

内江市 2023 年初中学业水平考试暨高中阶段学校招生考试试卷

数学

本试卷分为 A 卷和 B 卷两部分，A 卷 1 至 4 页，满分 100 分；B 卷 5 至 6 页，满分 60 分。全卷满分 160 分。考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前请仔细阅读答题卡上的注意事项。
2. 所有试题的答案必须按题号填写在答题卡相应的位置上，在试卷上、草稿纸上答题无效。
3. 考试结束后，监考人员将试卷和答题卡一并收回。

A 卷（共 100 分）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. -2 的绝对值是（ ）

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. -2

【答案】A

【解析】

【分析】根据数轴上某个数与原点的距离叫做这个数的绝对值的定义进行求解即可。

【详解】解：在数轴上，点 -2 到原点的距离是 2，所以 -2 的绝对值是 2，

故选：A.

2. 作为世界文化遗产的长城，其总长大约是 6700000m，将 6700000 用科学记数法表示为（ ）

- A. 6.7×10^5 B. 6.7×10^6 C. 0.67×10^7 D. 67×10^8

【答案】B

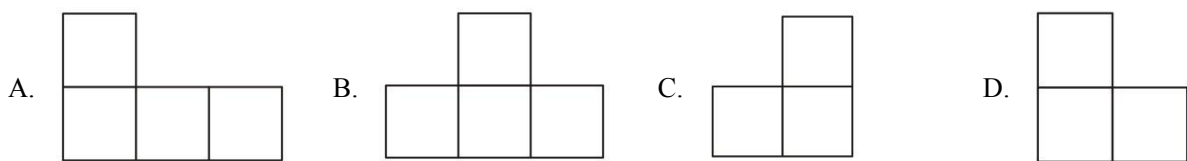
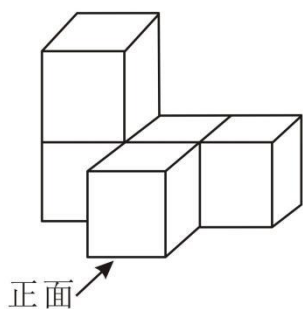
【解析】

【详解】 $6700000 = 6.7 \times 10^6$.

故选 B.

点睛：此题主要考查了用科学记数法表示较大的数，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ，确定 a 与 n 的值是解题的关键。

3. 如图是由 5 个完全相同的小正方体堆成的物体，其主视图是（ ）



【答案】A

【解析】

【分析】找到从正面看所得到的图形即可，注意所有的看到的棱都应表现在主视图中。

【详解】解：从正面看易得左边一列有2个正方形，中间与右边一列各有一个正方形。

故选：A.

【点睛】本题考查了三视图的知识，主视图是从物体的正面看得到的视图。

4. 下列计算正确的是（ ）

A. $3a+4b=7ab$

B. $x^{12} \div x^6 = x^6$

C. $(a+2)^2 = a^2+4$

D. $(ab^3)^3 = ab^6$

【答案】B

【解析】

【分析】根据同类项的定义、同底数幂的除法性质、完全平方公式、积的乘方公式进行判断。

【详解】解：A、 $3a$ 和 $4b$ 不是同类项，不能合并，所以此选项不正确；

B、 $x^{12} \div x^6 = x^6$ ，所以此选项正确；

C、 $(a+2)^2 = a^2+4a+4$ ，所以此选项不正确；

D、 $(ab^3)^3 = a^3b^9$ ，所以此选项不正确；

故选：B.

【点睛】本题主要考查了合并同类项、同底数幂的除法、完全平方公式、积的乘方，熟练掌握运算法则是解题的关键。

5. 下列图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（ ）



【答案】A

【解析】

【分析】根据中心对称图形与轴对称图形的概念，进行判断即可．把一个图形绕某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形；如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形．

【详解】解：A、既是轴对称图形，又是中心对称图形，符合题意；

B、既不是轴对称图形，也不是中心对称图形，不符合题意；

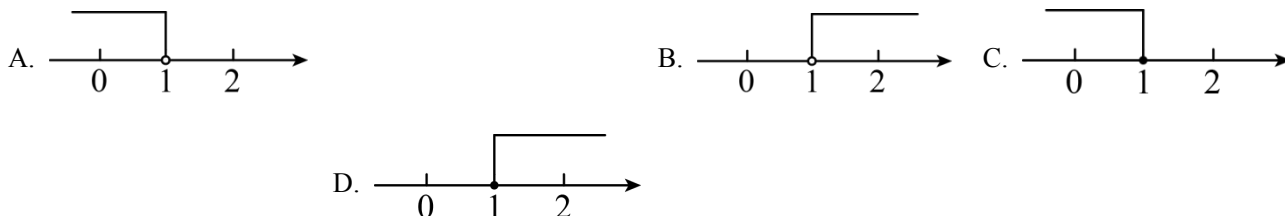
C、是轴对称图形，不是中心对称图形，不符合题意；

D、不是轴对称图形，是中心对称图形，不符合题意，

故选：A．

【点睛】本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念，掌握轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合，中心对称图形的关键是要寻找对称中心，旋转 180° 后与原图重合是关键．

6. 函数 $y = \sqrt{x-1}$ 的自变量 x 的取值范围在数轴上可表示为 ()



【答案】D

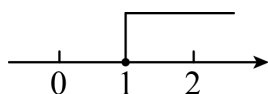
【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件，求出 $x-1 \geq 0$ 的解集，再在数轴上表示即可．

【详解】解： $\because \sqrt{x-1}$ 中， $x-1 \geq 0$ ，

$\therefore x \geq 1$ ，

故在数轴上表示为：



故选：D．

【点睛】本题考查了在数轴上表示不等式的解集，要注意，不等式的解集包括 1．

7. 某校举行“遵守交通安全，从我做起”演讲比赛. 7位评委给选手甲的评分如下：91, 95, 89, 93, 88, 94, 95, 则这组数据的众数和中位数分别是 ()

- A. 95, 92 B. 93, 93 C. 93, 92 D. 95, 93

【答案】D

【解析】

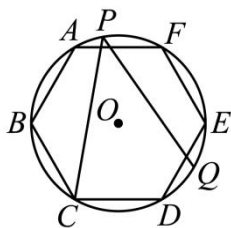
【分析】根据众数和中位数的定义求解.

【详解】解：这组数据从小到大排序为：88, 89, 91, 93, 94, 95, 95, 95出现了2次，出现次数最多，所以这组数据的众数为95；
这组数据最中间数为93，所以这组数据的中位数是93.

故选：D.

【点睛】本题考查了众数：一组数据中出现次数最多的数据叫做众数. 求一组数据的众数的方法：找出频数最多的那个数据，若几个数据频数都是最多且相同，此时众数就是这多个数据. 也考查了中位数：将一组数据从小到大排列后处在中间位置的一个数或两个数的平均数是中位数.

8. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$ ，点 P 在 $\widehat{AF}$ 上， Q 是 $\widehat{DE}$ 的中点，则 $\angle CPQ$ 的度数为 ()



- A. 30° B. 36° C. 45° D. 60°

【答案】C

【解析】

【分析】先计算正六边形的中心角，再利用同圆或等圆中，等弧对的圆心角相等，圆周角定理计算即可.

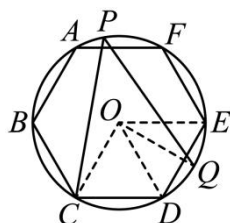
【详解】如图，连接 OC, OD, OQ, OE ,

$\therefore$ 正六边形 $ABCDEF$ ， Q 是 $\widehat{DE}$ 的中点，

$$\therefore \angle COD = \angle DOE = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ, \quad \angle DOQ = \angle EOQ = \frac{1}{2} \angle DOE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle COQ = \angle COD + \angle DOQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CPQ = \frac{1}{2} \angle COQ = 45^\circ,$$



故选 C.

【点睛】本题考查了正多边形与圆，圆周角定理，熟练掌握正多边形中心角计算，圆周角定理是解题的关键.

9. 用计算机处理数据，为了防止数据输入出错，某研究室安排两名程序操作员各输入一遍，比较两人的输入是否一致，本次操作需输入 2640 个数据，已知甲的输入速度是乙的 2 倍，结果甲比乙少用 2 小时输完. 这两名操作员每分钟各能输入多少个数据？设乙每分钟能输入 x 个数据，根据题意得方程正确的是 ()

A. $\frac{2640}{2x} = \frac{2640}{x} + 2$

B. $\frac{2640}{2x} = \frac{2640}{x} - 2$

C. $\frac{2640}{2x} = \frac{2640}{x} + 2 \times 60$

D. $\frac{2640}{2x} = \frac{2640}{x} - 2 \times 60$

【答案】D

【解析】

【分析】设乙每分钟能输入 x 个数据，则甲每分钟能输入 $2x$ 个数据，根据“甲比乙少用 2 小时输完”列出分式方程即可.

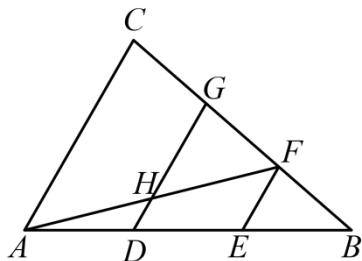
【详解】解：设乙每分钟能输入 x 个数据，则甲每分钟能输入 $2x$ 个数据，

由题意得 $\frac{2640}{2x} = \frac{2640}{x} - 2 \times 60$,

故选：D.

【点睛】本题考查了由实际问题抽象出分式方程，找准等量关系，正确列出分式方程是解题的关键.

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 为边 AB 的三等分点，点 F 、 G 在边 BC 上， $AC \parallel DG \parallel EF$ ，点 H 为 AF 与 DG 的交点. 若 $AC = 12$ ，则 DH 的长为 ()



A. 1

B. $\frac{3}{2}$

C. 2

D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】由三等分点的定义与平行线的性质得出 $BE = DE = AD$ ， $BF = GF = CG$ ， $AH = HF$ ， DH 是 $\triangle AEF$ 的中位线，易证 $\triangle BEF \sim \triangle BAC$ ，得 $\frac{EF}{AC} = \frac{BE}{AB}$ ，解得 $EF = 4$ ，则 $DH = \frac{1}{2}EF = 2$ 。

【详解】解：∵ D 、 E 为边 AB 的三等分点， $EF \parallel DG \parallel AC$ ，

∴ $BE = DE = AD$ ， $BF = GF = CG$ ， $AH = HF$ ，

∴ $AB = 3BE$ ， DH 是 $\triangle AEF$ 的中位线，

∴ $DH = \frac{1}{2}EF$ ，

∵ $EF \parallel AC$ ，

∴ $\angle BEF = \angle BAC$ ， $\angle BFE = \angle BCA$ ，

∴ $\triangle BEF \sim \triangle BAC$ ，

∴ $\frac{EF}{AC} = \frac{BE}{AB}$ ，即 $\frac{EF}{12} = \frac{BE}{3BE}$ ，

解得： $EF = 4$ ，

∴ $DH = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ ，

故选：C。

【点睛】本题考查了三等分点的定义、平行线的性质、相似三角形的判定与性质、三角形中位线定理等知识；熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键。

11. 对于实数 a ， b 定义运算 “ $\otimes$ ” 为 $a \otimes b = b^2 - ab$ ，例如 $3 \otimes 2 = 2^2 - 3 \times 2 = -2$ ，则关于 x 的方程

$(k-3) \otimes x = k-1$ 的根的情况，下列说法正确的是（ ）

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 无实数根

D. 无法确定

【答案】A

【解析】

【分析】先根据新定义得到关于 x 的方程为 $x^2 - (k-3)x + 1 - k = 0$ ，再利用一元二次方程根的判别式求解即可。

【详解】解：∵ $(k-3) \otimes x = k-1$ ，

∴ $x^2 - (k-3)x = k-1$ ，

∴ $x^2 - (k-3)x + 1 - k = 0$ ，

∴ $\Delta = b^2 - 4ac = (k-3)^2 - 4(1-k) = k^2 - 6k + 9 - 4 + 4k = (k-1)^2 + 4 > 0$ ，

∴ 方程 $x^2 - (k-3)x + 1 - k = 0$ 有两个不相等的实数根，

故选 A.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式，新定义下的实数运算，正确得到关于 x 的方程为 $x^2 - (k-3)x + 1 - k = 0$ 是解题的关键.

12. 对于正数 x ，规定 $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ ，例如： $f(2) = \frac{2 \times 2}{2+1} = \frac{4}{3}$ ， $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}$ ， $f(3) = \frac{2 \times 3}{3+1} = \frac{3}{2}$ ，

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{2}$ ，计算：

$f\left(\frac{1}{101}\right) + f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{1}{99}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) +$

$f(2) + f(3) + \cdots + f(99) + f(100) + f(101) = (\quad)$

A. 199

B. 200

C. 201

D. 202

【答案】 C

【解析】

【分析】 通过计算 $f(1)=1, f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2, f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)=2$ ，… 可以推出

$f\left(\frac{1}{101}\right) + f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{1}{99}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(99) + f(100) + f(101)$

结果.

【详解】 解：∵ $f(1) = \frac{2}{1+1} = 1$,

$f(2) = \frac{4}{1+2} = \frac{4}{3}, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2,$

$f(3) = \frac{2 \times 3}{1+3} = \frac{3}{2}, f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}, f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right) = 2,$

…

$$f(100) = \frac{2 \times 100}{1+100} = \frac{200}{101}, \quad f\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{2 \times \frac{1}{100}}{1 + \frac{1}{100}} = \frac{2}{101}, \quad f(100) + f\left(\frac{1}{100}\right) = 2,$$

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{1}{101}\right) + f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{1}{99}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(99) + f(100) + f(101) \\ &= 2 \times 100 + 1 \\ &= 201 \end{aligned}$$

故选：C.

【点睛】此题考查了有理数的混合运算，熟练掌握运算法则，找到数字变化规律是解本题的关键.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. 分解因式： $x^3 - xy^2 =$ _____.

【答案】 $x(x+y)(x-y)$

【解析】

【分析】先提取公因式 x ，再对余下的多项式利用平方差公式继续分解.

【详解】解： $x^3 - xy^2 = x(x^2 - y^2) = x(x+y)(x-y)$,

故答案为： $x(x+y)(x-y)$.

【点睛】本题考查了用提公因式法和公式法进行因式分解，一个多项式有公因式首先提取公因式，然后再用其他方法进行因式分解，同时因式分解要彻底，直到不能分解为止.

14. 若 a 、 b 互为相反数， c 为 8 的立方根，则 $2a + 2b - c =$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】利用相反数，立方根的性质求出 $a+b$ 及 c 的值，代入原式计算即可得到结果.

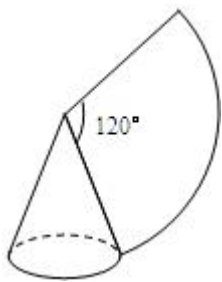
【详解】解：根据题意得： $a+b=0$ ， $c=2$ ，

$$\therefore 2a + 2b - c = 0 - 2 = -2,$$

故答案为： -2

【点睛】此题考查了代数式求值，相反数、立方根的性质，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

15. 如图，用圆心角为 120° 半径为 6 的扇形围成一个圆锥的侧面（接缝忽略不计），则这个圆锥的高是_____.



【答案】 $4\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】 由圆心角为 120° ，半径为 6 的扇形求弧长 $= 4\pi$ ，可求圆锥底面圆周长： $2\pi r = 4\pi$ ，解得 $r = 2$ ，如图由圆锥高 OD ，底面圆半径 DC ，与母线 OC 构成直角三角形，由勾股定理

$$OD = \sqrt{OC^2 - CD^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2} \text{ 即可.}$$

【详解】 解： 圆心角为 120° ，半径为 6 的扇形弧长 $= \frac{120\pi \times 6}{180} = 4\pi$ ，

圆锥底面圆周长： $2\pi r = 4\pi$ ，

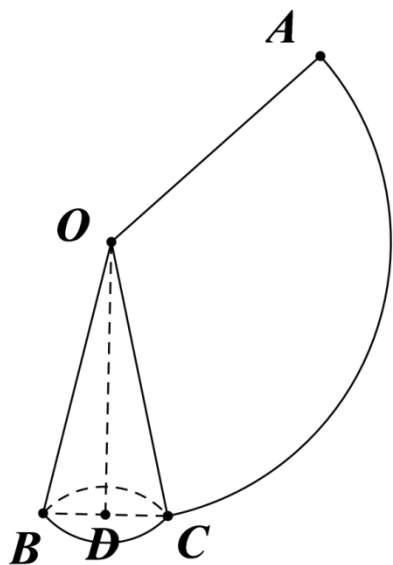
解得 $r = 2$ ，

如图由圆锥高 OD ，底面圆半径 DC ，与母线 OC 构成直角三角形，

$$\text{由勾股定理 } OD = \sqrt{OC^2 - CD^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2},$$

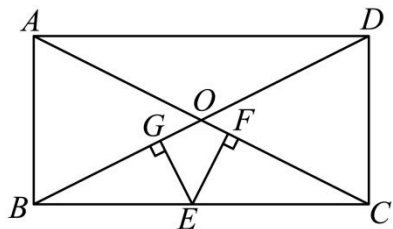
这个圆锥的高是 $4\sqrt{2}$.

故答案为： $4\sqrt{2}$.



【点睛】 本题考查扇形弧长公式，圆的周长，勾股定理，掌握扇形弧长公式，圆的周长，勾股定理是解题关键.

16. 出入相补原理是我国古代数学的重要成就之一，最早是由三国时期数学家刘徽创建。“将一个几何图形，任意切成多块小图形，几何图形的总面积保持不变，等于所分割成的小图形的面积之和”是该原理的重要内容之一。如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 5$ ， $AD = 12$ ，对角线 AC 与 BD 交于点 O ，点 E 为 BC 边上的一个动点， $EF \perp AC$ ， $EG \perp BD$ ，垂足分别为点 F ， G ，则 $EF + EG =$ _____.

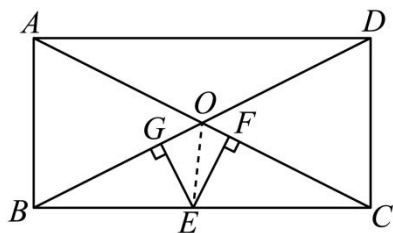


【答案】 $\frac{60}{13}$

【解析】

【分析】连接 OE ，根据矩形的性质得到 $BC = AD = 12$ ， $AO = CO = BO = DO$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，根据勾股定理得到 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 13$ ，求得 $OB = OC = \frac{13}{2}$ ，根据三角形的面积公式即可得到结论。

【详解】解：连接 OE ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$ ， $BC = AD = 12$ ， $AO = CO = BO = DO$ ，

$\because AB = 5$ ， $BC = 12$ ，

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 13$ ，

$\therefore OB = OC = \frac{13}{2}$ ，

$\therefore S_{\triangle BOC} = S_{\triangle BOE} + S_{\triangle COE} = \frac{1}{2} \times OB \cdot EG + \frac{1}{2} \times OC \cdot EF = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 15$ ，

$\therefore \frac{1}{2} \times \frac{13}{2} EG + \frac{1}{2} \times \frac{13}{2} EF = \frac{1}{2} \times \frac{13}{2} (EG + EF) = 15$ ，

$\therefore EG + EF = \frac{60}{13}$ ，

故答案为： $\frac{60}{13}$.

【点睛】此题考查了矩形的性质、勾股定理。此题难度适中，注意掌握辅助线的作法，注意掌握数形结合思想的应用。

三、解答题（本大题共 5 小题，共 4 分．解答应写出必要的文字说明或推演步骤．）

17. 计算： $(-1)^{2023} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 3 \tan 30^\circ - (3 - \pi)^0 + |\sqrt{3} - 2|$

【答案】 4

【解析】

【分析】 根据有理数乘方、特殊角三角函数值、负整数指数幂、零指数幂结合二次根式的混合运算法则进行计算即可．

【详解】 解： $(-1)^{2023} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 3 \tan 30^\circ - (3 - \pi)^0 + |\sqrt{3} - 2|$

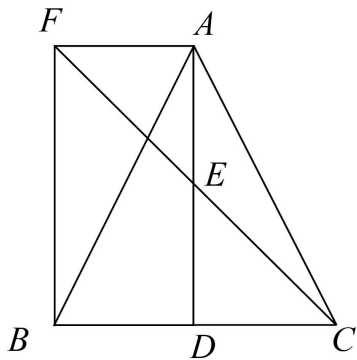
$$= -1 + 4 + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 + 2 - \sqrt{3}$$

$$= -1 + 4 + \sqrt{3} - 1 + 2 - \sqrt{3}$$

$$= 4.$$

【点睛】 本题考查了有理数乘方、特殊角三角函数值、负整数指数幂、零指数幂以及二次根式的混合运算，熟练掌握相关运算法则是解本题的关键．

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 BC 的中点， E 是 AD 的中点，过点 A 作 $AF \parallel BC$ 交 CE 的延长线于点 F ．



- (1) 求证： $AF = BD$ ；
- (2) 连接 BF ，若 $AB = AC$ ，求证：四边形 $ADBF$ 是矩形．

【答案】 (1) 见解析；

(2) 见解析；

【解析】

【分析】 (1) 根据两直线平行，内错角相等求出 $\angle AFE = \angle DCE$ ，然后利用“角角边”证明三角形全等，再由全等三角形的性质容易得出结论；

(2) 先利用一组对边平行且相等的四边形是平行四边形证明四边形 $AFBD$ 是平行四边形，再根据一个角

是直角的平行四边形是矩形判定即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because AF \parallel BC$,

$$\therefore \angle AFE = \angle DCE,$$

$\because$ 点 E 为 AD 的中点,

$$\therefore AE = DE,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle EDC$ 中,

$$\begin{cases} \angle AFE = \angle DCE \\ \angle AEF = \angle DEC, \\ AE = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EAF \cong \triangle EDC (\text{AAS});$$

$$\therefore AF = CD,$$

$$\because CD = BD,$$

$$\therefore AF = BD;$$

【小问 2 详解】

证明: $\because AF \parallel BD, AF = BD$,

$\therefore$ 四边形 $AFBD$ 是平行四边形,

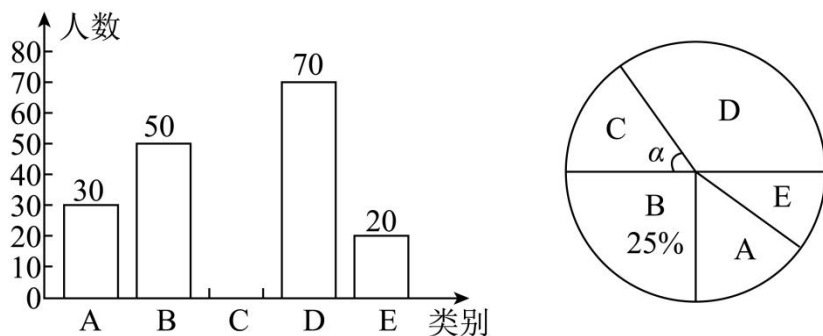
$$\because AB = AC, BD = CD,$$

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 平行四边形 $AFBD$ 是矩形.

【点睛】 本题考查了矩形的判定, 全等三角形的判定与性质, 平行四边形的判定, 是基础题, 明确有一个角是直角的平行四边形是矩形是解本题的关键.

19. 某校为落实国家“双减”政策, 丰富课后服务内容, 为学生开设五类社团活动 (要求每人必须参加且只参加一类活动): A. 音乐社团; B. 体育社团; C. 美术社团; D. 文学社团; E. 电脑编程社团, 该校为了解学生对这五类社团活动的喜爱情况, 随机抽取部分学生进行了调查统计, 并根据调查结果, 绘制了如图所示的两幅不完整的统计图.



根据图中信息，解答下列问题：

- (1) 此次调查一共随机抽取了_____名学生，补全条形统计图（要求在条形图上方注明人数）；
- (2) 扇形统计图中圆心角 $\alpha =$ _____度；
- (3) 现从“文学社团”里表现优秀的甲、乙、丙、丁四名同学中随机选取两名参加演讲比赛，请用列表或画树状图的方法求出恰好选中甲和乙两名同学的概率.

【答案】(1) 200，补全条形统计图见解析

(2) 54 (3) 恰好选中甲、乙两名同学的概率为 $\frac{1}{6}$.

【解析】

【分析】(1) 用 B 类型社团的人数除以其人数占比即可求出参与调查的总人数；用总人数减去 A、B、D、E 四个类型社团的人数得到 C 类型社团的人数，即可补全条形统计图；

(2) 用 360° 乘以 C 类型社团的人数占比即可求出扇形统计图中 α 的度数；

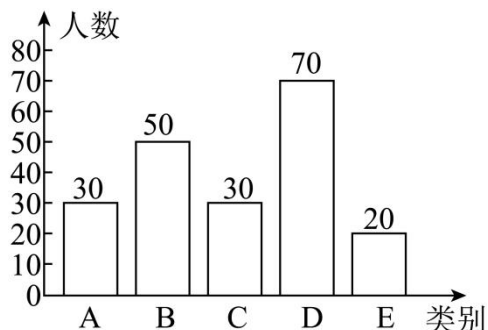
(3) 先画出树状图得到所有等可能性的结果数，再找到恰好选中甲和乙两名同学的结果数，最后依据概率计算公式求解即可.

【小问 1 详解】

解： $50 \div 25\% = 200$ (人)，

C 类型社团的人数为 $200 - 30 - 50 - 70 - 20 = 30$ (人)，

补全条形统计图如图，



故答案为：200；

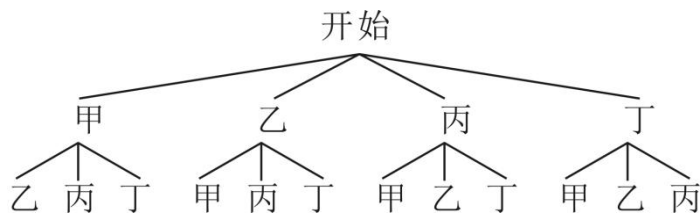
【小问 2 详解】

解： $\alpha = 360^\circ \times \frac{30}{200} = 54^\circ$,

故答案为：54；

【小问3详解】

解：画树状图如下：

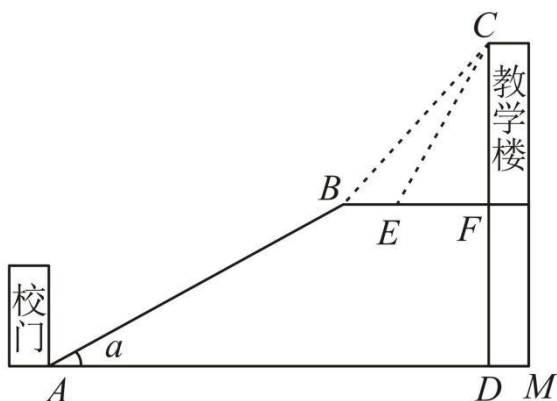


$\therefore$ 共有 12 种等可能的结果，其中恰好选中甲、乙两名同学的结果有 2 种，

$\therefore$ 恰好选中甲、乙两名同学的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

【点睛】 本题主要考查了条形统计图与扇形统计图信息相关联，树状图法或列表法求解概率，正确读懂统计图并画出树状图或列出表格是解题的关键.

20. 某中学依山而建，校门 A 处有一坡角 $\alpha = 30^\circ$ 的斜坡 AB ，长度为 30 米，在坡顶 B 处测得教学楼 CF 的楼顶 C 的仰角 $\angle CBF = 45^\circ$ ，离 B 点 4 米远的 E 处有一个花台，在 E 处测得 C 的仰角 $\angle CEF = 60^\circ$ ， CF 的延长线交水平线 AM 于点 D ，求 DC 的长（结果保留根号）.

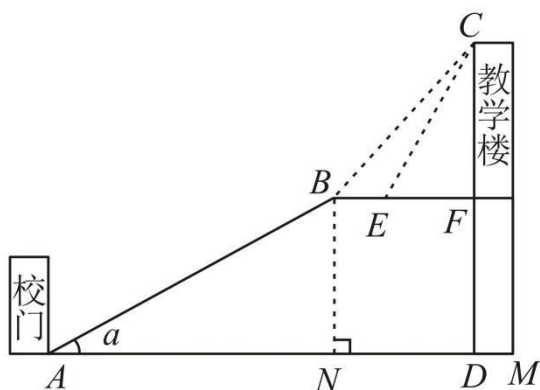


【答案】 DC 的长为 $(21 + 2\sqrt{3})$ 米

【解析】

【分析】 作 $BN \perp AM$ 于点 N ，首先根据坡度求出 BN ，并通过矩形的判定确定出 $DF = BN$ ，然后通过解三角形求出 CF ，即可相加得出结论.

【详解】 解：如图所示，作 $BN \perp AM$ 于点 N ，则由题意，四边形 $BNDF$ 为矩形，



$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABN$ 中, $\sin \angle BAN = \frac{BN}{AB}$, $\angle BAN = \alpha = 30^\circ$, $AB = 30$,

$$\therefore BN = AB \cdot \sin 30^\circ = 30 \times \frac{1}{2} = 15,$$

$\therefore$ 四边形 $BNDF$ 为矩形,

$$\therefore DF = BN = 15,$$

由题意, $\angle CBF = 45^\circ$, $\angle CEF = 60^\circ$, $\angle CFB = 90^\circ$, $BE = 4$,

$\therefore \triangle CBF$ 为等腰直角三角形, $BF = CF$,

设 $BF = CF = x$, 则 $EF = BF - BE = x - 4$,

在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中, $\tan \angle CEF = \frac{CF}{EF}$,

$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{x}{x-4}, \text{ 即: } \sqrt{3} = \frac{x}{x-4},$$

解得: $x = 6 + 2\sqrt{3}$, 经检验, $x = 6 + 2\sqrt{3}$ 是上述方程的解, 且符合题意,

$$\therefore BF = CF = 6 + 2\sqrt{3},$$

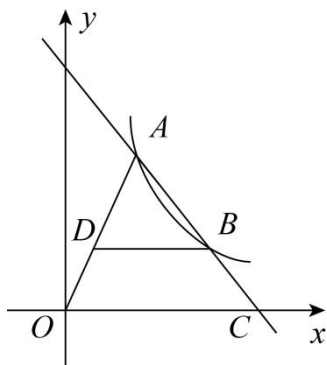
$$\therefore DC = CF + DF = 6 + 2\sqrt{3} + 15 = 21 + 2\sqrt{3},$$

$\therefore DC$ 的长为 $(21 + 2\sqrt{3})$ 米.

【点睛】 本题考查解直角三角形的应用, 准确构造出直角三角形并求解是解题关键.

21. 如图, 在平面直角坐标系中, 一次函数 $y = mx + n$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象在第一象限内交于

$A(a, 4)$ 和 $B(4, 2)$ 两点, 直线 AB 与 x 轴相交于点 C , 连接 OA .



- (1) 求一次函数与反比例函数的表达式；
- (2) 当 $x > 0$ 时，请结合函数图象，直接写出关于 x 的不等式 $mx + n \geq \frac{k}{x}$ 的解集；
- (3) 过点 B 作 BD 平行于 x 轴，交 OA 于点 D ，求梯形 $OCBD$ 的面积.

【答案】 (1) 反比例函数为: $y = \frac{8}{x}$, 一次函数为 $y = -x + 6$.

(2) $2 \leq x \leq 4$

(3) 9

【解析】

【分析】 (1) 利用 $B(4, 2)$ 可得反比例函数为 $y = \frac{8}{x}$, 再求解 $A(2, 4)$, 再利用待定系数法求解一次函数的解析式即可;

(2) 由一次函数的图象在反比例函数图象的上方, 结合 $x > 0$ 可得答案;

(3) 求解 OA 的解析式为: $y = 2x$, 结合过点 B 作 BD 平行于 x 轴, 交 OA 于点 D , $B(4, 2)$, 可得 $D(1, 2)$, $BD = 4 - 1 = 3$, 由 AB 为 $y = -x + 6$, 可得 $C(6, 0)$, $OC = 6$, 再利用梯形的面积公式进行计算即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 过 $B(4, 2)$,

$\therefore k = 8$,

$\therefore$ 反比例函数为: $y = \frac{8}{x}$,

把 $A(a, 4)$ 代入 $y = \frac{8}{x}$ 可得: $a = \frac{8}{4} = 2$,

$\therefore A(2, 4)$,

$\therefore \begin{cases} 2m + n = 4 \\ 4m + n = 2 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} m = -1 \\ n = 6 \end{cases}$,

$\therefore$ 一次函数为 $y = -x + 6$.

【小问 2 详解】

由一次函数的图象在反比例函数图象的上方，结合 $x > 0$ 可得

不等式 $mx + n \geq \frac{k}{x}$ 的解集为： $2 \leq x \leq 4$.

【小问 3 详解】

$\therefore A(2,4)$ ，同理可得 OA 的解析式为： $y = 2x$ ，

$\therefore$ 过点 B 作 BD 平行于 x 轴，交 OA 于点 D ， $B(4,2)$ ，

$\therefore y_D = 2$ ，

$\therefore x_D = 1$ ，即 $D(1,2)$ ，

$\therefore BD = 4 - 1 = 3$ ，

$\therefore AB$ 为 $y = -x + 6$ ，

当 $y = 0$ ，则 $x = 6$ ，即 $C(6,0)$ ，

$\therefore OC = 6$ ，

$\therefore$ 梯形 $OCBD$ 的面积为： $\frac{1}{2}(3+6) \times 2 = 9$.

【点睛】 本题考查的是利用待定系数法求解一次函数与反比例函数的解析式，利用图象解不等式，坐标与图形面积，熟练的利用数形结合的方法解题是关键.

B 卷

四、填空题（本大题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分.）

22. 已知 a 、 b 是方程 $x^2 + 3x - 4 = 0$ 的两根，则 $a^2 + 4a + b - 3 =$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 利用一元二次方程的解的定义和根与系数的关系，可得 $a + b = -3$, $a^2 + 3a - 4 = 0$ ，从而得到

$a^2 + 3a = 4$ ，然后代入，即可求解.

【详解】 解： $\because a, b$ 是方程 $x^2 + 3x - 4 = 0$ 的两根，

$\therefore a + b = -3$, $a^2 + 3a - 4 = 0$ ，

$\therefore a^2 + 3a = 4$ ，

$\therefore a^2 + 4a + b - 3$

$$= a^2 + 3a + a + b - 3$$

$$= 4 + (-3) - 3$$

$$= -2.$$

故答案为：-2.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程的解的定义和根与系数的关系，熟练掌握一元二次方程的解的定义和根与系数的关系是解题的关键.

23. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边分别为 a 、 b 、 c ，且满足 $a^2 + |c - 10| + \sqrt{b - 8} = 12a - 36$ ，则 $\sin B$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{4}{5}$ ## 0.8

【解析】

【分析】 由 $a^2 + |c - 10| + \sqrt{b - 8} = 12a - 36$ ，可得 $(a - 6)^2 + |c - 10| + \sqrt{b - 8} = 0$ ，求解 $a = 6, b = 8, c = 10$ ，证明 $\angle C = 90^\circ$ ，再利用正弦的定义求解即可.

【详解】 解： $\because a^2 + |c - 10| + \sqrt{b - 8} = 12a - 36$ ，

$$\therefore a^2 - 12a + 36 + |c - 10| + \sqrt{b - 8} = 0,$$

$$\therefore (a - 6)^2 + |c - 10| + \sqrt{b - 8} = 0,$$

$$\therefore a - 6 = 0, \quad c - 10 = 0, \quad b - 8 = 0,$$

解得： $a = 6, b = 8, c = 10$ ，

$$\therefore a^2 + b^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = 10^2 = c^2,$$

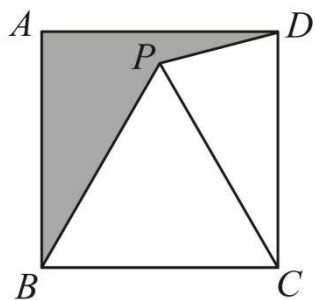
$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \sin B = \frac{b}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5},$$

故答案为： $\frac{4}{5}$.

【点睛】 本题考查的是利用完全平方公式分解因式，算术平方根，绝对值，偶次方的非负性，勾股定理的逆定理的应用，锐角的正弦的含义，证明 $\angle C = 90^\circ$ 是解本题的关键.

24. 如图，四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形， $\triangle BPC$ 是等边三角形，则阴影部分的面积为_____.

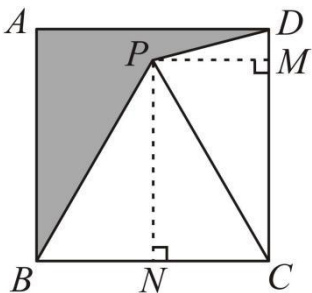


【答案】 $12 - 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 12$

【解析】

【分析】作 $PM \perp DC$ 于 M 点， $PN \perp BC$ 于 N 点，首先求出正方形的面积，然后根据等边三角形和正方形的性质求出 PM 和 PN ，从而求出 $\triangle PBC$ 和 $\triangle PCD$ 的面积，最后作差求解即可。

【详解】解：如图所示，作 $PM \perp DC$ 于 M 点， $PN \perp BC$ 于 N 点，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，

$\therefore \angle BCD = 90^\circ$ ， $BC = CD = 4$ ， $S_{\text{正方形}ABCD} = 4 \times 4 = 16$ ，

$\because \triangle BPC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle BCP = 60^\circ$ ， $BC = CP = 4$ ， $BN = CN = 2$ ，

$\therefore PN = \sqrt{CP^2 - CN^2} = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} BC \cdot PN = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ ，

$\because \angle BCD = 90^\circ$ ， $\angle BCP = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle PCM = 30^\circ$ ，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle PCM$ 中， $PM = \frac{1}{2} CP = 2$ ，

$\therefore S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} CD \cdot PM = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$ ，

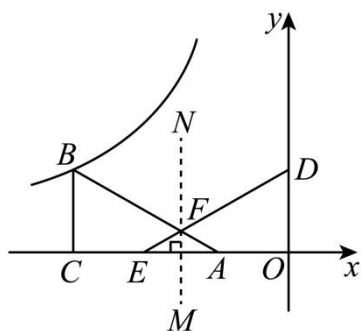
$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{正方形}ABCD} - S_{\triangle PBC} - S_{\triangle PCD}$ ，

$$\therefore S_{\text{阴影}} = 16 - 4\sqrt{3} - 4 = 12 - 4\sqrt{3},$$

故答案为： $12 - 4\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查正方和等边三角形的性质，以及 30° 角所对的直角边是斜边的一半，掌握图形的基本性质，熟练运用相关性质是解题关键.

25. 如图，在平面直角坐标系中， O 为坐标原点， MN 垂直于 x 轴，以 MN 为对称轴作 $\triangle ODE$ 的轴对称图形，对称轴 MN 与线段 DE 相交于点 F ，点 D 的对应点 B 恰好落在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 的图象上，点 O 、 E 的对应点分别是点 C 、 A 。若点 A 为 OE 的中点，且 $S_{\triangle EAF} = \frac{1}{4}$ ，则 k 的值为_____.

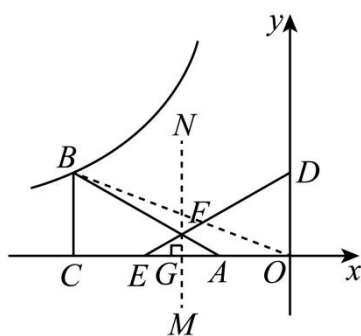


【答案】 -6

【解析】

【分析】连接 BO ，设 $AG = EG = a$ ，由对称的性质知 $EC = AO = AE = 2a$ ， $AC = EO = 4a$ ，利用相似三角形的判定和性质求得 $S_{\triangle EOD} = \frac{1}{8} \times 16 = 2$ ，则 $S_{\triangle ACB} = 2$ ，根据 $S_{\triangle OCB} = S_{\triangle ACB} + S_{\triangle AOB}$ 以及反比例函数的几何意义求解即可.

【详解】解：连接 BO ，



设对称轴 MN 与 x 轴交于点 G ,

$\therefore \triangle ODE$ 与 $\triangle CBA$ 关于对称轴 MN ,

$\therefore AG = EG$, $AC = EO$, $EC = AO$,

$\therefore$ 点 A 为 OE 的中点,

设 $AG = EG = a$ ，则 $EC = AO = AE = 2a$ ，

$$\therefore AC = EO = 4a,$$

$$\because S_{\triangle EAF} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle EGF} = \frac{1}{2} S_{\triangle EAF} = \frac{1}{8},$$

$$\because GF \parallel OD,$$

$$\therefore \triangle EFG \sim \triangle EDO,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle EGF}}{S_{\triangle EOD}} = \left(\frac{EG}{EO}\right)^2, \text{ 即 } \frac{\frac{1}{8}}{S_{\triangle EOD}} = \left(\frac{a}{4a}\right)^2,$$

$$\therefore S_{\triangle EOD} = \frac{1}{8} \times 16 = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle ACB} = 2,$$

$$\because AC = 4a, \quad AO = 2a,$$

$$\therefore S_{\triangle OCB} = S_{\triangle ACB} + S_{\triangle AOB} = 2 + 1 = 3,$$

$$\therefore \frac{1}{2}|k| = 3,$$

$$\because k < 0,$$

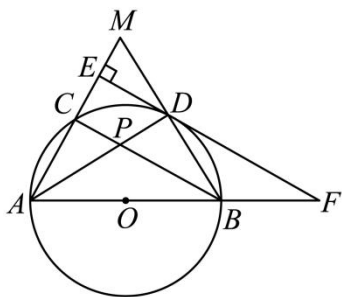
$$\therefore k = -6,$$

故答案为：-6.

【点睛】本题考查了轴对称的性质、中点的定义、相似三角形的判定和性质、反比例函数的定义等内容，解决本题的关键是牢记相关定义与性质，能根据题意在图形中找到对应关系，能挖掘图形中的隐含信息等，本题蕴含了数形结合的思想方法等.

五、解答题（本大题共 3 小题，每小题 12 分，共 36 分．解答应写出必要的文字说明或推演步骤．）

26. 如图，以线段 AB 为直径作 $\odot O$ ，交射线 AC 于点 C ， AD 平分 $\angle CAB$ 交 $\odot O$ 于点 D ，过点 D 作直线 $DE \perp AC$ ，交 AC 的延长线于点 E ，交 AB 的延长线于点 F ．连接 BD 并延长交 AC 的延长线于点 M ．



- (1) 求证：直线 DE 是 $\odot O$ 的切线；
- (2) 当 $\angle F = 30^\circ$ 时，判断 $\triangle ABM$ 的形状，并说明理由；
- (3) 在 (2) 的条件下， $ME = 1$ ，连接 BC 交 AD 于点 P ，求 AP 的长。

【答案】(1) 见解析 (2) $\triangle ABM$ 是等边三角形，理由见解析

(3) $AP = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

【解析】

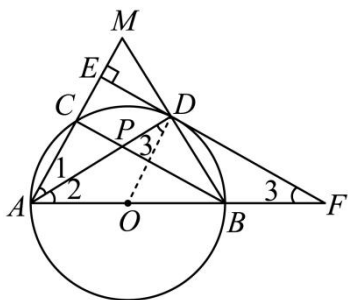
【分析】(1) 证明 $OD \parallel AC$ ，可推出 $OD \perp DE$ ，即可证明直线 DE 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 证明 $\angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$ ， $\angle CBD = \angle 1 = 30^\circ$ ，得到 $\angle ABC = 30^\circ$ ，据此计算即可证明结论成立；

(3) 利用含 30° 度的直角三角形的性质求得 $MD = 2$ ，得到等边 $\triangle ABM$ 的边长，在 $\text{Rt}\triangle ACP$ 中，利用余弦函数即可求解。

【小问 1 详解】

证明：连接 OD ，



$\therefore AD$ 平分 $\angle CAB$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ ，

$\therefore OA = OD$ ，

$\therefore \angle 3 = \angle 2$ ，

$\therefore \angle 3 = \angle 1$ ，

$\therefore OD \parallel AC$ ，

$\therefore DE \perp AC$ ，

$\therefore OD \perp DE$ ，

$\therefore OD$ 是 $\odot O$ 的半径，

$\therefore$ 直线 DE 是 $\odot O$ 的切线；

【小问 2 详解】

解： $\triangle ABM$ 是等边三角形，理由如下：

$\therefore DE \perp AC$ ， $\angle F = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle EAF = 60^\circ$,
 $\therefore \angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$,
 $\therefore \angle CBD = \angle 1 = 30^\circ$,
 $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,
 $\therefore \angle ACB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ABC = 90^\circ - \angle EAF = 30^\circ$,
 $\therefore \angle ABM = \angle ABC + \angle CBD = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle ABM$ 是等边三角形;

【小问 3 详解】

解: $\because \triangle ABM$ 是等边三角形,
 $\therefore \angle M = 60^\circ$, 则 $\angle MDE = 30^\circ$,
 $\therefore ME = 1$,
 $\therefore MD = 2ME = 2$,
 $\therefore AB = MB = 4$,
 $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径, $\angle ABC = 30^\circ$,
 $\therefore AC = \frac{1}{2}AB = 2$,
 $\because \angle 1 = 30^\circ$, $\cos \angle 1 = \frac{AC}{AP}$, 即 $\cos 30^\circ = \frac{2}{AP}$,
 $\therefore AP = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

【点睛】此题考查了圆和三角形的综合题, 切线的判定, 直径所对的圆周角为直角, 等腰三角形的性质和判定, 解直角三角形等知识, 解题的关键是熟练掌握以上知识点.

27. 某水果种植基地为响应政府号召, 大力种植优质水果. 某超市看好甲、乙两种优质水果的市场价值, 经调查, 这两种水果的进价和售价如下表所示:

水果种类	进价 (元/千克)	售价 (元/千克)
甲	a	20
乙	b	23

该超市购进甲种水果 15 千克和乙种水果 5 千克需要 305 元; 购进甲种水果 20 千克和乙种水果 10 千克需要 470 元.

- (1) 求 a , b 的值;
- (2) 该超市决定每天购进甲、乙两种水果共 100 千克进行销售, 其中甲种水果的数量不少于 30 千克, 且

不大于 80 千克. 实际销售时, 若甲种水果超过 60 千克, 则超过部分按每千克降价 3 元销售. 求超市当天售完这两种水果获得的利润 y (元) 与购进甲种水果的数量 x (千克) 之间的函数关系式, 并写出 x 的取值范围;

(3) 在 (2) 的条件下, 超市在获得的利润 y (元) 取得最大值时, 决定售出的甲种水果每千克降价 $3m$ 元, 乙种水果每千克降价 m 元, 若在保证利润率 (利润率 = $\frac{\text{利润}}{\text{本金}}$) 不低于 16%, 求 m 的最大值.

【答案】(1) $\begin{cases} a = 14 \\ b = 19 \end{cases}$

(2) $y = \begin{cases} 2x + 400 & (30 \leq x \leq 60) \\ -x + 580 & (60 < x \leq 80) \end{cases}$

(3) 1.2

【解析】

【分析】(1) 根据题意列出二元一次方程组求解即可;

(2) 设购进甲种水果的数量的数量为 x 千克, 则购进乙种水果的数量的数量为 $(100 - x)$ 千克, 根据题意分两种情况: $30 \leq x \leq 60$ 和 $60 < x \leq 80$, 然后分别表示出总利润即可;

(3) 首先根据题意求出 y 的最大值, 然后根据保证利润率 (利润率 = $\frac{\text{利润}}{\text{本金}}$) 不低于 16% 列出不等式求解即可.

【小问 1 详解】

由题意列方程组为: $\begin{cases} 15a + 5b = 305 \\ 20a + 10b = 470 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a = 14 \\ b = 19 \end{cases}$;

【小问 2 详解】

设购进甲种水果的数量的数量为 x 千克, 则购进乙种水果的数量的数量为 $(100 - x)$ 千克,

$\therefore$ 当 $30 \leq x \leq 60$ 时,

$$y = (20 - 14)x + (23 - 19)(100 - x) = 2x + 400;$$

当 $60 < x \leq 80$ 时,

$$y = (20 - 14) \times 60 + (20 - 3 - 14)(x - 60) + (23 - 19)(100 - x) = -x + 580;$$

综上所述, $y = \begin{cases} 2x + 400 & (30 \leq x \leq 60) \\ -x + 580 & (60 < x \leq 80) \end{cases};$

【小问3详解】

当 $30 \leq x \leq 60$ 时, $y = 2x + 400$,

$\therefore$ 当 $x = 60$ 时, y 取最大值, 此时 $y = 2 \times 60 + 400 = 520$ (元),

当 $60 < x \leq 80$ 时, $y = -x + 580$,

$\therefore y < -60 + 580 = 520$ (元),

$\therefore$ 由上可得: 当 $x = 60$ 时, y 取最大值 520 (元),

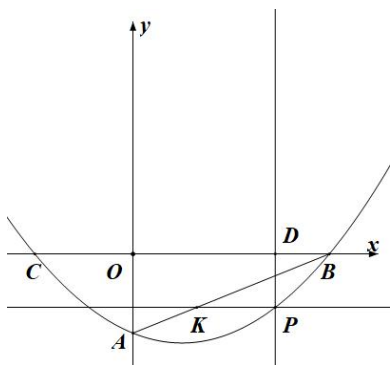
$\therefore$ 由题意可得, $\frac{520 - 3m \times 60 - 40m}{60 \times 14 + 40 \times 19} \geq 16\%$,

$\therefore$ 解得 $m \leq 1.2$.

$\therefore m$ 的最大值为 1.2.

【点睛】此题考查了二元一次方程组的应用, 一元一次不等式的应用, 一次函数的应用, 解题的关键是正确分析题目中的等量关系.

28. 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $B(4, 0)$, $C(-2, 0)$ 两点. 与 y 轴交于点 $A(0, -2)$.



(1) 求该抛物线的函数表达式;

(2) 若点 P 是直线 AB 下方抛物线上的一动点, 过点 P 作 x 轴的平行线交 AB 于点 K , 过点 P 作 y 轴的平行线交 x 轴于点 D , 求与 $\frac{1}{2}PK + PD$ 的最大值及此时点 P 的坐标;

(3) 在抛物线的对称轴上是否存在一点 M , 使得 $\triangle MAB$ 是以 AB 为一条直角边的直角三角形: 若存在, 请求出点 M 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$

(2) 存在, $\frac{1}{2}PK + PD$ 的最大值为 $\frac{25}{8}$, $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{35}{16}\right)$

(3) $(1, 6)$ 或 $(1, -4)$

【解析】

【分析】(1) 将 A、B、C 代入抛物线解析式求解即可；

(2) 可求直线 AB 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 2$, 设 $P\left(m, \frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{2}m - 2\right)$ ($0 < m < 4$), 可求

$$K\left(\frac{1}{2}m^2 - m, \frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{2}m - 2\right), \text{ 从而可求 } \frac{1}{2}PK + PD = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 2, \text{ 即可求解;}$$

(3) 过 A 作 $AM_2 \perp AB$ 交抛物线的对称轴于 M_2 , 过 B 作 $BM_1 \perp AB$ 交抛物线的对称轴于 M_1 , 连接 AM_1 , 设 $M_1(1, n)$, 可求 $AM_1^2 = n^2 + 4n + 5$, $BM_1^2 = n^2 + 9$, 由 $AB^2 + BM_1^2 = AM_1^2$, 可求 M_1 , 进而求出直线 BM_1 的解析式, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 由题意得

$$\begin{cases} 16a + 4b + c = 0 \\ 4a - 2b + c = 0 \\ c = -2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{ 抛物线的解析式为 } y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2.$$

【小问 2 详解】

解: 设直线 AB 的解析式为 $y = kx + b$, 则有

$$\begin{cases} 4k + b = 0 \\ b = -2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = \frac{1}{2}, \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的解析式为 } y = \frac{1}{2}x - 2;$$

$$\text{设 } P\left(m, \frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{2}m - 2\right) \quad (0 < m < 4),$$

$$\therefore \frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{2}m - 2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{1}{2}m^2 - m,$$

$$\therefore K\left(\frac{1}{2}m^2 - m, \frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{2}m - 2\right),$$

$$\therefore PK = m - \left(\frac{1}{2}m^2 - m\right)$$

$$= -\frac{1}{2}m^2 + 2m,$$

$$\therefore \frac{1}{2}PK = -\frac{1}{4}m^2 + m,$$

$$PD = -\left(\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{2}m - 2\right)$$

$$= -\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m + 2,$$

$$\therefore \frac{1}{2}PK + PD = -\frac{1}{4}m^2 + m - \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m + 2$$

$$= -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 2$$

$$= -\frac{1}{2}\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{8},$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < 0,$$

$$\therefore \text{当 } m = \frac{3}{2} \text{ 时, } \frac{1}{2}PK + PD \text{ 的最大值为 } \frac{25}{8},$$

$$\therefore y = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} - 2 = -\frac{35}{16},$$

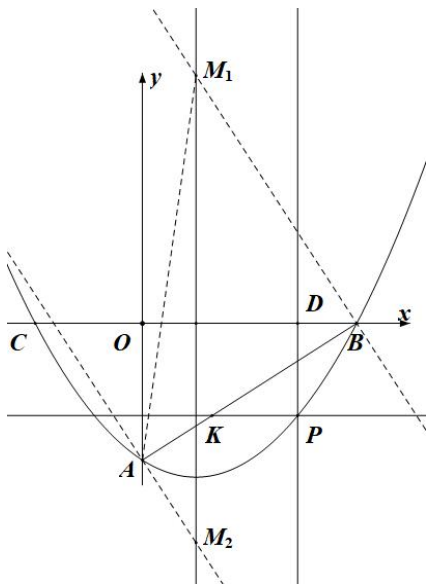
$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, -\frac{35}{16}\right).$$

故 $\frac{1}{2}PK + PD$ 的最大值为 $\frac{25}{8}$, $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{35}{16}\right)$.

【小问 3 详解】

解：存在，

如图，过 A 作 $AM_2 \perp AB$ 交抛物线的对称轴于 M_2 ，过 B 作 $BM_1 \perp AB$ 交抛物线的对称轴于 M_1 ，连接 AM_1 ，



$\therefore$ 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$ 的对称轴为直线 $x = 1$,

$\therefore$ 设 $M_1(1, n)$,

$$\therefore AM_1^2 = 1^2 + (n+2)^2$$

$$= n^2 + 4n + 5,$$

$$AB^2 = 2^2 + 4^2 = 20,$$

$$BM_1^2 = (4-1)^2 + n^2$$

$$= n^2 + 9,$$

$$\therefore AB^2 + BM_1^2 = AM_1^2,$$

$$\therefore n^2 + 9 + 20 = n^2 + 4n + 5,$$

解得： $n = 6$,

$\therefore M_1(1, 6)$;

设直线 BM_1 的解析式为 $y = k_1x + b_1$ ，则有

$$\begin{cases} k_1 + b_1 = 6 \\ 4k_1 + b_1 = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_1 = -2 \\ b_1 = 8 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BM_1 解析式为 $y = -2x + 8$,

$\because AM_2 \parallel BM_1$, 且经过 $A(0, -2)$,

$\therefore$ 直线 AM_2 解析式为 $y = -2x - 2$,

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时, $y = -2 \times 1 - 2 = -4$,

$\therefore M_2(1, -4)$;

综上所述: 存在, M 的坐标为 $(1, 6)$ 或 $(1, -4)$.

【点睛】 本题考查了待定系数法求函数解析式, 二次函数中动点最值问题, 直角三角形的判定, 勾股定理等, 掌握解法及找出动点坐标满足的函数解析式是解题的关键.

