

2023 年四川省南充市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分）每小题都有代号为 A 、 B 、 C 、 D 四个答案选项，其中只有一个是正确的．请根据正确选项的代号填涂答题卡对应位置，填涂正确记 4 分，不涂、错涂或多涂记 0 分．

1. 如果向东走 10m 记作 $+10\text{m}$ ，那么向西走 8m 记作（ ）

- A. -10m B. $+10\text{m}$ C. -8m D. $+8\text{m}$

【答案】C

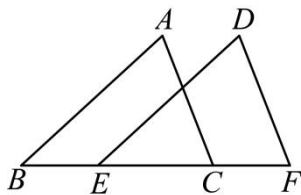
【解析】

【分析】根据具有相反意义的量即可得．

【详解】解：因为向东与向西是一对具有相反意义的量，
所以如果向东走 10m 记作 $+10\text{m}$ ，那么向西走 8m 记作 -8m ，
故选：C．

【点睛】本题考查了具有相反意义的量，熟练掌握具有相反意义的量是解题关键．

2. 如图，将 $\triangle ABC$ 沿 BC 向右平移得到 $\triangle DEF$ ，若 $BC = 5$ ， $BE = 2$ ，则 CF 的长是（ ）



- A. 2 B. 2.5 C. 3 D. 5

【答案】A

【解析】

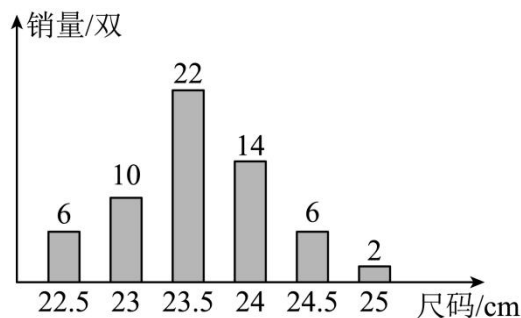
【分析】利用平移的性质得到 $BE = CF$ ，即可得到 CF 的长．

【详解】解： $\because \triangle ABC$ 沿 BC 方向平移至 $\triangle DEF$ 处，
 $\therefore BE = CF = 2$ ，

故选：A．

【点睛】本题考查了平移的性质：把一个图形整体沿某一直线方向移动，会得到一个新的图形，新图形与原图形的形状和大小完全相同；新图形中的每一点，都是由原图形中的某一点移动后得到的，这两个点是对应点．连接各组对应点的线段平行（或共线）且相等．

3. 某女鞋专卖店在一周内销售了某种女鞋 60 双，对这批鞋子尺码及销量进行统计，得到条形统计图（如图）．根据图中信息，建议下次进货量最多的女鞋尺码是（ ）



- A. 22cm B. 22.5cm C. 23cm D. 23.5cm

【答案】 D

【解析】

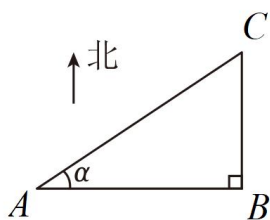
【分析】 进货量最多的应该是销量最多的，故求出众数即可.

【详解】 专卖店进货量最多的应该是销量最多的，根据条形统计图可得，众数是 23.5cm，故下次进货最多的女鞋尺码是 23.5cm；

故选： D

【点睛】 本题考查众数的意义，理解众数是解题的关键.

4. 如图，小兵同学从 A 处出发向正东方向走 x 米到达 B 处，再向正北方向走到 C 处，已知 $\angle BAC = \alpha$ ，则 A，C 两处相距（ ）



- A. $\frac{x}{\sin \alpha}$ 米 B. $\frac{x}{\cos \alpha}$ 米 C. $x \cdot \sin \alpha$ 米 D. $x \cdot \cos \alpha$ 米

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据锐角三角函数中余弦值的定义即可求出答案.

【详解】 解： 小兵同学从 A 处出发向正东方向走 x 米到达 B 处，再向正北方向走到 C 处，

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ, \quad AB = x \text{ 米}.$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore AC = \frac{AB}{\cos \alpha} = \frac{x}{\cos \alpha} \text{ 米}.$$

故选： B.

【点睛】 本题考查了锐角三角函数中的余弦值，解题的关键在于熟练掌握余弦值的定义.余弦值就是在直角

三角形中，锐角的邻边与斜边之比.

5. 《孙子算经》记载：“今有木，不知长短. 引绳度之，余绳四尺五寸；屈绳量之，不足一尺. 木长几何？”

(尺、寸是长度单位，1 尺 = 10 寸). 意思是，现有一根长木，不知道其长短. 用一根绳子去度量长木，绳子还剩余 4.5 尺；将绳子对折再度量长木，长木还剩余 1 尺. 问长木长多少？设长木长为 x 尺，则可列方程为 ()

A. $\frac{1}{2}(x+4.5)=x-1$

B. $\frac{1}{2}(x+4.5)=x+1$

C. $\frac{1}{2}(x-4.5)=x+1$

D. $\frac{1}{2}(x-4.5)=x-1$

【答案】A

【解析】

【分析】设长木长为 x 尺，则绳子长为 $(x+4.5)$ 尺，根据“将绳子对折再度量长木，长木还剩余 1 尺”，可列出方程.

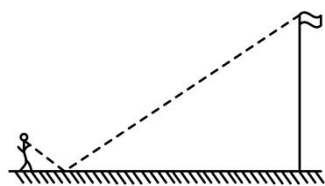
【详解】设长木长为 x 尺，则绳子长为 $(x+4.5)$ 尺，根据题意，得

$$\frac{1}{2}(x+4.5)=x-1$$

故选：A

【点睛】本题考查一元一次方程解决实际问题，理解题意，找出等量关系列出方程是解题的关键.

6. 如图，数学活动课上，为测量学校旗杆高度，小菲同学在脚下水平放置一平面镜，然后向后退（保持脚、镜和旗杆底端在同一直线上），直到她刚好在镜子中看到旗杆的顶端. 已知小菲的眼睛离地面高度为 1.6m，同时量得小菲与镜子的水平距离为 2m，镜子与旗杆的水平距离为 10m，则旗杆高度为 ()



A. 6.4m

B. 8m

C. 9.6m

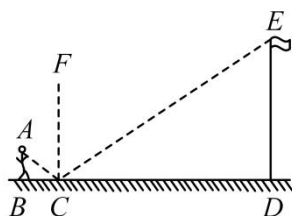
D. 12.5m

【答案】B

【解析】

【分析】根据镜面反射性质，可求出 $\angle ACB = \angle ECD$ ，再利用垂直求 $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ ，最后根据三角形相似的性质，即可求出答案.

【详解】解：如图所示，



由图可知， $AB \perp BD$ ， $CD \perp DE$ ， $CF \perp BD$

$$\therefore \angle ABC = \angle CDE = 90^\circ.$$

$\therefore$ 根据镜面的反射性质，

$$\therefore \angle ACF = \angle ECF,$$

$$\therefore 90^\circ - \angle ACF = 90^\circ - \angle ECF,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ECD,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EDC,$$

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CD}.$$

$\therefore$ 小菲的眼睛离地面高度为1.6m，同时量得小菲与镜子的水平距离为2m，镜子与旗杆的水平距离为10m，

$$\therefore AB = 1.6\text{m}, BC = 2\text{m}, CD = 10\text{m}.$$

$$\therefore \frac{1.6}{DE} = \frac{2}{10}.$$

$$\therefore DE = 8\text{m}.$$

故选：B.

【点睛】 本题考查了相似三角形的应用，解题的关键在于熟练掌握镜面反射的基本性质和相似三角形的性质.

7. 若点 $P(m, n)$ 在抛物线 $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 上，则下列各点在抛物线 $y = a(x+1)^2$ 上的是 ()

- A. $(m, n+1)$ B. $(m+1, n)$ C. $(m, n-1)$ D. $(m-1, n)$

【答案】 D

【解析】

【分析】 观察抛物线 $y = ax^2$ 和抛物线 $y = a(x+1)^2$ 可以发现，它们通过平移得到，故点 $P(m, n)$ 通过相同的平移落在抛物线 $y = a(x+1)^2$ 上，从而得到结论.

【详解】 $\therefore$ 抛物线 $y = a(x+1)^2$ 是抛物线 $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 向左平移 1 个单位长度得到

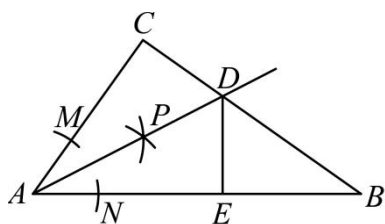
$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2$ 上点 $P(m, n)$ 向左平移 1 个单位长度后，会在抛物线 $y = a(x+1)^2$ 上

∴ 点 $(m-1, n)$ 在抛物线 $y = a(x+1)^2$ 上

故选：D

【点睛】本题考查函数图象与点的平移，通过函数解析式得到平移方式是解题的关键。

8. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $AB = 10$ ，以点 A 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 AC ， AB 于点 M ， N ，再分别以 M ， N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧在 $\angle CAB$ 的内部相交于点 P ，画射线 AP 与 BC 交于点 D ， $DE \perp AB$ ，垂足为 E 。则下列结论错误的是（ ）



- A. $\angle CAD = \angle BAD$ B. $CD = DE$ C. $AD = 5\sqrt{3}$ D. $CD : BD = 3 : 5$

【答案】C

【解析】

【分析】由作图方法可知， AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，则由角平分线的定义和性质即可判定 A 、 B ；利用勾股定理求出 BC ，利用等面积法求出 $CD = 3$ ，由此求出 AD 、 BD 即可判断 C 、 D 。

【详解】解：由作图方法可知， AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，

∴ $\angle CAD = \angle BAD$ ，故 A 结论正确，不符合题意；

∵ $\angle C = 90^\circ$ ， $DE \perp AB$ ，

∴ $CD = DE$ ，故 B 结论正确，不符合题意；

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理得 $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 8$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BAD},$$

$$\therefore \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} CD \cdot AC + \frac{1}{2} AB \cdot DE,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = \frac{1}{2} \times 6CD + \frac{1}{2} \times 10CD,$$

$$\therefore CD = 3,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = 3\sqrt{5}, \quad BD = BC - CD = 5, \quad \text{故 C 结论错误，符合题意；}$$

$$\therefore CD : BD = 3 : 5, \quad \text{故 D 结论正确，不符合题意；}$$

故选 C。

【点睛】本题主要考查了勾股定理，角平分线的性质和定义，角平分线的尺规作图，灵活运用所学知识是

解题的关键.

9. 关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 3x + y = 2m - 1 \\ x - y = n \end{cases}$ 的解满足 $x + y = 1$, 则 $4^m \div 2^n$ 的值是 ()

A. 1

B. 2

C. 4

D. 8

【答案】D

【解析】

【分析】法一：利用加减法解方程组，用 n, m 表示出 x, y ，再将求得的代数式代入 $x + y = 1$ ，得到 m, n 的关系，最后将 $4^m \div 2^n$ 变形，即可解答.

法二： $\begin{cases} 3x + y = 2m - 1 \text{ ①} \\ x - y = n \text{ ②} \end{cases}$ 中 ①-② 得到 $2m - n = 2(x + y) + 1$ ，再根据 $x + y = 1$ 求出 $2m - n = 3$ 代入代

数式进行求解即可.

【详解】解：法一： $\begin{cases} 3x + y = 2m - 1 \text{ ①} \\ x - y = n \text{ ②} \end{cases}$,

①+②得 $4x = 2m + n - 1$,

解得 $x = \frac{2m + n - 1}{4}$,

将 $x = \frac{2m + n - 1}{4}$ 代入 ②，解得 $y = \frac{2m - 3n - 1}{4}$,

$\because x + y = 1$,

$\therefore \frac{2m + n - 1}{4} + \frac{2m - 3n - 1}{4} = 1$,

得到 $2m - n = 3$,

$\therefore 4^m \div 2^n = 2^{2m} \div 2^n = 2^{2m-n} = 2^3 = 8$,

法二： $\begin{cases} 3x + y = 2m - 1 \text{ ①} \\ x - y = n \text{ ②} \end{cases}$

①-②得： $2x + 2y = 2m - n - 1$ ，即： $2m - n = 2(x + y) + 1$,

$\because x + y = 1$,

$\therefore 2m - n = 2 \times 1 + 1 = 3$,

$\therefore 4^m \div 2^n = 2^{2m} \div 2^n = 2^{2m-n} = 2^3 = 8$,

故选：D.

【点睛】本题考查了根据二元一次方程解的情况求参数，同底数幂除法，幂的乘方，熟练求出 m, n 的关系

是解题的关键.

10. 抛物线 $y = -x^2 + kx + k - \frac{5}{4}$ 与 x 轴的一个交点为 $A(m, 0)$, 若 $-2 \leq m \leq 1$, 则实数 k 的取值范围是()

A. $-\frac{21}{4} \leq k \leq 1$

B. $k \leq -\frac{21}{4}$ 或 $k \geq 1$

C. $-5 \leq k \leq \frac{9}{8}$

D. $k \leq -5$ 或 $k \geq \frac{9}{8}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据抛物线有交点, 则 $-x^2 + kx + k - \frac{5}{4} = 0$ 有实数根, 得出 $k \leq -5$ 或 $k \geq 1$, 分类讨论, 分别求得当 $x = -2$ 和 $x = 1$ 时 k 的范围, 即可求解.

【详解】解: $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + kx + k - \frac{5}{4}$ 与 x 轴有交点,

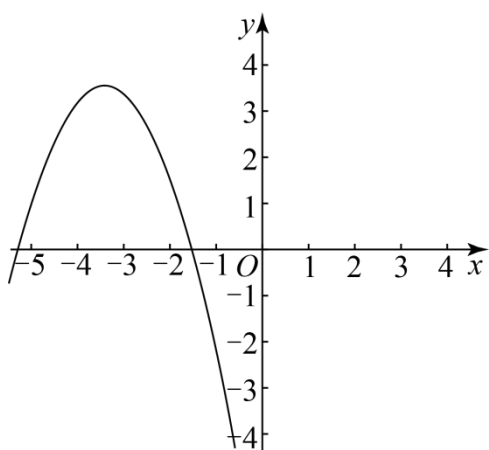
$$\therefore -x^2 + kx + k - \frac{5}{4} = 0 \text{ 有实数根,}$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$$

$$\text{即 } k^2 + 4\left(k - \frac{5}{4}\right) = k^2 + 4k - 5 = (k + 2)^2 - 9 \geq 0$$

解得: $k \leq -5$ 或 $k \geq 1$,

当 $k \leq -5$ 时, 如图所示,



依题意, 当 $x = -2$ 时, $-4 - 2k + k - \frac{5}{4} \geq 0$,

解得： $k \leq -\frac{21}{4}$ ，

当 $x=1$ 时， $-1+k+k-\frac{5}{4} \leq 0$ ，解得 $k \leq \frac{9}{8}$ ，

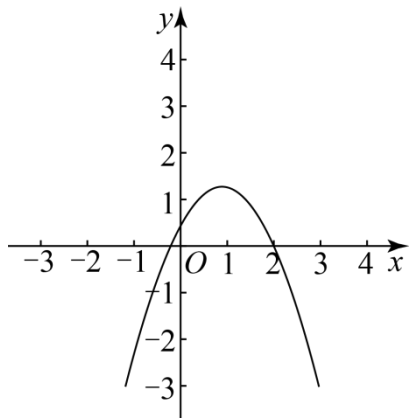
即 $k \leq -\frac{21}{4}$ ，

当 $k \geq 1$ 时，

当 $x=-2$ 时， $-4-2k+k-\frac{5}{4} \leq 0$ ，

解得： $k \geq -\frac{21}{4}$

$\therefore k \geq 1$



综上所述， $k \leq -\frac{21}{4}$ 或 $k \geq 1$ ，

故选：B.

【点睛】 本题考查了二次函数的性质，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 6 个小题，每小题 4 分，共 24 分) 请将答案填在答题卡对应的横线上.

11. 若分式 $\frac{x+1}{x-2}$ 的值为 0，则 x 的值为_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 根据分式 $\frac{x+1}{x-2}$ 的值为 0，得到 $\begin{cases} x+1=0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$ ，求解即可得到答案.

【详解】 解： $\because$ 分式 $\frac{x+1}{x-2}$ 的值为 0，

$$\therefore \begin{cases} x+1=0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases},$$

解得： $x = -1$ ，

故答案为： -1 。

【点睛】 本题考查了解分式方程，熟练掌握解分式方程的步骤是解题的关键，还要注意分式的分母不能为零。

12. 不透明袋中有红、白两种颜色的小球，这些球除颜色外无其他差别。从袋中随机取出一个球是红球的概率为 0.6 ，若袋中有 4 个白球，则袋中红球有_____个。

【答案】 6

【解析】

【分析】 设袋中红球有 x 个，然后根据概率计算公式列出方程求解即可。

【详解】 解： 设袋中红球有 x 个，

由题意得： $\frac{x}{x+4} = 0.6$ ，

解得 $x = 6$ ，

检验，当 $x = 6$ 时， $x + 4 \neq 0$ ，

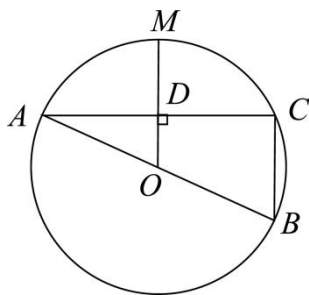
$\therefore x = 6$ 是原方程的解，

$\therefore$ 袋中红球有 6 个，

故答案为： 6 。

【点睛】 本题主要考查了已知概率求数量，熟知红球的概率 = 红球数量 $\div$ 球的总数是解题的关键。

13. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 D ， M 分别是弦 AC ， 弧 AC 的中点， $AC = 12$ ， $BC = 5$ ， 则 MD 的长是_____。



【答案】 4

【解析】

【分析】 根据圆周角定理得出 $\angle ACB = 90^\circ$ ，再由勾股定理确定 $AB = 13$ ，半径为 $\frac{13}{2}$ ，利用垂径定理确定 $OM \perp AC$ ，且 $AD = CD = 6$ ，再由勾股定理求解即可。

【详解】 解： $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\because AC = 12, BC = 5,$$

$$\therefore AB = 13,$$

$$\therefore AO = \frac{1}{2} AB = \frac{13}{2},$$

$\because$ 点 D , M 分别是弦 AC , 弧 AC 的中点,

$$\therefore OM \perp AC, \text{ 且 } AD = CD = 6,$$

$$\therefore OD = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \frac{5}{2},$$

$$\therefore MD = OM - OD = AO - OD = 4,$$

故答案为: 4.

【点睛】题目主要考查圆周角定理、垂径定理及勾股定理解三角形, 理解题意, 综合运用这些知识点是解题关键.

14. 小伟用撬棍撬动一块大石头, 已知阻力和阻力臂分别为 1000N 和 0.6m, 当动力臂由 1.5m 增加到 2m 时, 撬动这块石头可以节省 _____ N 的力. (杠杆原理: 阻力 $\times$ 阻力臂 = 动力 $\times$ 动力臂)

【答案】100

【解析】

【分析】设动力为 x N, 根据阻力 $\times$ 阻力臂 = 动力 $\times$ 动力臂, 分别解得动力臂在 1.5m 和 2m 时的动力, 即可解答.

【详解】解: 设动力为 x N,

根据阻力 $\times$ 阻力臂 = 动力 $\times$ 动力臂,

当动力臂在 1.5m 时, 可得方程 $1000 \times 0.6 = 1.5x_1$, 解得 $x_1 = 400$,

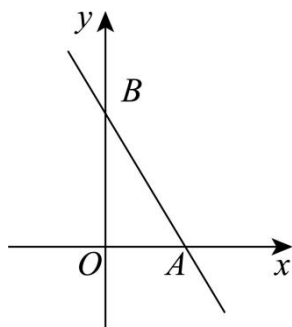
当动力臂在 2m 时, 可得方程 $1000 \times 0.6 = 2x_2$, 解得 $x_2 = 300$,

$400\text{N} - 300\text{N} = 100\text{N}$, 故节省 100N 的力,

故答案为: 100.

【点睛】本题考查了一元一次方程的实际应用, 根据题目中给出的等量关系, 正确列方程是解题的关键.

15. 如图, 直线 $y = kx - 2k + 3$ (k 为常数, $k < 0$) 与 x, y 轴分别交于点 A, B , 则 $\frac{2}{OA} + \frac{3}{OB}$ 的值是 _____.



【答案】 1

【解析】

【分析】 根据一次函数解析式得出 $OA = \frac{2k-3}{k}$, $OB = -2k+3$, 然后代入化简即可.

【详解】 解: $y = kx - 2k + 3$,

$\therefore$ 当 $y = 0$ 时, $x = -\frac{3}{k} + 2$, 当 $x = 0$ 时, $y = -2k + 3$,

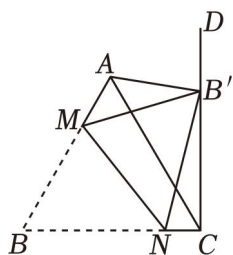
$\therefore OA = -\frac{3}{k} + 2 = \frac{2k-3}{k}$, $OB = -2k + 3$,

$\therefore \frac{2}{OA} + \frac{3}{OB} = \frac{2}{\frac{2k-3}{k}} + \frac{3}{3-2k} = \frac{2k}{2k-3} - \frac{3}{2k-3} = \frac{2k-3}{2k-3} = 1$,

故答案为: 1.

【点睛】 题目主要考查一次函数与坐标轴的交点及求代数式的值, 熟练掌握一次函数的性质是解题关键.

16. 如图, 在等边 $\triangle ABC$ 中, 过点 C 作射线 $CD \perp BC$, 点 M, N 分别在边 AB, BC 上, 将 $\triangle ABC$ 沿 MN 折叠, 使点 B 落在射线 CD 上的点 B' 处, 连接 AB' , 已知 $AB = 2$. 给出下列四个结论: ① $CN + NB'$ 为定值; ②当 $BN = 2NC$ 时, 四边形 $BMB'N$ 为菱形; ③当点 N 与 C 重合时, $\angle AB'M = 18^\circ$; ④当 AB' 最短时, $MN = \frac{7\sqrt{21}}{20}$. 其中正确的结论是_____ (填写序号)



【答案】 ①②④

【解析】

【分析】 根据等边三角形的性质可得 $BC = 2$, 根据折叠的性质可得 $NB' = NB$, 由此即可判断①正确; 先解直角三角形可得 $\angle CB'N = 30^\circ$, 从而可得 $\angle B'NC = 60^\circ = \angle B$, 然后根据平行线的判定可得

$BM \parallel B'N, MB' \parallel BN$, 根据菱形的判定即可得②正确; 先根据折叠的性质可得

$B'C = BC, \angle MB'C = \angle B = 60^\circ$ ，从而可得 $AC = B'C$ ，再根据等腰三角形的性质可得

$\angle AB'C = \angle CAB' = 75^\circ$ ，然后根据 $\angle AB'M = \angle AB'C - \angle MB'C$ 即可判断③错误；当 AB' 最短时，则

$AB' \perp CD$ ，过点 M 作 $ME \perp BC$ 于点 E ，连接 BB' ，交 MN 于点 O ，先利用勾股定理求出

$$BN = \frac{7}{4}, BB' = \sqrt{7}, \text{ 根据折叠的性质可得 } OB = \frac{\sqrt{7}}{2}, \text{ 设 } BE = y (y > 0), \text{ 则 } EN = \frac{7}{4} - y, BM = 2y,$$

再利用勾股定理可得 $EM = \sqrt{3}y, MN = \sqrt{\frac{49}{16} - \frac{7}{2}y + 4y^2}$ ，然后根据 $S_{\triangle BMN} = \frac{1}{2}BN \cdot EM = \frac{1}{2}OB \cdot MN$ 建

立方程，解一元二次方程可得 y 的值，由此即可判断④正确.

【详解】解：∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，且 $AB = 2$ ，

$$\therefore BC = AC = AB = 2, \angle B = \angle ACB = 60^\circ,$$

由折叠的性质得： $NB' = NB$ ，

$$\therefore CN + NB' = CN + NB = BC = 2, \text{ 是定值，则结论①正确；}$$

当 $BN = 2NC$ 时，则 $NB' = 2NC$ ，

$$\text{在 Rt}\triangle CB'N \text{ 中，} \sin \angle CB'N = \frac{NC}{NB'} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle CB'N = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle B'NC = 60^\circ = \angle B,$$

$$\therefore BM \parallel B'N,$$

由折叠的性质得： $\angle MB'N = \angle B = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle MB'N = \angle B'NC = 60^\circ,$$

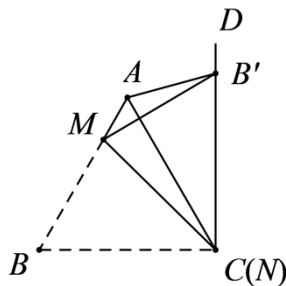
$$\therefore MB' \parallel BN,$$

∴ 四边形 $BMB'N$ 为平行四边形，

又∵ $NB' = NB$ ，

∴ 四边形 $BMB'N$ 为菱形，则结论②正确；

如图，当点 N 与 C 重合时，



∵ $CD \perp BC$ ，

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ,$$

由折叠的性质得： $B'C = BC, \angle MB'C = \angle B = 60^\circ$,

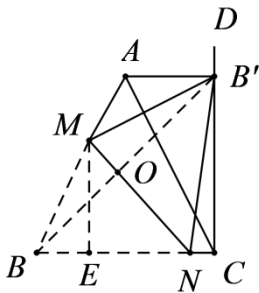
$$\therefore AC = B'C, \angle ACB' = \angle BCD - \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AB'C = \angle CAB' = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle AB'M = \angle AB'C - \angle MB'C = 15^\circ, \text{ 则结论③错误;}$$

当 AB' 最短时, 则 $AB' \perp CD$,

如图, 过点 M 作 $ME \perp BC$ 于点 E , 连接 BB' , 交 MN 于点 O ,



$$\because AC = 2, \angle ACB' = 30^\circ,$$

$$\therefore B'C = AC \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3},$$

$$\therefore BB' = \sqrt{BC^2 + B'C^2} = \sqrt{7},$$

$$\text{由折叠的性质得: } BB' \perp MN, OB = \frac{1}{2} BB' = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$\text{设 } BN = B'N = x, \text{ 则 } CN = BC - BN = 2 - x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle B'CN \text{ 中, } CN^2 + B'C^2 = B'N^2, \text{ 即 } (2-x)^2 + (\sqrt{3})^2 = x^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{7}{4},$$

$$\therefore BN = \frac{7}{4},$$

$$\text{设 } BE = y (y > 0), \text{ 则 } EN = \frac{7}{4} - y, \quad BM = 2y,$$

$$\therefore EM = \sqrt{BM^2 - BE^2} = \sqrt{3}y,$$

$$\therefore MN = \sqrt{EN^2 + EM^2} = \sqrt{\frac{49}{16} - \frac{7}{2}y + 4y^2},$$

$$\because S_{\triangle BMN} = \frac{1}{2} BN \cdot EM = \frac{1}{2} OB \cdot MN,$$

$$\therefore \frac{7}{4} \times \sqrt{3}y = \frac{\sqrt{7}}{2} \times \sqrt{\frac{49}{16} - \frac{7}{2}y + 4y^2},$$

解得 $y = \frac{7}{10}$ 或 $y = -\frac{7}{2} < 0$ (不符合题意, 舍去),

$$\therefore MN = \sqrt{\frac{49}{16} - \frac{7}{2} \times \frac{7}{10} + 4 \times \left(\frac{7}{10}\right)^2} = \frac{7\sqrt{21}}{20}, \text{ 则结论④正确;}$$

综上, 正确的结论是①②④,

故答案为: ①②④.

【点睛】本题考查了等边三角形的性质、折叠的性质、解直角三角形、菱形的判定、一元二次方程的应用等知识点, 熟练掌握折叠的性质是解题关键.

三、解答题 (本大题共 9 个小题, 共 86 分) 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 先化简, 再求值: $(a-2)(a+2)-(a+2)^2$, 其中 $a = -\frac{3}{2}$.

【答案】 $-4a-8$; -2

【解析】

【分析】先用平方差公式、完全平方公式展开, 再去括号、合并同类项进行化简, 最后代入求值.

【详解】 $(a-2)(a+2)-(a+2)^2$

$$= (a^2 - 4) - (a^2 + 4a + 4)$$

$$= a^2 - 4 - a^2 - 4a - 4$$

$$= -4a - 8$$

当 $a = -\frac{3}{2}$ 时

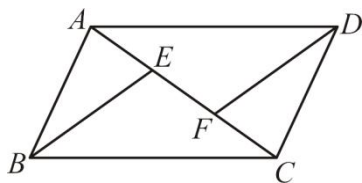
$$\text{原式} = -4a - 8$$

$$= -4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - 8$$

$$= -2$$

【点睛】本题考查平方差公式、完全平方公式、整式的化简求值, 熟练进行整式的化简是解题的关键.

18. 如图, 在 $ABCD$ 中, 点 E , F 在对角线 AC 上, $\angle CBE = \angle ADF$. 求证:



(1) $AE = CF$;

(2) $BE \parallel DF$.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据平行四边形的性质推出相应的线段和相应的角度相等，再利用已知条件求证 $\angle ABE = \angle CDF$ ，最后证明 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ (ASA) 即可求出答案.

(2) 根据三角形全等证明角度相等，再利用邻补角定义推出 $\angle BEF = \angle EFD$ 即可证明两直线平行.

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD, AB = CD, \angle ABC = \angle ADC,$$

$$\angle BAE = \angle FCD.$$

$$\because \angle CBE = \angle ADF, \angle ABC = \angle ADC,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CDF.$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF \text{ (ASA)}.$$

$$\therefore AE = CF.$$

【小问 2 详解】

证明：由 (1) 得 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ (ASA),

$$\therefore \angle AEB = \angle CFD.$$

$$\because \angle AEB + \angle BEF = 180^\circ, \angle CFD + \angle EFD = 180^\circ,$$

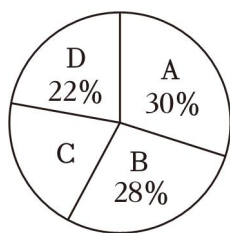
$$\therefore \angle BEF = \angle EFD.$$

$$\therefore BE \parallel DF.$$

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质，邻补角定义，三角形全等，平行线的判定，解题的关键在于熟练掌握平行四边形的性质.

19. 为培养学生劳动习惯，提升学生劳动技能，某校在五月第二周开展了劳动教育实践周活动. 七 (1) 班提供了四类活动：A. 物品整理，B. 环境美化，C. 植物栽培，D. 工具制作. 要求每个学生选择其中一项

活动参加，该班数学科代表对全班学生参与四类活动情况进行了统计，并绘制成统计图（如图）.



(1) 已知该班有 15 人参加 A 类活动，则参加 C 类活动有多少人？

(2) 该班参加 D 类活动的学生中有 2 名女生和 2 名男生获得一等奖，其中一名女生叫王丽，若从获得一等奖的学生中随机抽取两人参加学校“工具制作”比赛，求刚好抽中王丽和 1 名男生的概率.

【答案】(1) 10 人 (2) $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据 A 类人数及占比得出总人数，然后乘以 C 所占比例即可；

(2) 令王丽为女 1，另外的女生为女 2，男生分别为男 1，男 2，根据画树状图求概率即可求解.

【小问 1 详解】

解：这次被调查的学生共有 $\frac{15}{30\%} = 50$ （人）

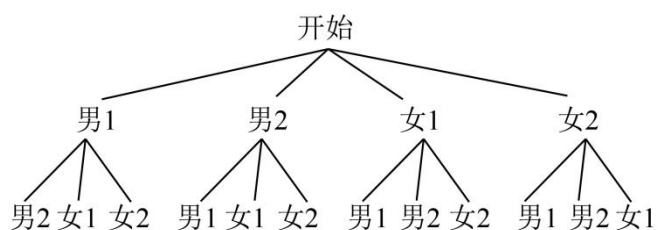
参加 C 类活动有： $50 \times (1 - 22\% - 30\% - 28\%) = 10$ （人）

$\therefore$ 参加 C 类活动有 10 人；

【小问 2 详解】

解：令王丽为女 1，另外的女生为女 2，男生分别为男 1，男 2，

画树状图为：



共有 12 种等可能结果，符合题意的有 4 种，

$\therefore$ 恰好选中王丽和 1 名男生的概率为： $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

【点睛】 本题主要考查了扇形统计图的综合运用，样本估计总体，画树状图法求概率，读懂统计图，从统计图中得到必要的信息是解决问题的关键.

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m - 1)x - 3m^2 + m = 0$

(1) 求证：无论 m 为何值，方程总有实数根；

(2) 若 x_1, x_2 是方程的两个实数根, 且 $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = -\frac{5}{2}$, 求 m 的值.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{2}{5}$ 或 1.

【解析】

【分析】(1) 根据一元二次方程根的情况与判别式的关系, 只要判定 $\Delta \geq 0$ 即可得到答案;

(2) 根据一元二次方程根与系数的关系得到 $x_1 + x_2 = 2m - 1$, $x_1 x_2 = -3m^2 + m$, 整体代入得到 $m^2 + 2m - 3 = 0$ 求解即可得到答案.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m - 1)x - 3m^2 + m = 0$,

$$\therefore a = 1, b = -(2m - 1), c = -3m^2 + m,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = [-(2m - 1)]^2 - 4 \times 1 \times (-3m^2 + m) = (4m - 1)^2,$$

$$\therefore (4m - 1)^2 \geq 0, \text{ 即 } \Delta \geq 0,$$

$\therefore$ 不论 m 为何值, 方程总有实数根;

【小问 2 详解】

解: $\because x_1, x_2$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m - 1)x - 3m^2 + m = 0$ 的两个实数根,

$$\therefore x_1 + x_2 = 2m - 1, x_1 x_2 = -3m^2 + m,$$

$$\therefore \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = -\frac{5}{2},$$

$$\therefore \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} = -\frac{1}{2},$$

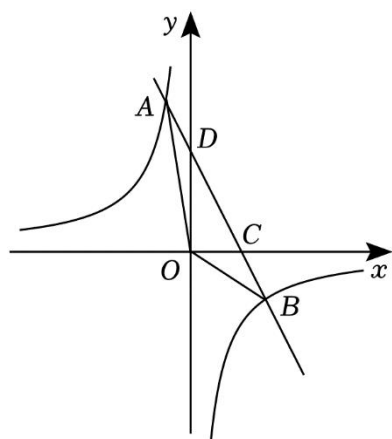
$$\therefore \frac{(2m - 1)^2}{-3m^2 + m} = -\frac{1}{2}, \text{ 整理, 得 } 5m^2 - 7m + 2 = 0, \text{ 解得 } m_1 = \frac{2}{5}, m_2 = 1,$$

$$\therefore m \text{ 的值为 } \frac{2}{5} \text{ 或 } 1.$$

【点睛】本题考查一元二次方程根的情况与判别式关系, 一元二次方程根与系数的关系, 熟记一元二次方程判别式与方程根的情况联系、一元二次方程根与系数的关系是解决问题的关键.

21. 如图, 一次函数图象与反比例函数图象交于点 $A(-1, 6)$, $B\left(\frac{3}{a}, a - 3\right)$, 与 x 轴交于点 C , 与 y 轴交于

点 D .



(1) 求反比例函数与一次函数的解析式；

(2) 点 M 在 x 轴上，若 $S_{\triangle OAM} = S_{\triangle OAB}$ ，求点 M 的坐标.

【答案】(1) 反比例函数解析式为 $y = -\frac{6}{x}$ ，一次函数的解析式为 $y = -2x + 4$

(2) M 点的坐标为 $\left(-\frac{8}{3}, 0\right)$ 或 $\left(\frac{8}{3}, 0\right)$

【解析】

【分析】(1) 设反比例函数解析式为 $y = \frac{k_1}{x}$ ，将 $A(-1, 6)$ 代入 $y = \frac{k_1}{x}$ ，根据待定系数法，即可得到反比例函数解析式，将 $B\left(\frac{3}{a}, a-3\right)$ 代入求得的反比例函数，解得 a 的值，得到 B 点坐标，最后根据待定系数法即可求出一次函数解析式；

(2) 求出点 C 的坐标，根据 $S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OBC}$ 求出 $S_{\triangle OAB}$ ，分两种情况： M 在 O 点左侧； M 点在 O 点右侧，根据三角形面积公式即可解答.

【小问 1 详解】

解：设反比例函数解析式为 $y = \frac{k_1}{x}$ ，

将 $A(-1, 6)$ 代入 $y = \frac{k_1}{x}$ ，可得 $6 = \frac{k_1}{-1}$ ，解得 $k_1 = -6$ ，

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y = -\frac{6}{x}$ ，

把 $B\left(\frac{3}{a}, a-3\right)$ 代入 $y = -\frac{6}{x}$ ，可得 $\frac{3(a-3)}{a} = -6$ ，

解得 $a = 1$ ，

经检验， $a = 1$ 是方程的解，

$$\therefore B(3, -2),$$

设一次函数的解析式为 $y = k_2x + b$,

将 $A(-1, 6)$, $B(3, -2)$ 代入 $y = k_2x + b$,

$$\text{可得} \begin{cases} 6 = -x + b \\ -2 = 3x + b \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_2 = -2 \\ b = 4 \end{cases},$$

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y = -2x + 4$;

【小问 2 详解】

解: 当 $y = 0$ 时, 可得 $0 = -2x + 4$,

解得 $x = 2$,

$$\therefore C(2, 0),$$

$$\therefore OC = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 8,$$

$$\therefore S_{\triangle OAM} = S_{\triangle OAB},$$

$$\therefore S_{\triangle OAM} = 8 = \frac{1}{2} \times 6 \times OM,$$

$$\therefore OM = \frac{8}{3},$$

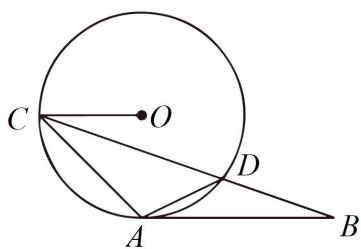
$$M \text{ 在 } O \text{ 点左侧时, } M\left(-\frac{8}{3}, 0\right);$$

$$M \text{ 点在 } O \text{ 点右侧时, } M\left(\frac{8}{3}, 0\right),$$

综上, M 点的坐标为 $\left(-\frac{8}{3}, 0\right)$ 或 $\left(\frac{8}{3}, 0\right)$.

【点睛】 本题考查了待定系数法求一次函数和反比例函数, 一次函数与三角形面积问题, 熟练求出 $S_{\triangle OAB}$ 是解题的关键.

22. 如图, AB 与 $\odot O$ 相切于点 A , 半径 $OC \parallel AB$, BC 与 $\odot O$ 相交于点 D , 连接 AD .



(1) 求证: $\angle OCA = \angle ADC$;

(2) 若 $AD = 2$, $\tan B = \frac{1}{3}$, 求 OC 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $\sqrt{5}$

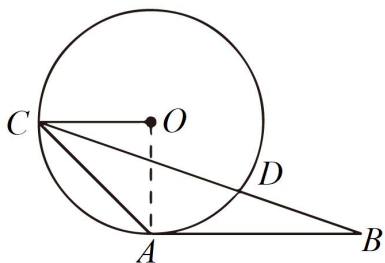
【解析】

【分析】(1) 连接 OA , 根据切线的性质得出 $\angle OAB = 90^\circ$, 再由平行线的性质得出 $\angle AOC = 90^\circ$, 利用圆周角定理及等腰直角三角形的性质即可证明;

(2) 过点 A 作 $AH \perp BC$, 过点 C 作 $CF \perp BA$ 的延长线于点 F , 根据勾股定理及等腰直角三角形的性质得出 $AH = DH = \sqrt{2}$, 再由正切函数确定 $BH = 3\sqrt{2}$, $AB = 2\sqrt{5}$, 再由正方形的判定和性质及相似三角形的判定和性质求解即可.

【小问 1 详解】

证明: 连接 OA , 如图所示:



$\because AB$ 与 $\odot O$ 相切于点 A ,

$\therefore \angle OAB = 90^\circ$,

$\because OC \parallel AB$,

$\therefore \angle AOC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADC = 45^\circ$,

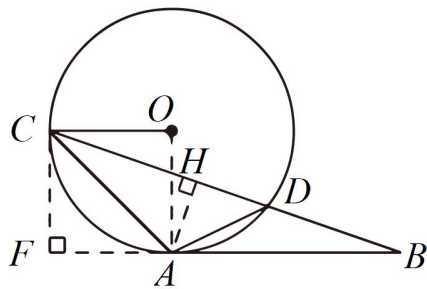
$\because OC = OA$,

$\therefore \angle OCA = 45^\circ$,

$\therefore \angle OCA = \angle ADC$;

【小问 2 详解】

过点 A 作 $AH \perp BC$ ，过点 C 作 $CF \perp BA$ 交 BA 的延长线于点 F ，如图所示：



由 (1) 得 $\angle OCA = \angle ADC = 45^\circ$,

$\therefore \triangle AHD$ 为等腰直角三角形,

$\therefore AD = 2$,

$\therefore AH = DH = \sqrt{2}$,

$\therefore \tan B = \frac{1}{3}$,

$\therefore BH = 3\sqrt{2}$, $AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = 2\sqrt{5}$,

由 (1) 得 $\angle AOC = \angle OAF = 90^\circ$,

$\therefore CF \perp BA$,

$\therefore$ 四边形 $OCFA$ 为矩形,

$\therefore OA = OC$,

$\therefore$ 四边形 $OCFA$ 为正方形,

$\therefore CF = FA = OC = r$,

$\therefore \angle B = \angle B, \angle AHB = \angle CFB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABH \sim \triangle CBF$,

$\therefore \frac{BH}{BF} = \frac{AH}{CF}$ 即 $\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}+r} = \frac{\sqrt{2}}{r}$,

解得: $r = \sqrt{5}$,

$\therefore OC = \sqrt{5}$.

【点睛】题目主要考查圆周角定理，解直角三角形及正方形与相似三角形的判定和性质，理解题意，作出辅助线，综合运用这些知识点是解题关键.

23. 某工厂计划从 A , B 两种产品中选择一种生产并销售，每日产销 x 件. 已知 A 产品成本价 m 元/件 (m 为常数，且 $4 \leq m \leq 6$ ，售价 8 元/件，每日最多产销 500 件，同时每日共支付专利费 30 元； B 产品成本价

12 元/件，售价 20 元/件，每日最多产销 300 件，同时每日支付专利费 y 元， y (元) 与每日产销 x (件) 满足关系式 $y = 80 + 0.01x^2$

(1) 若产销 A, B 两种产品的日利润分别为 w_1 元， w_2 元，请分别写出 w_1, w_2 与 x 的函数关系式，并写出 x 的取值范围；

(2) 分别求出产销 A, B 两种产品的最大日利润. (A 产品的最大日利润用含 m 的代数式表示)

(3) 为获得最大日利润，该工厂应该选择产销哪种产品？并说明理由. 【利润 = (售价 - 成本) × 产销数量 - 专利费】

【答案】(1) $w_1 = (8 - m)x - 30 (0 < x \leq 500)$, $w_2 = -0.01x^2 + 8x - 80 (0 < x \leq 300)$

(2) $w_{1\text{最大}} = (-500m + 3970)$ 元, $w_{2\text{最大}} = 1420$

(3) 当 $4 \leq m < 5.1$ 时，该工厂应该选择产销 A 产品能获得最大日利润；当 $m = 5.1$ 时，该工厂应该选择产销任一产品都能获得最大日利润；当 $5.1 < m \leq 6$ 时，该工厂应该选择产销 B 产品能获得最大日利润，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 根据题本所给的利润计算公式求解即可；

(2) 根据 (1) 所求利用一次函数和二次函数的性质求解即可；

(3) 比较 (2) 中所求 A, B 两种产品的最大利润即可得到答案.

【小问 1 详解】

解：由题意得， $w_1 = (8 - m)x - 30 (0 < x \leq 500)$,

$w_2 = (20 - 12)x - (80 + 0.01x^2) = -0.01x^2 + 8x - 80 (0 < x \leq 300)$

【小问 2 详解】

解：∵ $4 \leq m \leq 6$,

∴ $8 - m > 0$,

∴ w_1 随 x 增大而增大，

∴ 当 $x = 500$ 时， w_1 最大，最大为 $(8 - m) \times 500 - 30 = (-500m + 3970)$ 元；

$w_2 = -0.01x^2 + 8x - 80 = -0.01(x - 400)^2 + 1520$,

∴ $-0.01 < 0$,

∴ 当 $x < 400$ 时， w_2 随 x 增大而增大，

∴当 $x = 300$ 时， w_2 最大，最大为 $-0.01 \times (300 - 400)^2 + 1520 = 1420$ 元；

【小问 3 详解】

解：当 $-500m + 3970 > 1420$ ，即 $4 \leq m < 5.1$ 时，该工厂应该选择产销 A 产品能获得最大日利润；

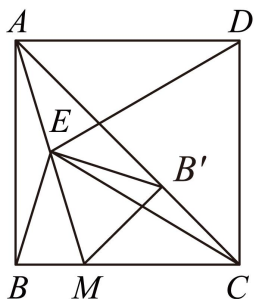
当 $-500m + 3970 = 1420$ ，即 $m = 5.1$ 时，该工厂应该选择产销任一产品都能获得最大日利润；

当 $-500m + 3970 < 1420$ ，即 $5.1 < m \leq 6$ 时，该工厂应该选择产销 B 产品能获得最大日利润；

综上所述，当 $4 \leq m < 5.1$ 时，该工厂应该选择产销 A 产品能获得最大日利润；当 $m = 5.1$ 时，该工厂应该选择产销任一产品都能获得最大日利润；当 $5.1 < m \leq 6$ 时，该工厂应该选择产销 B 产品能获得最大日利润。

【点睛】本题主要考查了一次函数的实际应用，二次函数的实际应用，一元一次不等式的实际应用，正确理解题意列出对应的函数关系式是解题的关键。

24. 如图，正方形 $ABCD$ 中，点 M 在边 BC 上，点 E 是 AM 的中点，连接 ED ， EC 。



(1) 求证： $ED = EC$ ；

(2) 将 BE 绕点 E 逆时针旋转，使点 B 的对应点 B' 落在 AC 上，连接 MB' 。当点 M 在边 BC 上运动时（点 M 不与 B ， C 重合），判断 $\triangle CMB'$ 的形状，并说明理由。

(3) 在 (2) 的条件下，已知 $AB = 1$ ，当 $\angle DEB' = 45^\circ$ 时，求 BM 的长。

【答案】(1) 见解析 (2) 等腰直角三角形，理由见解析

(3) $BM = 2 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据正方形的基本性质以及“斜中半定理”等推出 $\triangle EAD \cong \triangle EBC$ ，即可证得结论；

(2) 由旋转的性质得 $EB = EB' = AE = EM$ ，从而利用等腰三角形的性质推出 $\angle MB'C = 90^\circ$ ，再结合正方形对角线的性质推出 $B'M = B'C$ ，即可证得结论；

(3) 结合已知信息推出 $\triangle CME \sim \triangle AMC$ ，从而利用相似三角形的性质以及勾股定理进行计算求解即可。

【小问 1 详解】

证：∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴ $\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$ ， $AD = BC$ ，

∵ 点 E 是 AM 的中点，

$$\therefore EA = EB,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle EBA,$$

$$\therefore \angle BAD - \angle EAB = \angle ABC - \angle EBA, \text{ 即: } \angle EAD = \angle EBC,$$

在 $\triangle EAD$ 与 $\triangle EBC$ 中,

$$\begin{cases} EA = EB \\ \angle EAD = \angle EBC \\ AD = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EAD \cong \triangle EBC \text{ (SAS)},$$

$$\therefore ED = EC;$$

【小问 2 详解】

解: $\triangle CMB'$ 为等腰直角三角形, 理由如下:

由旋转的性质得: $EB = EB'$,

$$\therefore EB' = AE = EM,$$

$$\therefore \angle EAB' = \angle EB'A, \angle EMB' = \angle EB'M,$$

$$\therefore \angle EAB' + \angle EB'A + \angle EMB' + \angle EB'M = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EB'A + \angle EB'M = 90^\circ, \text{ 即: } \angle AB'M = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MB'C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B'MC = 90^\circ - \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle B'MC = \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore B'M = B'C,$$

$\therefore \triangle CMB'$ 为等腰直角三角形;

【小问 3 详解】

解: 如图所示, 延长 BE 交 AD 于点 F ,

$$\therefore \angle EAB = \angle EBA, \angle EAB' = \angle EB'A,$$

$$\therefore \angle MEB = 2\angle EAB, \angle MEB' = 2\angle EB'A,$$

$$\therefore \angle BEB' = \angle MEB + \angle MEB' = 2\angle EAB' + 2\angle EAB = 2\angle BAB' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEB' = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle B'EF - \angle DEB' = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle EAD \cong \triangle EBC,$$

$$\therefore \angle AED = \angle BEC,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle BEM,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle CEM = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACM = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CEM = \angle ACM,$$

$$\therefore \angle CME = \angle AMC,$$

$$\therefore \triangle CME \sim \triangle AMC,$$

$$\therefore \frac{CM}{AM} = \frac{EM}{CM},$$

$$\therefore CM^2 = AM \cdot EM,$$

$$\therefore EM = \frac{1}{2} AM,$$

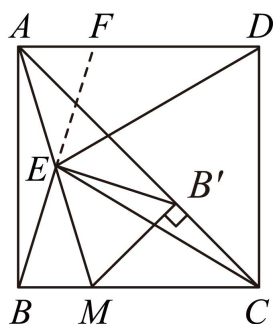
$$\therefore CM^2 = \frac{1}{2} AM^2,$$

$$\text{设 } BM = x, \text{ 则 } CM = 1 - x, \quad AM^2 = AB^2 + BM^2 = 1 + x^2,$$

$$\therefore (1 - x)^2 = \frac{1}{2}(1 + x^2),$$

$$\text{解得: } x_1 = 2 - \sqrt{3}, \quad x_2 = 2 + \sqrt{3} \text{ (不合题意, 舍去),}$$

$$\therefore BM = 2 - \sqrt{3}.$$



【点睛】本题考查正方形的性质，旋转的性质，全等三角形和相似三角形的判定

与性质等，理解并熟练运用基本图形的证明方法和性质，掌握勾股定理等相关计算方式是解题关键.

25. 如图 1，抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ 两点，与 y 轴交于点 C .

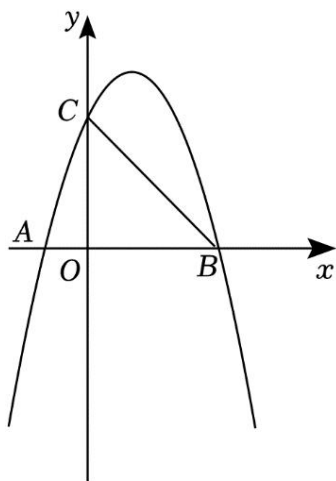


图1

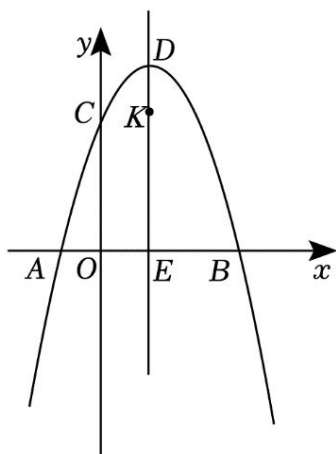


图2

- (1) 求抛物线的解析式；
- (2) 点 P 在抛物线上，点 Q 在 x 轴上，以 B, C, P, Q 为顶点的四边形为平行四边形，求点 P 的坐标；
- (3) 如图 2，抛物线顶点为 D ，对称轴与 x 轴交于点 E ，过点 $K(1, 3)$ 的直线（直线 KD 除外）与抛物线交于 G, H 两点，直线 DG, DH 分别交 x 轴于点 M, N 。试探究 $EM \cdot EN$ 是否为定值，若是，求出该定值；若不是，说明理由。

【答案】(1) $y = -x^2 + 2x + 3$

(2) $(2, 3)$ 或 $(1 - \sqrt{7}, -3)$ 或 $(1 + \sqrt{7}, -3)$

(3) 定值，理由见详解

【解析】

【分析】(1) 将 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 两点代入抛物线的解析式即可求解；

(2) 根据 P, Q 的不确定性，进行分类讨论：①过 C 作 $CP \parallel x$ 轴，交抛物线于 P_1 ，过 P_1 作 $P_1Q_1 \parallel BC$ ，交 x 轴于 Q_1 ，可得 $y_{P_1} = 3$ ，由 $-x^2 + 2x + 3 = 3$ ，可求解；②在 x 轴的负半轴上取点 Q_2 ，过 Q_2 作 $Q_2P_2 \parallel BC$ ，交抛物线于 P_2 ，同时使 $Q_2P_2 = BC$ ，连接 CQ_2, BP_2 ，过 P_2 作 $P_2D \perp x$ 轴，交 x 轴于 D ， $y_{P_2} = -3$ ，即可求解；③当 BC 为平行四边形的对角线时，在①中，只要点 Q 在点 B 的左边，且满足 $BQ = BQ_1$ ，也满足条件，只是点 P 的坐标仍是①中的坐标；

(3) 可设直线 GH 的解析式为 $y = k(x - 1) + 3$ ， $G(m, -m^2 + 2m + 3)$ ， $H(n, -n^2 + 2n + 3)$ ，可求

$\begin{cases} m + n = 2 - k \\ mn = -k \end{cases}$ ，再求直线 DG 的解析式为 $y = -(m - 1)x + m + 3$ ，从而可求 $EM = 1 - \frac{m + 3}{m - 1}$ ，同理可求

EN ，即可求解。

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3 (a \neq 0)$ 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 两点,

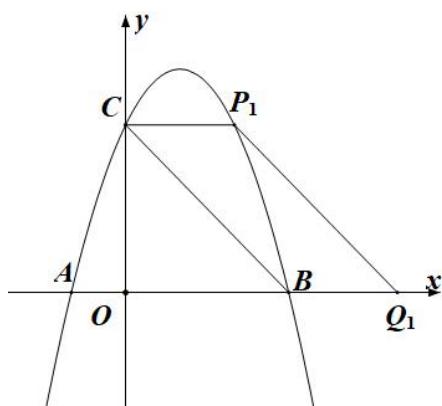
$$\therefore \begin{cases} a - b + 3 = 0 \\ 9a + 3b + 3 = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases},$$

故抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$.

【小问 2 详解】

解：①如图，过 C 作 $CP \parallel x$ 轴，交抛物线于 P_1 ，过 P_1 作 $P_1Q_1 \parallel BC$ ，交 x 轴于 Q_1 ，



∴ 四边形 BCP_1Q_1 是平行四边形,

$$\therefore y_{P_1} = 3,$$

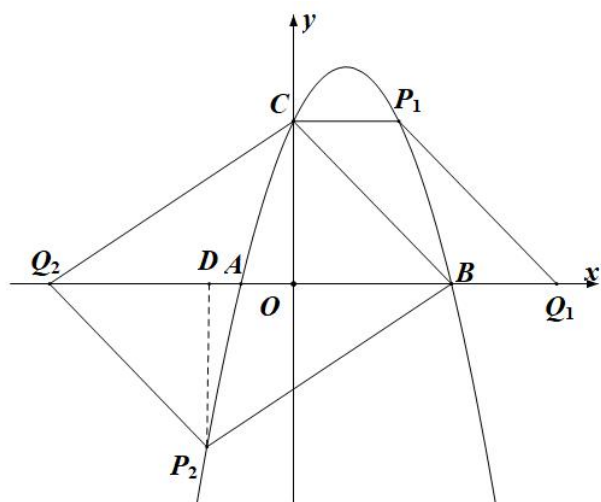
$$\therefore -x^2 + 2x + 3 = 3,$$

$$\text{解得: } x_1 = 2, \quad x_2 = 0,$$

$$P_1(2, 3);$$

②如图，在 x 轴的负半轴上取点 Q_2 ，过 Q_2 作 $Q_2P_2 \parallel BC$ ，交抛物线于 P_2 ，同时使 $Q_2P_2 = BC$ ，连接 CQ_2 、

BP_2 ，过 P_2 作 $P_2D \perp x$ 轴，交 x 轴于 D ，



$\therefore$ 四边形 BCQ_2P_2 是平行四边形,

$\therefore \angle CBQ_2 = \angle P_2Q_2B$,

在 $\triangle CBQ_2$ 和 $\triangle P_2Q_2B$ 中,

$$\begin{cases} BQ_2 = Q_2B \\ \angle CBQ_2 = \angle P_2Q_2B, \\ CB = P_2Q_2 \end{cases}$$

$\therefore \triangle CBQ_2 \cong \triangle P_2Q_2B$ (SAS),

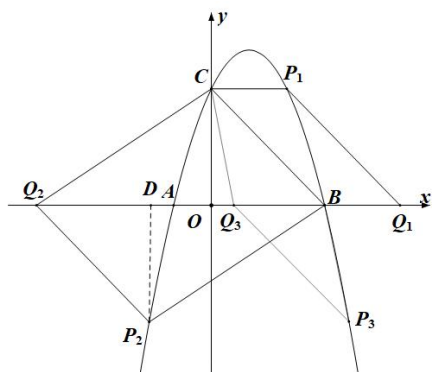
$\therefore P_2D = CO = 3$,

$\therefore y_{P_2} = -3$,

$\therefore -x^2 + 2x + 3 = -3$,

解得: $x_1 = 1 - \sqrt{7}$, $x_2 = 1 + \sqrt{7}$,

$\therefore P_2(1 - \sqrt{7}, -3)$;



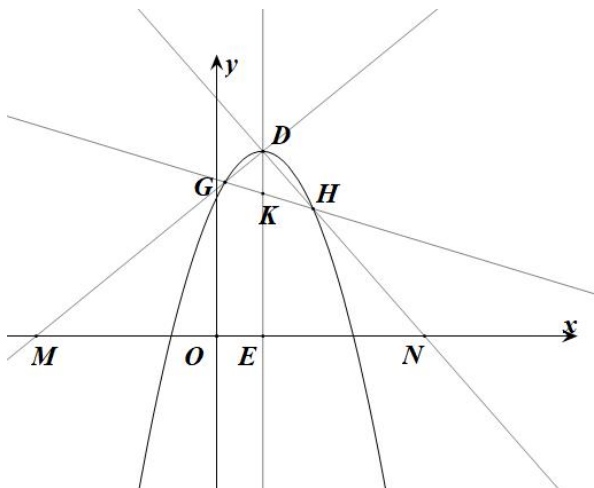
如上图, 根据对称性: $P_3(1 + \sqrt{7}, -3)$,

③当 BC 为平行四边形的对角线时，由①知，点 Q 在点 B 的左边，且 $BQ = BQ_1 = 2$ 时，也满足条件，此时点 P 的坐标仍为 $(2,3)$ ；

综上所述： P 的坐标为 $(2,3)$ 或 $(1-\sqrt{7},-3)$ 或 $(1+\sqrt{7},-3)$ 。

【小问 3 详解】

解：是定值，



理由：如图， $\because$ 直线 GH 经过 $K(1,3)$ ，

$\therefore$ 可设直线 GH 的解析式为 $y = k(x-1) + 3$ ，

$\because G、H$ 在抛物线上，

$\therefore$ 可设 $G(m, -m^2 + 2m + 3)$ ， $H(n, -n^2 + 2n + 3)$ ，

$\therefore k(x-1) + 3 = -x^2 + 2x + 3$ ，

整理得： $x^2 + (k-2)x - k = 0$ ，

$\therefore x_1 = m$ ， $x_2 = n$ ，

$\therefore \begin{cases} m+n = 2-k \\ mn = -k \end{cases}$ ，

当 $x=1$ 时， $y = -1^2 + 2 \times 1 + 3 = 4$ ，

$\therefore D(1,4)$ ，

设直线 DG 的解析式为 $y = k_1x + b_1$ ， 则有

$$\begin{cases} mk_1 + b_1 = -m^2 + 2m + 3 \\ k_1 + b_1 = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_1 = -(m-1) \\ b_1 = m+3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } DG \text{ 的解析式为 } y = -(m-1)x + m+3,$$

$$\text{当 } y=0 \text{ 时, } -(m-1)x + m+3 = 0,$$

$$\text{解得: } x = \frac{m+3}{m-1},$$

$$\therefore M\left(\frac{m+3}{m-1}, 0\right),$$

$$\therefore EM = 1 - \frac{m+3}{m-1}$$

$$= -\frac{4}{m-1},$$

$$\text{同理可求: } EN = \frac{4}{n-1},$$

$$\therefore EM \cdot EN = -\frac{4}{m-1} \cdot \frac{4}{n-1}$$

$$= -\frac{16}{mn - (m+n) + 1}$$

$$= -\frac{16}{2 - k - (-k) + 1}$$

$$= -\frac{16}{-k - (2 - k) + 1}$$

$$= 16;$$

当 G 与 H 对调位置后, 同理可求 $EM \cdot EN = 16$;

故 $EM \cdot EN$ 的定值为 16.

【点睛】 本题考查了二次函数与一次函数的综合问题, 待定系数法求函数解析式, 求函数图象与坐标轴交点坐标, 动点产生的平行四边形判定, 一元二次方程根与系数的关系, 理解一次函数与二次函数图象的交点, 与对应一元二次方程根的关系, 掌握具体的解法, 并会根据题意设合适的辅助未知数是解题的关键.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】