方形的性质、勾股定理、含 30° 度角的直角三角形的性质、等腰三角形的性质等知识点，熟练掌握正方形的性质是解题关键.

11. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 、 B 分别在 y 、 x 轴上， $BC \perp x$ 轴. 点 M 、 N 分别在线段 BC 、 AC 上， $BM = CM$ ， $NC = 2AN$ ，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象经过 M 、 N 两点， P 为 x 正半轴上一点，且 $OP:BP = 1:4$ ， $\triangle APN$ 的面积为 3，则 k 的值为 ()



A. $\frac{45}{4}$

B. $\frac{45}{8}$

C. $\frac{144}{25}$

D. $\frac{72}{25}$

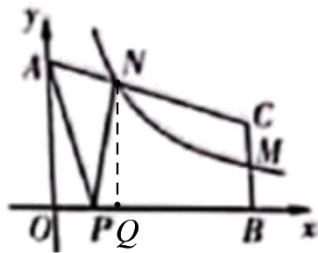
【答案】B

【解析】

【分析】过点 N 作 $NQ \perp x$ 轴于点 Q ，设点 A 的坐标为 $A(0, a) (a > 0)$ ，点 M 的坐标为 $M(5b, c) (b > 0, c > 0)$ ，点 N 的坐标为 $N(m, n) (m > 0, n > 0)$ ，则 $C(5b, 2c)$ ， $OA = a$ ， $OB = 5b$ ，先求出点 N 的坐标为 $N\left(\frac{5b}{3}, \frac{2a+2c}{3}\right)$ ，再根据 $S_{\triangle APN} = S_{\text{梯形} OANQ} - S_{\triangle AOP} - S_{\triangle NPQ} = 3$ 可得 $2ab + bc = 9$ ，然

后将点 M, N 的坐标代入反比例函数的解析式可得 $2a = 7c$ ，从而可得 bc 的值，由此即可得.

【详解】解：如图，过点 N 作 $NQ \perp x$ 轴于点 Q ，



设点 A 的坐标为 $A(0, a)(a > 0)$ ，点 M 的坐标为 $M(5b, c)(b > 0, c > 0)$ ，点 N 的坐标为

$N(m, n)(m > 0, n > 0)$ ，则 $C(5b, 2c)$ ， $OA = a$ ， $OB = 5b$ ，

$$\because OP : BP = 1 : 4,$$

$$\therefore OP = b, BP = 4b,$$

$$\because NC = 2AN,$$

$$\therefore \begin{cases} 5b - m = 2(m - 0) \\ n - 2c = \frac{2}{3}(a - 2c) \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} m = \frac{5b}{3} \\ n = \frac{2a + 2c}{3} \end{cases},$$

$$\therefore N\left(\frac{5b}{3}, \frac{2a + 2c}{3}\right),$$

$$\therefore OQ = \frac{5b}{3}, NQ = \frac{2a + 2c}{3},$$

$$\therefore PQ = OQ - OP = \frac{2b}{3},$$

$$\because \triangle APN \text{ 的面积为 } 3,$$

$$\therefore S_{\text{梯形}OANQ} - S_{\triangle AOP} - S_{\triangle NPQ} = 3, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times \frac{5}{3}b \left(\frac{2a + 2c}{3} + a \right) - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2} \times \frac{2b}{3} \cdot \frac{2a + 2c}{3} = 3,$$

$$\text{整理得: } 2ab + bc = 9,$$

$$\text{将点 } M(5b, c), N\left(\frac{5b}{3}, \frac{2a + 2c}{3}\right) \text{ 代入 } y = \frac{k}{x} \text{ 得: } k = 5bc = \frac{5b}{3} \cdot \frac{2a + 2c}{3},$$

$$\text{整理得: } 2a = 7c,$$

$$\text{将 } 2a = 7c \text{ 代入 } 2ab + bc = 9 \text{ 得: } 7bc + bc = 9, \text{ 解得 } bc = \frac{9}{8},$$

则 $k = 5bc = \frac{45}{8}$,

故选：B.

【点睛】本题主要考查了反比例函数的几何应用，熟练掌握反比例函数的性质，正确求出点 N 的坐标是解题关键.

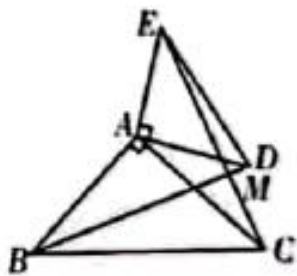
12. 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是以点 A 为直角顶点的等腰直角三角形，把 $\triangle ADE$ 以 A 为中心顺时针旋转，点 M 为射线 BD 、 CE 的交点. 若 $AB = \sqrt{3}$ ， $AD = 1$. 以下结论：

① $BD = CE$ ；② $BD \perp CE$ ；

③当点 E 在 BA 的延长线上时， $MC = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ ；

④在旋转过程中，当线段 MB 最短时， $\triangle MBC$ 的面积为 $\frac{1}{2}$.

其中正确结论有 ()



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】D

【解析】

【分析】证明 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$ 即可判断①，根据三角形的外角的性质得出②，证明 $\angle DCM \sim \angle ECA$ 得出

$\frac{MC}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ，即可判断③；以 A 为圆心， AD 为半径画圆，当 CE 在 $\odot A$ 的下方与 $\odot A$ 相切时， MB 的

值最小，可得四边形 $AEMD$ 是正方形，在 $Rt\triangle MBC$ 中 $MC = \sqrt{BC^2 - MB^2} = \sqrt{2} + 1$ ，然后根据三角形的面积公式即可判断④.

【详解】解： $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是以点 A 为直角顶点的等腰直角三角形，

$\therefore BA = CA, DA = EA, \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAE$,

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE$,

$\therefore \angle ABD = \angle ACE$ ， $BD = CE$ ，故①正确；

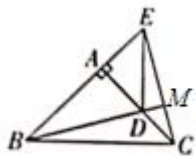
设 $\angle ABD = \angle ACE = \alpha$,

$$\therefore \angle DBC = 45^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle EMB = \angle DBC + \angle BCM = \angle DBC + \angle BCA + \angle ACE = 45^\circ - \alpha + 45^\circ + \alpha = 90^\circ,$$

$\therefore BD \perp CE$, 故②正确;

当点 E 在 BA 的延长线上时, 如图所示



$$\therefore \angle DCM = \angle ECA, \quad \angle DMC = \angle EAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCM \sim \angle ECA$$

$$\therefore \frac{MC}{AC} = \frac{CD}{EC}$$

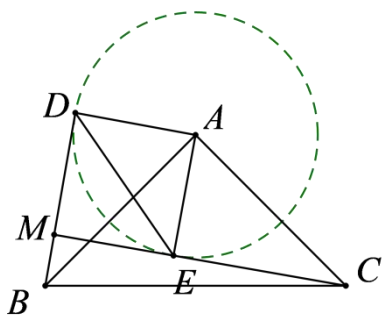
$$\therefore AB = \sqrt{3}, \quad AD = 1.$$

$$\therefore CD = AC - AD = \sqrt{3} - 1, \quad CE = \sqrt{AE^2 + AC^2} = 2$$

$$\therefore \frac{MC}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\therefore MC = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}, \quad \text{故③正确;}$$

④如图所示, 以 A 为圆心, AD 为半径画圆,



$$\therefore \angle BMC = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{当 } CE \text{ 在 } \odot A \text{ 的下方与 } \odot A \text{ 相切时, } MB \text{ 的值最小, } \angle ADM = \angle DAE = \angle AEM = 90^\circ$$

$\therefore$ 四边形 $AEMD$ 是矩形,

又 $AE = AD$,

∴ 四边形 $AEMD$ 是正方形,

$$\therefore MD = AE = 1,$$

$$\because BD = EC = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore MB = BD - MD = \sqrt{2} - 1,$$

在 $Rt\triangle MBC$ 中, $MC = \sqrt{BC^2 - MB^2}$

$$\therefore PB \text{ 取得最小值时, } MC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - MB^2} = \sqrt{3 + 3 - (\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} + 1$$

$$\therefore S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} MB \times MC = \frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1) (\sqrt{2} + 1) = \frac{1}{2}$$

故④正确,

故选: D.

【点睛】 本题考查了旋转的性质, 相似三角形的性质, 勾股定理, 切线的性质, 垂线段最短, 全等三角形的性质与判定, 正方形的性质, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

二、填空题: 本大题共 6 个小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请把答案直接填在答题卡对应题中横线上.

13. 在“庆五四·展风采”的演讲比赛中, 7 位同学参加决赛, 演讲成绩依次为: 77, 80, 79, 77, 80, 79, 80. 这组数据的中位数是_____.

【答案】 79

【解析】

【分析】 根据有序数组中间的一个数据或中间两个数据的平均数是中位数计算即可.

【详解】 将这组数据从小到大排列为: 77, 77, 79, 79, 80, 80, 80,

中间数据是 79,

故中位数是 79.

故答案为: 79.

【点睛】 本题考查了中位数的定义, 熟练掌握定义是解题的关键.

14. 分解因式: $x^3 - 6x^2 + 9x =$ _____.

【答案】 $x(x-3)^2$

【解析】

【详解】 解: $x^3 - 6x^2 + 9x$

$$= x(x^2 - 6x + 9)$$

$$= x(x-3)^2$$

故答案为： $x(x-3)^2$

15. 若关于 x 的方程 $x^2 - 2(m+1)x + m + 4 = 0$ 两根的倒数和为 1，则 m 的值为_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 根据根与系数的关系即可求出答案.

【详解】 解： 设方程的两个根分别为 a, b ,

由题意得： $a+b = 2(m+1)$, $ab = m+4$,

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{2(m+1)}{m+4},$$

$$\therefore \frac{2(m+1)}{m+4} = 1, \text{ 解得: } m = 2,$$

经检验： $m = 2$ 是分式方程的解，

$$\text{检验: } \Delta = [-2(m+1)]^2 - 4(m+4) = 4 \times (2+1)^2 - 4 \times (2+4) = 12 > 0,$$

$\therefore m = 2$ 符合题意，

$\therefore m = 2$.

故答案为： 2.

【点睛】 本题考查了一元二次方程根与系数的关系，掌握一元二次方程根与系数的关系是解题的关键.

16. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 2x+1 > x+a \text{ ①} \\ \frac{x}{2}+1 \geq \frac{5}{2}x-9 \text{ ②} \end{cases}$ 所有整数解的和为 14，则整数 a 的值为_____.

【答案】 2 或 -1

【解析】

【分析】 根据题意可求不等式组的解集为 $a-1 < x \leq 5$ ，再分情况判断出 a 的取值范围，即可求解.

【详解】 解： 由①得： $x > a-1$,

由②得： $x \leq 5$,

$\therefore$ 不等式组的解集为： $a-1 < x \leq 5$,

$\therefore$ 所有整数解的和为 14，

①整数解为： 2、3、4、5，

$$\therefore 1 \leq a-1 < 2,$$

解得： $2 \leq a < 3$,

$\because a$ 为整数,

$\therefore a = 2$.

②整数解为: $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$,

$\therefore -2 \leq a-1 < -1$,

解得: $-1 \leq a < 0$,

$\because a$ 为整数,

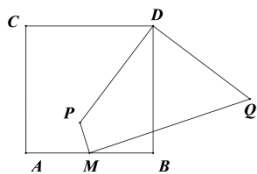
$\therefore a = -1$.

综上, 整数 a 的值为 2 或 -1

故答案为: 2 或 -1.

【点睛】 本题考查了含参数的一元一次不等式组的整数解问题, 掌握一元一次不等式组的解法, 理解参数的意义是解题的关键.

17. 如图, M 是正方形 $ABCD$ 边 CD 的中点, P 是正方形内一点, 连接 BP , 线段 BP 以 B 为中心逆时针旋转 90° 得到线段 BQ , 连接 MQ . 若 $AB = 4$, $MP = 1$, 则 MQ 的最小值为_____.

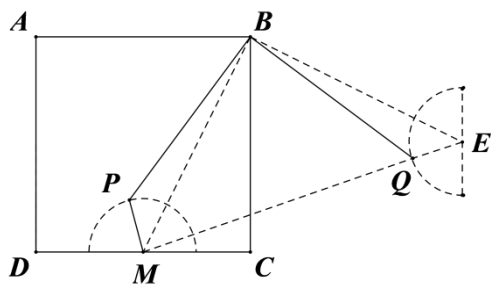


【答案】 $2\sqrt{10} - 1$

【解析】

【分析】 连接 BM , 将 BM 以 B 中心, 逆时针旋转 90° , M 点的对应点为 E , 由 P 的运动轨迹是以 M 为圆心, 1 为半径的半圆, 可得: Q 的运动轨迹是以 E 为圆心, 1 为半径的半圆, 再根据“圆外一定点到圆上任一点的距离, 在圆心、定点、动点, 三点共线时定点与动点之间的距离最短”, 所以当 M 、 Q 、 E 三点共线时, MQ 的值最小, 可求 $ME = \sqrt{2}BM = 2\sqrt{10}$, 从而可求解.

【详解】 解, 如图, 连接 BM , 将 BM 以 B 中心, 逆时针旋转 90° , M 点的对应点为 E ,



$\because P$ 的运动轨迹是以 M 为圆心, 1 为半径的半圆,

$\therefore Q$ 的运动轨迹是以 E 为圆心，1 为半径的半圆，

如图，当 M 、 Q 、 E 三点共线时， MQ 的值最小，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore CD = AB = BC = 4, \angle C = 90^\circ,$$

$\because M$ 是 CM 的中点，

$$\therefore CM = 2,$$

$$\therefore BM = \sqrt{CM^2 + BC^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

由旋转得： $BM = BE$ ，

$$\therefore ME = \sqrt{2}BM = 2\sqrt{10},$$

$$\therefore MQ = ME - EQ$$

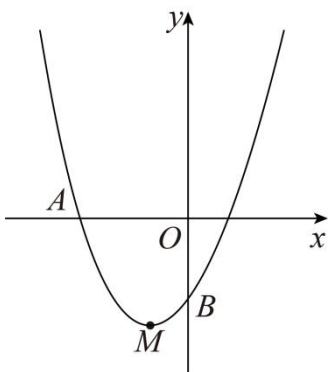
$$= 2\sqrt{10} - 1,$$

$$\therefore MQ \text{ 的值最小为 } 2\sqrt{10} - 1.$$

故答案： $2\sqrt{10} - 1$.

【点睛】 本题考查了正方形的性质，旋转的性质，勾股定理，动点产生的线段最小值问题，掌握相关的性质，根据题意找出动点的运动轨迹是解题的关键.

18. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $A(-3, 0)$ ，顶点为 $M(-1, m)$ ，且抛物线与 y 轴的交点 B 在 $(0, -2)$ 和 $(0, -3)$ 之间（不含端点），则下列结论：



①当 $-3 \leq x \leq 1$ 时， $y \leq 1$ ；

②当 $\triangle ABM$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 时, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

③当 $\triangle ABM$ 为直角三角形时, 在 $\triangle AOB$ 内存在唯一点 P , 使得 $PA+PO+PB$ 的值最小, 最小值的平方为 $18+9\sqrt{3}$.

其中正确的结论是_____. (填写所有正确结论的序号)

【答案】②③

【解析】

【分析】根据条件可求抛物线与 x 轴的另一交点坐标, 结合图象即可判断①; 设抛物线为 $y = a(x-1)(x+3)$, 即可求出点 M 的坐标, 根据割补法求面积, 判断②; 分三种情况讨论, 然后以点 O 为旋转中心, 将 $\triangle AOB$ 顺时针旋转 60° 至 $\triangle AOA'$, 连接 AA' , PP' , $A'B$, 得到 $PA+PO+PB = P'A+PP'+PB \geq A'B$, 判断③.

【详解】解: $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $A(-3, 0)$, 顶点为 $M(-1, m)$,

$\therefore$ 对称轴 $x = -1$,

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的另一交点坐标为 $(1, 0)$,

由图象可得: 当 $-3 \leq x \leq 1$ 时, $y \leq 0$;

$\therefore$ ①错, 不符合题意;

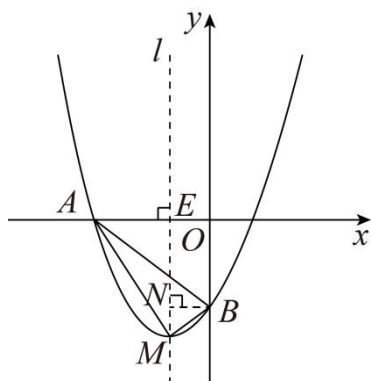
$\therefore$ 抛物线与 x 轴的另一交点坐标为 $(1, 0)$,

$\therefore$ 设抛物线为 $y = a(x-1)(x+3)$,

当 $x = -1$ 时, $y = -4a$, 当 $x = 0$ 时, $y = -3a$,

$\therefore M(-1, -4a)$, $B(0, -3a)$,

如图所示, 过点 M 作平行于 y 轴的直线 l , 过点 A 作 $AE \perp l$, 过点 B 作 $BN \perp l$,



$$\therefore S_{ABM} = S_{AMF} + S_{BMF} = \frac{1}{2} \times MF \times AO = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

设直线 AB 的解析式为 $y = k'x + b'$,

$$\text{把 } B(0, -3a), A(-3, 0) \text{ 代入得: } \begin{cases} -3k' + b' = 0 \\ b' = -3a \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k' = -a \\ b' = -3a \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y = -ax - 3a$,

当 $x = -1$ 是, $y = -2a$,

$$\therefore F(-1, -2a),$$

$$\therefore MF = 2a,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2a \times 3 = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{解得: } a = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 故②正确;}$$

$\therefore$ 点 B 是抛物线与 y 轴的交点,

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $y = -3a$,

$$\therefore B(0, -3a),$$

$\therefore \triangle ABM$ 为直角三角形,

当 $\angle AMB = 90^\circ$ 时,

$$\therefore AM^2 + BM^2 = AB^2,$$

$$\therefore AM = \sqrt{(-2)^2 + (-4a)^2} = \sqrt{4 + 16a^2}, \quad BM = \sqrt{(-1)^2 + (-a)^2} = \sqrt{1 + a^2},$$

$$AB = \sqrt{(-3)^2 + (-3a)^2} = \sqrt{9 + 9a^2},$$

$$\therefore 4 + 16a^2 + 1 + a^2 = 9 + 9a^2, \text{ 整理得: } 8a^2 = 4,$$

$$\text{解得: } a = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (舍)}$$

$$\therefore B\left(0, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right),$$

当 $\angle ABM = 90^\circ$ 时,

$$\therefore AB^2 + BM^2 = AM^2,$$

$$\therefore 4 + 16a^2 = 9 + 9a^2 + 1 + a^2, \text{ 整理得: } 6a^2 = 6$$

解得: $a = 1$ 或 -1 (舍)

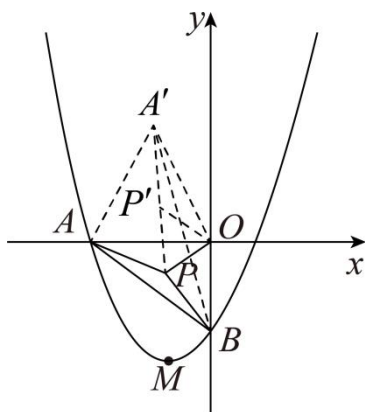
$$\therefore B(0, -3),$$

当 $\angle MAB = 90^\circ$ 时,

$$\therefore AB^2 + AM^2 = BM^2,$$

$$\therefore 4 + 16a^2 + 1 + a^2 = 9 + 9a^2, \text{ 无解;}$$

以点 O 为旋转中心, 将 $\triangle AOB$ 顺时针旋转 60° 至 $\triangle AOA'$, 连接 AA' , PP' , $A'B$, 如图所示,



则 $\triangle AOA'$, $\triangle POP'$ 为等边三角形,

$$\therefore OP = PP', \quad AP = AP',$$

$$\therefore PA + PO + PB = P'A' + PP' + PB \geq A'B,$$

$$\therefore \triangle AOA' \text{ 为等边三角形, } A(-3, 0)$$

$$\therefore x_{A'} = -\frac{3}{2}, \quad y_{A'} = \frac{3}{2} \times \tan 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore A'(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}),$$

当 $B(0, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$ 时,

$$\therefore A'B^2 = (-\frac{3}{2})^2 + (\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{54}{4} + \frac{9\sqrt{6}}{2},$$

当 $B(0, -3)$ 时,

$$A'B^2 = 18 + \frac{9\sqrt{3}}{2} + 3^2 = 18 + 9\sqrt{3},$$

$\therefore PA + PO + PB$ 的值最小, 最小值的平方为 $18 + 9\sqrt{3}$, 故③正确;

故答案为: ②③.

【点睛】 本题考查了二次函数的综合问题, 综合性较强, 难度较大, 扎实的知识基础是关键.

三、解答题: 本大题共 7 个小题, 共 78 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

19. 计算

(1) 计算: $2 \tan 45^\circ \left(-\frac{1}{2}\right)^0 + |\sqrt{3} - 1|$.

(2) 化简: $\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) \div \frac{x}{x^2-4}$.

【答案】 (1) $1 + \sqrt{3}$

(2) $\frac{4}{x}$

【解析】

【分析】 (1) 根据特殊角的锐角三角函数、零指数幂、绝对值化简计算即可;

(2) 根据分式化简运算规则计算即可.

【小问 1 详解】

解: 原式 $= 2 \times 1 \times 1 + \sqrt{3} - 1$

$= 1 + \sqrt{3};$

【小问 2 详解】

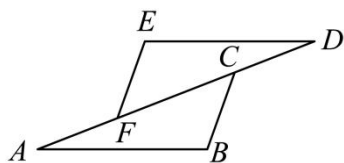
解: 原式 $= \left(\frac{x+2}{(x-2)(x+2)} - \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} \right) \times \frac{x^2-4}{x}$

$= \frac{4}{x^2-4} \times \frac{x^2-4}{x}$

$= \frac{4}{x}$

【点睛】 本题考查了实数的混合运算与分式化简以及特殊角三角函数, 熟记运算法则是关键.

20. 已知: 如图, $AB \parallel DE$, $AB = DE$, $AF = DC$. 求证: $\angle B = \angle E$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】根据平行线的性质得出 $\angle A = \angle D$ ，然后证明 $AC = DF$ ，证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (SAS)，根据全等三角形的性质即可得证.

【详解】证明： $\because AB \parallel DE$ ，

$$\therefore \angle A = \angle D,$$

$$\because AF = DC,$$

$$\therefore AF + CF = DC + CF$$

$$\text{即 } AC = DF$$

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中

$$\begin{cases} AC = DF \\ \angle A = \angle D, \\ AB = DE \end{cases}$$

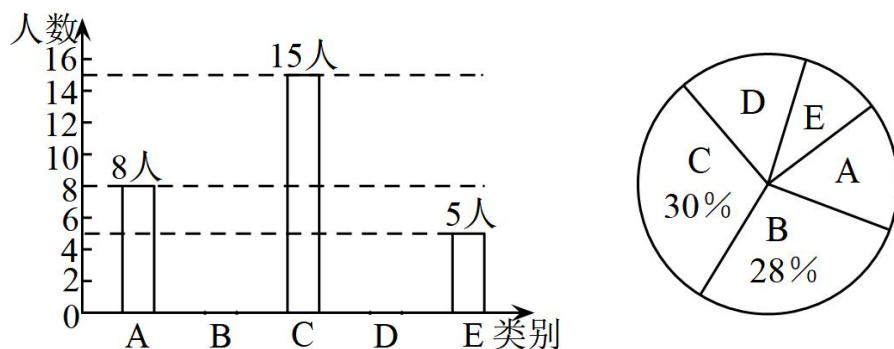
$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle B = \angle E.$$

【点睛】本题考查了全等三角形的性质与判定，熟练掌握全等三角形的性质与判定是解题的关键.

21. 某校举办“我劳动，我快乐，我光荣”活动. 为了解该校九年级学生周末在家的劳动情况，随机调查了九年级 1 班的所有学生在家劳动时间 (单位: 小时)，并进行了统计和整理绘制如图所示的不完整统计图. 根据图表信息回答以下问题:

类别	劳动时间 x
A	$0 \leq x < 1$
B	$1 \leq x < 2$
C	$2 \leq x < 3$
D	$3 \leq x < 4$
E	$4 \leq x$



- (1) 九年级 1 班的学生共有_____人，补全条形统计图；
- (2) 若九年级学生共有 800 人，请估计周末在家劳动时间在 3 小时及以上的学生人数；
- (3) 已知 E 类学生中恰好有 2 名女生 3 名男生，现从中抽取两名学生做劳动交流，请用列表或画树状图的方法，求所抽的两名学生恰好是一男一女的概率.

【答案】(1) 50，条形统计图见解析

(2) 208 人

(3) $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】(1) 利用 C 类人数除以对应的百分比即可得到九年级 1 班的总人数，再分别求出 B 和 D 的人数，补全统计图即可；

(2) 用九年级学生总人数乘以九年级 1 班周末在家劳动时间在 3 小时及以上的学生占的比值即可得到答案；

(3) 根据题意列出表格，利用满足要求的情况数除以总的情况数即可得到答案.

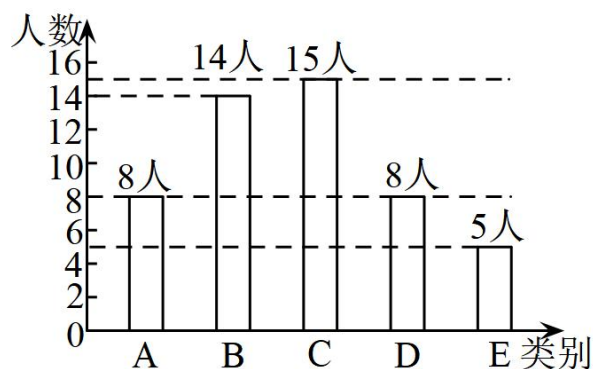
【小问 1 详解】

解：由题意得到， $15 \div 30\% = 50$ (人)，

故答案为：50

类别 B 的人数为 $50 \times 28\% = 14$ (人)，类别 D 的人数为 $50 - 8 - 14 - 15 - 5 = 8$ (人)，

补全条形统计图如下：



【小问 2 详解】

由题意得， $800 \times \frac{8+5}{50} = 208$ （人），

即估计周末在家劳动时间在3小时及以上的学生人数为208人；

【小问3详解】

列表如下：

	女1	女2	男1	男2	男3
女1		女1, 女2	女1, 男1	女1, 男2	女1, 男3
女2	女2, 女1		女2, 男1	女2, 男2	女2, 男3
男1	男1, 女1	男1, 女2		男1, 男2	男1, 男3
男2	男2, 女1	男2, 女2	男2, 男1		男2, 男3
男3	男3, 女1	男3, 女2	男3, 男1	男3, 男2	

由表格可知，共有20种等可能的情况，其中一男一女共有12种，

$\therefore$ 所抽的两名学生恰好是一男一女的概率是 $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ 。

【点睛】 此题考查了条形统计图和扇形统计图的信息关联、用树状图或列表法求概率、样本估计总体等知识，熟练掌握用树状图或列表法求概率、样本估计总体是解题的关键。

22. 渝昆高速铁路的建成，将会显著提升宜宾的交通地位。渝昆高速铁路宜宾临港长江公铁两用大桥（如图1），桥面采用国内首创的公铁平层设计。为测量左桥墩底到桥面的距离 CD ，如图2。在桥面上点 A 处，测得 A 到左桥墩 D 的距离 $AD = 200$ 米，左桥墩所在塔顶 B 的仰角 $\angle BAD = 45^\circ$ ，左桥墩底 C 的俯角 $\angle CAD = 15^\circ$ ，求 CD 的长度。（结果精确到1米。参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.41$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$ ）



图1

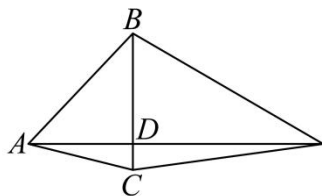


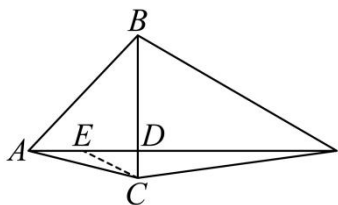
图2

【答案】 CD 的长度54米

【解析】

【分析】 AD 上截取 AE ，使得 $AE = EC$ ，设 $CD = x$ ，在 $Rt\triangle ECD$ 中， $ED = \sqrt{3}x$ ， $EC = 2x$ ，则 $AD = AE + ED = (\sqrt{3} + 2)x$ ，进而即可求解。

【详解】 解：如图所示， AD 上截取 AE ，使得 $AE = EC$ ，



$$\therefore \angle EAC = \angle ECA,$$

$$\therefore \angle CAD = 15^\circ$$

$$\therefore \angle CED = 2\angle EAC = 30^\circ,$$

设 $CD = x$ ，在 $\text{Rt}\triangle ECD$ 中， $ED = \sqrt{3}x$ ， $EC = 2x$

$$\therefore AD = AE + ED = (\sqrt{3} + 2)x$$

$$\text{又 } AD = 200$$

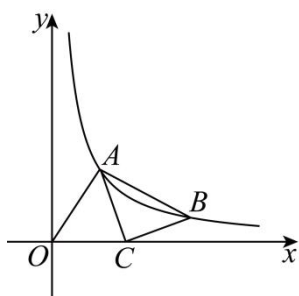
$$\therefore 200 = (\sqrt{3} + 2)x$$

$$\therefore x = \frac{200}{\sqrt{3} + 2} = 200(2 - \sqrt{3}) \approx 200 \times (2 - 1.73) = 54$$

即 $CD = 54$ 米

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用，熟练掌握三角函数的定义是解题的关键.

23. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，等腰直角三角形 ABC 的直角顶点 $C(3,0)$ ，顶点 A 、 $B(6, m)$ 恰好落在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 第一象限的图象上.



(1) 分别求反比例函数的表达式和直线 AB 所对应的一次函数的表达式;

(2) 在 x 轴上是否存在一点 P ，使 $\triangle ABP$ 周长的值最小. 若存在，求出最小值；若不存在，请说明理由.

【答案】 (1) $y = \frac{6}{x}$ ， $y = -\frac{1}{2}x + 4$

(2) 在 x 轴上存在一点 $P(5,0)$ ，使 $\triangle ABP$ 周长的值最小,最小值是 $2\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$.

【解析】

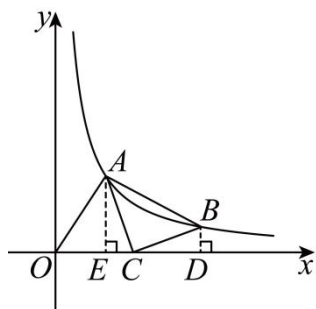
【分析】 (1) 过点 A 作 $AE \perp x$ 轴于点 E ，过点 B 作 $BD \perp x$ 轴于点 D ，证明 $\triangle ACE \cong \triangle CBD$ (AAS)，则

$CD = AE = 3, BD = EC = m$ ，由 $OE = 3 - m$ 得到点 A 的坐标是 $(3 - m, 3)$ ，由 $A, B(6, m)$ 恰好落在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 第一象限的图象上得到 $3(3 - m) = 6m$ ，解得 $m = 1$ ，得到点 A 的坐标是 $(2, 3)$ ，点 B 的坐标是 $(6, 1)$ ，进一步用待定系数法即可得到答案；

(2) 延长 AE 至点 A' ，使得 $EA' = AE$ ，连接 $A'B$ 交 x 轴于点 P ，连接 AP ，利用轴对称的性质得到 $AP = A'P$ ， $A'(2, -3)$ ，则 $AP + PB = A'B$ ，由 $AB = 2\sqrt{5}$ 知 AB 是定值，此时 $\triangle ABP$ 的周长为 $AP + PB + AB = AB + A'B$ 最小，利用待定系数法求出直线 $A'B$ 的解析式，求出点 P 的坐标，再求出周长最小值即可。

【小问 1 详解】

解：过点 A 作 $AE \perp x$ 轴于点 E ，过点 B 作 $BD \perp x$ 轴于点 D ，
则 $\angle AEC = \angle CDB = 90^\circ$ ，



$\therefore$ 点 $C(3, 0)$ ， $B(6, m)$ ，

$\therefore OC = 3, OD = 6, BD = m$ ，

$\therefore CD = OD - OC = 3$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ, AC = BC$ ，

$\therefore \angle ACE + \angle BCD = \angle CBD + \angle BCD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ACE = \angle CBD$ ，

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle CBD (\text{AAS})$ ，

$\therefore CD = AE = 3, BD = EC = m$ ，

$\therefore OE = OC - EC = 3 - m$ ，

$\therefore$ 点 A 的坐标是 $(3 - m, 3)$ ，

$\because A、B(6, m)$ 恰好落在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 第一象限的图象上.

$$\therefore 3(3-m) = 6m,$$

解得 $m = 1$,

$\therefore$ 点 A 的坐标是 $(2, 3)$, 点 B 的坐标是 $(6, 1)$,

$$\therefore k = 6m = 6,$$

$\therefore$ 反比例函数的解析式是 $y = \frac{6}{x}$,

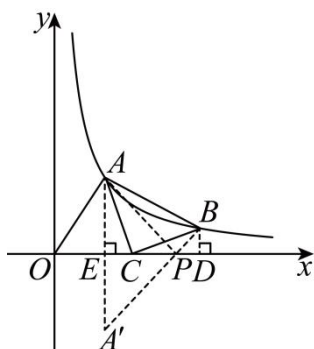
设直线 AB 所对应的一次函数的表达式为 $y = px + q$, 把点 A 和点 B 的坐标代入得,

$$\begin{cases} 2p + q = 3 \\ 6p + q = 1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} p = -\frac{1}{2} \\ q = 4 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AB 所对应的一次函数的表达式为 $y = -\frac{1}{2}x + 4$,

【小问 2 详解】

延长 AE 至点 A' , 使得 $EA' = AE$, 连接 $A'B$ 交 x 轴于点 P , 连接 AP ,



$\therefore$ 点 A 与点 A' 关于 x 轴对称,

$$\therefore AP = A'P, A'(2, -3),$$

$$\therefore AP + PB = A'P + PB = A'B,$$

$\therefore AP + PB$ 的最小值是 $A'B$ 的长度,

$$\therefore AB = \sqrt{(2-6)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{5}, \text{ 即 } AB \text{ 是定值},$$

$\therefore$ 此时 $\triangle ABP$ 的周长为 $AP + PB + AB = AB + A'B$ 最小,

设直线 $A'B$ 的解析式是 $y = nx + t$,

$$\text{则} \begin{cases} 2n+t=-3 \\ 6n+t=1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} n=1 \\ t=-5 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 $A'B$ 的解析式是 $y=x-5$,

当 $y=0$ 时, $0=x-5$, 解得 $x=5$,

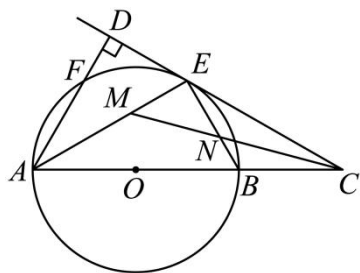
即点 P 的坐标是 $(5,0)$,

$$\text{此时 } AP+PB+AB=AB+A'B=2\sqrt{5}+\sqrt{(2-6)^2+(-3-1)^2}=2\sqrt{5}+4\sqrt{2},$$

综上所述, 在 x 轴上存在一点 $P(5,0)$, 使 $\triangle ABP$ 周长的值最小, 最小值是 $2\sqrt{5}+4\sqrt{2}$.

【点睛】此题考查了反比例函数和一次函数的图象和性质、用到了待定系数法求函数解析式、勾股定理求两点间距离、轴对称最短路径问题、全等三角形的判定和性质等知识, 数形结合和准确计算是解题的关键.

24. 如图, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 上有两点 E 、 F , $\widehat{BE}=\widehat{EF}$, 过点 E 作直线 $CD \perp AF$ 交 AF 的延长线于点 D , 交 AB 的延长线于点 C , 过 C 作 CM 平分 $\angle ACD$ 交 AE 于点 M , 交 BE 于点 N .



- (1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;
- (2) 求证: $EM=EN$;
- (3) 如果 N 是 CM 的中点, 且 $AB=9\sqrt{5}$, 求 EN 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 6

【解析】

【分析】(1) 根据同弧所对的圆周角相等得出 $\angle 1=\angle 2$, 根据 $OA=OE$, 得出 $\angle 1=\angle 3$, 则 $\angle 2=\angle 3$ 可得 $OE \parallel AF$, 根据已知 $CD \perp AF$, 得出 $OE \perp CD$, 即可得证;

(2) 根据角平分线的定义得出 $\angle 5=\angle 6=\frac{1}{2}\angle DCA$, 又 $\angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle DAC$, 根据三角形内角和定理得

出 $\angle EMC=45^\circ$, 由 AB 是 $\odot O$ 的直径, 即可得证;

(3) 取 EC 的中点 P ，连接 PN ，证明 $\angle BEC = \angle OAE$ ，由 N 是 MC 的中点， P 是 EC 的中点，得出

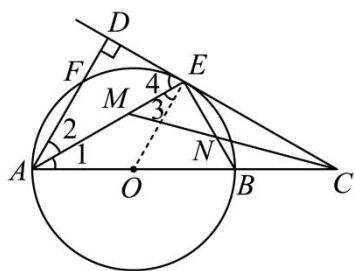
$PN \parallel EM, PN = \frac{1}{2}EM = \frac{1}{2}EN$ ，进而得出 $\tan \angle PEN = \frac{PN}{EN} = \frac{1}{2}$ ，设 $BE = b$ ，则 $AE = 2b$ ，勾股定理

得出 $AE = 18, EB = 9$ ，证明 $\triangle ECB \sim \triangle ACE$ 得出 $\frac{AE}{EB} = \frac{CE}{CB} = 2$ ，根据角平分线的性质得出 $\frac{EN}{BN} = \frac{EC}{BC} = 2$ ，

即可求解。

【小问 1 详解】

证明：如图所示，



$$\because \widehat{BE} = \widehat{EF},$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\because OA = OE$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3,$$

$$\therefore OE \parallel AF$$

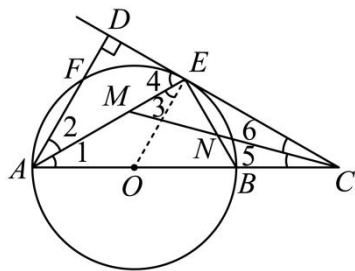
$$\because CD \perp AF,$$

$$\therefore OE \perp CD,$$

$$\therefore CD \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线};$$

【小问 2 详解】

证明：如图所示，



$$\therefore CM \text{ 平分 } \angle ACD$$

$$\therefore \angle 5 = \angle 6 = \frac{1}{2} \angle DCA$$

$$\text{又} \because \angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2} \angle DAC, \quad AD \perp CD$$

则 $\angle ADC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle EMC = \angle 1 + \angle 5 = \frac{1}{2} (\angle DAC + \angle DCA) = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle ADC) = 45^\circ,$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

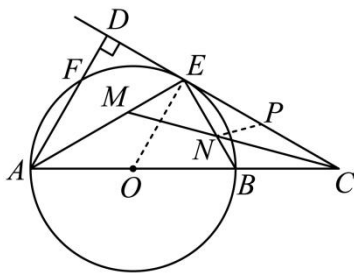
$$\therefore \angle MEN = \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ENM = \angle EMN = 45^\circ,$$

$$\therefore EM = EN;$$

【小问 3 详解】

解：如图所示，取 EC 的中点 P ，连接 PN ，



$\because CD$ 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore \angle CEB + \angle OEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AEO + \angle OEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEO = \angle BEC,$$

$$\text{又} \angle OAE = \angle OEA,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle OAE,$$

$\because N$ 是 MC 的中点, P 是 EC 的中点,

$$\therefore PN \parallel EM, PN = \frac{1}{2} EM = \frac{1}{2} EN,$$

$$\therefore AE \perp EB,$$

$$\therefore PN \perp EB,$$

$$\text{在 Rt} \triangle PEN \text{ 中, } \tan \angle PEN = \frac{PN}{EN} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle BEC = \angle OAE,$$

$$\therefore \tan \angle EAB = \frac{EB}{AE} = \tan \angle PEN = \frac{1}{2}$$

设 $BE = b$ ，则 $AE = 2b$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{5}b$$

$$\therefore AB = 9\sqrt{5}$$

$$\therefore b = 9$$

$$\therefore AE = 18, \quad EB = 9,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle EAC, \quad \angle ECB = \angle ACE,$$

$$\therefore \triangle ECB \sim \triangle ACE,$$

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{CE}{CB} = 2,$$

$\therefore CM$ 是 $\angle ACD$ 的角平分线，

$\therefore N$ 到 CD, AC 的距离相等，设为 d ，在 $\triangle EBC$ ，设点 C 到 EB 的距离为 h ，

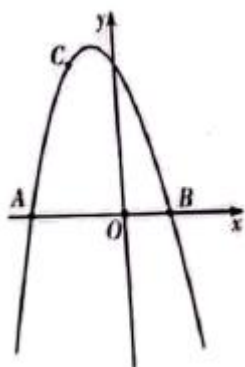
$$\therefore \frac{S_{\triangle ENC}}{S_{\triangle BNC}} = \frac{\frac{1}{2}EC \times d}{\frac{1}{2}BC \times d} = \frac{\frac{1}{2}EN \times h}{\frac{1}{2}BN \times h},$$

$$\therefore \frac{EN}{BN} = \frac{EC}{BC} = 2,$$

$$\therefore EN = \frac{2}{3}EB = 6.$$

【点睛】 本题考查了圆的综合问题，相似三角形的性质与判定，切线的判定与性质，圆周角定理，熟练掌握以上知识是解题的关键.

25. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-4, 0)$ 、 $B(2, 0)$ ，且经过点 $C(-2, 6)$.



- (1) 求抛物线的表达式；
- (2) 在 x 轴上方的抛物线上任取一点 N ，射线 AN 、 BN 分别与抛物线的对称轴交于点 P 、 Q ，点 Q 关于 x 轴的对称点为 Q' ，求 $\triangle APQ'$ 的面积；
- (3) 点 M 是 y 轴上一动点，当 $\angle AMC$ 最大时，求 M 的坐标.

【答案】(1) $y = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 6$

(2) $S_{\triangle APQ'} = \frac{81}{4}$

(3) $M(0, 12 - 4\sqrt{5})$

【解析】

【分析】(1) 设抛物线的解析式为 $y = a(x+4)(x-2)$ ，代入点 C 的坐标，确定 a 值即可.

(2) 设 $N\left(m, -\frac{3}{4}m^2 - \frac{3}{2}m + 6\right)$ ，直线 AN 的解析式为 $y = kx + b$ ，直线 BN 的解析式为 $y = px + q$ ，表

示出 P 、 Q 、 Q' 的坐标，进而计算即可.

(3) 当 M 是 y 轴与经过 A 、 C 、 M 三点的圆的切点是最大计算即可.

【小问 1 详解】

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-4, 0)$ 、 $B(2, 0)$,

$\therefore$ 设抛物线的解析式为 $y = a(x+4)(x-2)$,

$\because$ 经过点 $C(-2, 6)$,

$$\therefore 6 = a(-2+4)(-2-2),$$

解得 $a = -\frac{3}{4}$,

$$\therefore y = -\frac{3}{4}(x+4)(x-2),$$

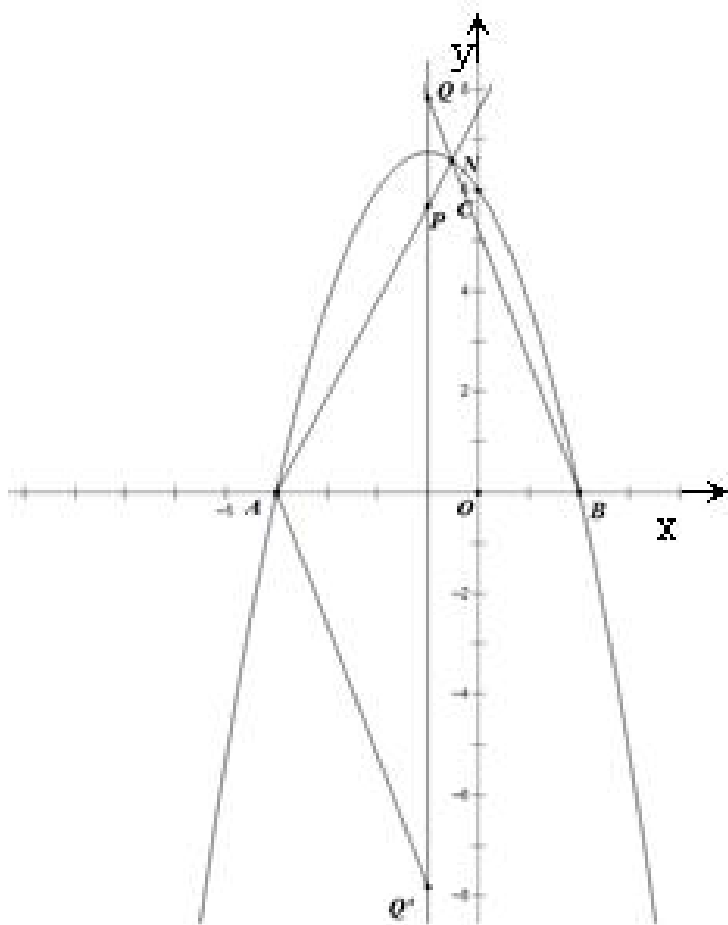
$$\therefore y = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 6.$$

【小问 2 详解】

如图，当点 N 在对称轴的右侧时，

$$\therefore y = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 6 = -\frac{3}{4}(x+1)^2 + \frac{27}{4},$$

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = -1$,



设 $N\left(m, -\frac{3}{4}m^2 - \frac{3}{2}m + 6\right)$ ，直线 AN 的解析式为 $y = kx + b$ ，直线 BN 的解析式为 $y = px + q$ ，

$$\therefore \begin{cases} -4k + b = 0 \\ mk + b = -\frac{3}{4}m^2 - \frac{3}{2}m + 6 \end{cases}, \begin{cases} 2p + q = 0 \\ mp + q = -\frac{3}{4}m^2 - \frac{3}{2}m + 6 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{-\frac{3}{4}m^2 - \frac{3}{2}m + 6}{m+4} \\ b = \frac{-3m^2 - 6m + 24}{m+4} \end{cases}, \begin{cases} p = \frac{-\frac{3}{4}m^2 - \frac{3}{2}m + 6}{m-2} \\ q = \frac{\frac{3}{2}m^2 + 3m - 12}{m-2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AN \text{ 的解析式为 } y = \frac{-\frac{3}{4}m^2 - \frac{3}{2}m + 6}{m+4}x + \frac{-3m^2 - 6m + 24}{m+4}, \text{ 直线 } BN \text{ 的解析式为}$$

$$y = \frac{-\frac{3}{4}m^2 - \frac{3}{2}m + 6}{m-2}x + \frac{\frac{3}{2}m^2 + 3m - 12}{m-2},$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } y = \frac{-\frac{3}{4}m^2 - \frac{3}{2}m + 6}{m+4} \times (-1) + \frac{-3m^2 - 6m + 24}{m+4} = \frac{-\frac{9}{4}m^2 - \frac{9}{2}m + 18}{m+4} = -\frac{9}{4}(m-2),$$

$$y = \frac{-\frac{3}{4}m^2 - \frac{3}{2}m + 6}{m-2} \times (-1) + \frac{\frac{3}{2}m^2 + 3m - 12}{m-2} = \frac{\frac{9}{4}m^2 + \frac{9}{2}m - 18}{m-2} = \frac{9}{4}(m+4),$$

$$\therefore P\left(-1, -\frac{9}{4}(m-2)\right), Q\left(-1, \frac{9}{4}(m+4)\right), Q'\left(-1, -\frac{9}{4}(m+4)\right),$$

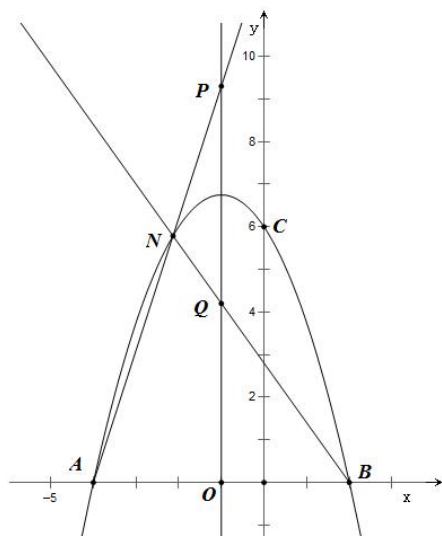
$$\therefore PQ' = -\frac{9}{4}(m-2) + \frac{9}{4}(m+4) = \frac{27}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle APQ'} = \frac{1}{2} \times \frac{27}{2} \times 3 = \frac{81}{4}.$$

如图，当点 N 在对称轴的左侧时，

$$\therefore y = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 6 = -\frac{3}{4}(x+1)^2 + \frac{27}{4},$$

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = -1$,



$$\text{设 } N\left(m, -\frac{3}{4}m^2 - \frac{3}{2}m + 6\right), P\left(-1, -\frac{9}{4}(m-2)\right), Q\left(-1, \frac{9}{4}(m+4)\right), Q'\left(-1, -\frac{9}{4}(m+4)\right),$$

$$\therefore PQ' = -\frac{9}{4}(m-2) + \frac{9}{4}(m+4) = \frac{27}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle APQ'} = \frac{1}{2} \times \frac{27}{2} \times 3 = \frac{81}{4}.$$

$$\text{综上所述, } S_{\triangle APQ'} = \frac{81}{4}.$$

【小问3详解】

当 $\triangle AMC$ 的外接圆与 OM 相切，切点为 M 时， $\angle AMC$ 最大，

设外接圆的圆心为 E ， Q 是异于点 M 的一点，连接 QA ， QC ， QA 交圆于点 T ，

则 $\angle AMC = \angle ATC$ ，根据三角形外角性质，得 $\angle ATC > \angle AQC$ ，故 $\angle AMC > \angle AQC$ ，

$\therefore \angle AMC$ 最大，

设 OA 与圆交于点 H ，连接 MH ， ME ，根据切线性质，

$$\therefore \angle EMO = \angle MOA = 90^\circ,$$

作直径 HN ，连接 MN ，

$$\therefore \angle HMN = 90^\circ, \angle MNH = \angle MAH,$$

$$\because EM = EH,$$

$$\therefore \angle EMH = \angle EHM,$$

$$\therefore 90^\circ - \angle EMH = 90^\circ - \angle EHM,$$

$$\therefore \angle OMH = \angle MNH = \angle MAH,$$

$$\therefore \triangle OMH \sim \triangle OAM,$$

$$\therefore \frac{OM}{OA} = \frac{OH}{OM},$$

$$\therefore OM^2 = OA \cdot OH,$$

设 $OM = y, OH = x$ ，则 $AH = 4 - x$ ，

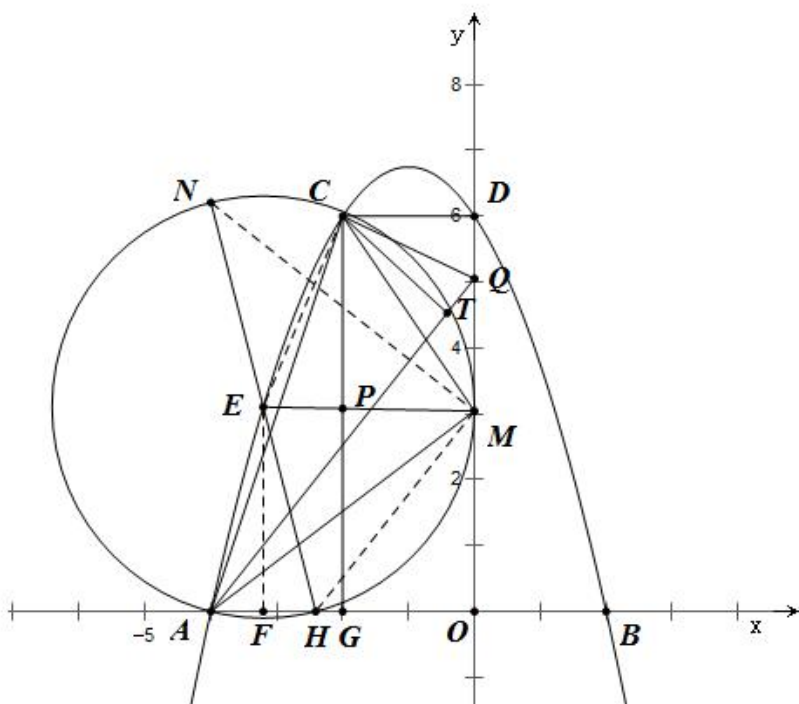
$$\therefore y^2 = 4x,$$

$$\therefore y = 2\sqrt{x},$$

过点 E 作 $EF \perp OA$ ，垂足为 F ，过点 C 作 $CG \perp OA$ ，垂足为 G ，交 EM 于点 P ，

根据垂径定理，得 $AF = FH = \frac{4-x}{2}$ ，四边形 $EMOF$ 是矩形，

$$\therefore EC = EM = OF = x + \frac{4-x}{2} = \frac{4+x}{2},$$



根据 $C(-2, 6)$, 得 $CD = PM = OG = 2$, $CG = 6$

$$\therefore PE = EM - PM = \frac{4+x}{2} - 2 = \frac{x}{2},$$

$$\therefore CP = CG - PG = CG - OM = 6 - 2\sqrt{x},$$

在直角三角形 PEC 中,

$$\therefore \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (6 - 2\sqrt{x})^2 = \left(\frac{4+x}{2}\right)^2,$$

$$\therefore x+16=12\sqrt{x},$$

$$\therefore (x+16)^2 = (12\sqrt{x})^2,$$

$$\therefore x^2 - 112x + 256 = 0,$$

解得 $x_1 = 56 - 24\sqrt{5}$, $x_2 = 56 + 24\sqrt{5} > 4$ (舍去),

$$\therefore y = 2\sqrt{x} = 2\sqrt{56 - 24\sqrt{5}} = 2\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})^2} = 2(6 - 2\sqrt{5}) = 12 - 4\sqrt{5},$$

故 $OM = 12 - 4\sqrt{5}$,

$\therefore$ 当 $\angle AMC$ 最大时, $M(0, 12 - 4\sqrt{5})$.

【点睛】此题是二次函数综合题，主要考查了待定系数法，等腰三角形的性质，垂径定理，勾股定理，矩

形的判定和性质，三角形的外接圆，相似三角形的判定和性质，用方程的思想解决问题是解本题的关键.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】