

乐山市 2023 年初中学业水平考试

数学

本试题卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题），共 8 页。考生作答时，须将答案答在答题卡上，在本试题卷、草稿纸上答题无效。满分 150 分。考试时间 120 分钟。考试结束后，将本试题卷和答题卡一并交回。考生作答时，不能使用任何型号的计算器。

第Ⅰ卷（选择题 共 30 分）

注意事项：

1. 选择题必须使用 2B 铅笔将答案标号填涂在答题卡对应题目标号的位置上。
2. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求。

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分。

1. 计算： $2a - a =$ ()

- A. a B. $-a$ C. $3a$ D. 1

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据合并同类项法则进行计算即可。

【详解】 解： $2a - a = a$ ，故 A 正确。

故选： A.

【点睛】 本题主要考查了合并同类项，解题的关键是熟练掌握合并同类项法则，准确计算。

2. 下面几何体中，是圆柱的是 ()



【答案】 B

【解析】

【分析】 根据圆柱体的特征进行判断即可。

【详解】 解： A.是正方体，不符合题意；

B.是圆柱，符合题意；

C.是圆锥，不符合题意；

D.是球体，不符合题意，

故选： B.

【点睛】 本题考查了认识立体图形，熟练掌握每个几何体的特征是解题的关键。

3. 下列各点在函数 $y = 2x - 1$ 图象上的是 ()

- A. $(-1, 3)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, -1)$ D. $(2, 3)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据一次函数图象上点的坐标特征，将选项中的各点分别代入函数解析式 $y = 2x - 1$ ，进行计算即可得到答案.

【详解】解：∵一次函数图象上的点都在函数图象上，

∴函数图象上的点都满足函数解析式 $y = 2x - 1$ ，

A. 当 $x = -1$ 时， $y = -3$ ，故本选项错误，不符合题意；

B. 当 $x = 0$ 时， $y = -1$ ，故本选项错误，不符合题意；

C. 当 $x = 1$ 时， $y = 1$ ，故本选项错误，不符合题意；

D. 当 $x = 2$ 时， $y = 3$ ，故本选项正确，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题主要考查了一次函数图象上点的坐标特征，熟练掌握一次函数图象上的点都在函数图象上，是解题的关键.

4. 从水利部长江水利委员会获悉，截止 2023 年 3 月 30 日 17 时，南水北调中线一期工程自 2014 年 12 月全面通水以来，已累计向受水区实施生态补水约 90 亿立方米. 其中 9000000000 用科学记数法表示为 ()

- A. 9×10^8 B. 9×10^9 C. 9×10^{10} D. 9×10^{11}

【答案】B

【解析】

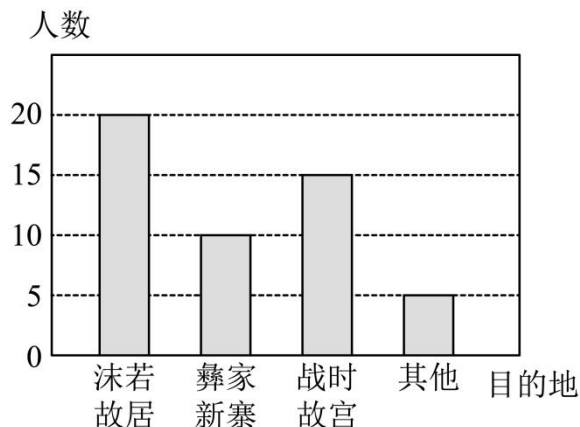
【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，看小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 小数点向左移动时， n 是正整数；小数点向右移动时， n 是负整数.

【详解】解： $9000000000 = 9 \times 10^9$

故选：B.

【点睛】本题主要考查科学记数法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 解题关键是正确确定 a 的值以及 n 的值.

5. 乐山是一座著名的旅游城市，有着丰富的文旅资源。某校准备组织初一年级 500 名学生进行研学旅行活动，政教处周老师随机抽取了其中 50 名同学进行研学目的地意向调查，并将调查结果制成如下统计图，如图所示估计初一年级愿意去“沫若故居”的学生人数为（ ）



- A. 100 B. 150 C. 200 D. 400

【答案】C

【解析】

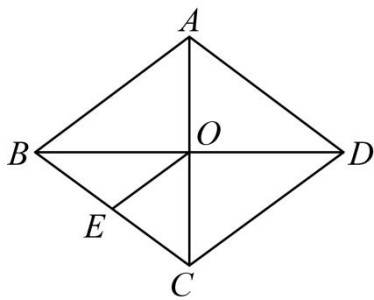
【分析】用初一年级总人数 500 名乘以随机抽取的 50 名同学中愿意去“沫若故居”的学生人数占的比值了可求解。

【详解】解： $500 \times \frac{20}{50} = 200$ ，

故选：C。

【点睛】本题考查条形统计图，用样本估计总体一，熟练掌握用样本频数估计总体频数是解题的关键。

6. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， E 为边 BC 的中点，连结 OE 。若 $AC = 6$ ， $BD = 8$ ，则 $OE =$ （ ）



- A. 2 B. $\frac{5}{2}$ C. 3 D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】先由菱形的性质得 $AC \perp BD$ ， $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ ， $OB = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 8 = 4$ ，再由勾股定理

求出 $BC=5$ ，然后由直角三角形斜边的中线等于斜边的一半求解.

【详解】解：∵菱形 $ABCD$,

$$\therefore AC \perp BD, OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 6 = 3, OB = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$$

$$\therefore \text{由勾股定理, 得 } BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 5,$$

∵ E 为边 BC 的中点,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$$

故选: B.

【点睛】本考查菱形的性质, 勾股定理, 直角三角形的性质, 熟练掌握菱形的性质, 直角三角形的性质是解题的关键.

7. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 8x + m = 0$ 两根为 x_1, x_2 , 且 $x_1 = 3x_2$, 则 m 的值为 ()

A. 4

B. 8

C. 12

D. 16

【答案】C

【解析】

【分析】根据一元二次方程根与系数的关系得出 $x_1 + x_2 = 8$, 然后即可确定两个根, 再由根与系数的关系求解即可.

【详解】解: ∵关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 8x + m = 0$ 两根为 x_1, x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = 8,$$

$$\therefore x_1 = 3x_2,$$

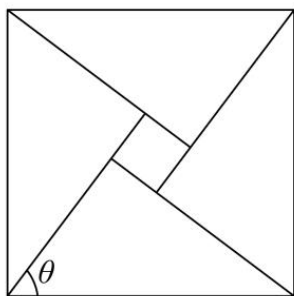
$$\therefore x_2 = 2, x_1 = 6,$$

$$\therefore m = x_1 x_2 = 12,$$

故选: C.

【点睛】题目主要考查一元二次方程根与系数的关系, 熟练掌握此关系是解题关键.

8. 我国汉代数学家赵爽在注解《周髀算经》时给出“赵爽弦图”, 如图所示, 它是由四个全等的直角三角形与中间的小正方形拼成的一个大正方形. 如果大正方形面积为 25, 小正方形面积为 1, 则 $\sin \theta =$ ()



- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

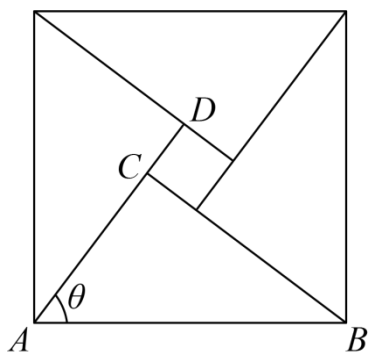
【答案】A

【解析】

【分析】先由两个正方形的面积分别得出其边长，由赵爽弦图的特征可得 $AD = BC$ ，则 $AD = AC + 1$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，利用勾股定理求出 $AD = BC = 4$ ，最后按照正弦函数的定义计算求解即可.

【详解】解：∵大正方形的面积是 25，小正方形面积是 1，

∴大正方形的边长 $AB = 5$ ，小正方形的边长 $CD = 1$ ，



∴ $AD = BC$ ，

∴ $AD = AC + 1$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC^2 + BC^2 = AB^2$ ，

∴ $(AD - 1)^2 + AD^2 = 5^2$ ，

解得 $AD = BC = 4$ （负值舍去）

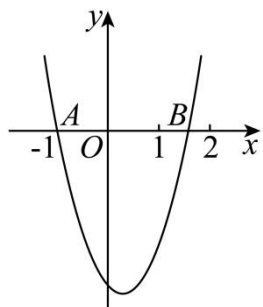
∴ $\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$.

故选 A.

【点睛】本题考查了勾股定理、弦图及正弦函数的计算，明确相关性质及定理是解题的关键.

9. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(m, 0)$ ，且 $1 < m < 2$ ，有下列结论：① $b < 0$ ；

② $a+b>0$ ；③ $0<a<-c$ ；④ 若点 $C\left(-\frac{2}{3}, y_1\right), D\left(\frac{5}{3}, y_2\right)$ 在抛物线上，则 $y_1 > y_2$ 。其中，正确的结论有（ ）



A. 4 个

B. 3 个

C. 2 个

D. 1 个

【答案】B

【解析】

【分析】抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(m, 0)$ ，且 $1 < m < 2$ ，可以得到 $a > 0$ ， $0 < -\frac{b}{2a} < \frac{1}{2}$ ，从而可以得到 b 的正负情况，从而可以判断①；继而可得出 $-b < a$ ，则 $a+b > 0$ ，即可判断②；由图象可知，当 $x = -1$ 时， $y = 0$ ，即 $a - b + c = 0$ ，所以有 $a + c = b$ ，从而可得出 $0 < a < -c$ ，即可判断③；利用 $\left|\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| = \left|\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\right|$ ，再根据 $0 < -\frac{b}{2a} < \frac{1}{2}$ ，所以 $\left|-\frac{b}{2a} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| < \left|\frac{5}{3} - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right|$ ，从而可得 $y_1 < y_2$ ，即可判断④。

【详解】解：∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象开口向上，

∴ $a > 0$ ，

∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(m, 0)$ ，且 $1 < m < 2$ ，

∴ $0 < -\frac{b}{2a} < \frac{1}{2}$ ，

∴ $b < 0$ ，故①正确；

∵ $0 < -\frac{b}{2a} < \frac{1}{2}$ ， $a > 0$ ，

∴ $-b < a$

∴ $a+b > 0$ ，故②正确；

由图象可知，当 $x = -1$ 时， $y = 0$ ，即 $a - b + c = 0$ ，

∴ $a + c = b$

∴ $a > 0$ ， $b < 0$ ，

$\therefore 0 < a < -c$ ，故③正确；

$$\therefore \left| \frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right| = \left| \frac{5}{3} - \frac{1}{2} \right|,$$

$$\text{又} \because 0 < -\frac{b}{2a} < \frac{1}{2},$$

$$\therefore \left| -\frac{b}{2a} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right| < \left| \frac{5}{3} - \left(-\frac{b}{2a} \right) \right|,$$

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象开口向上，

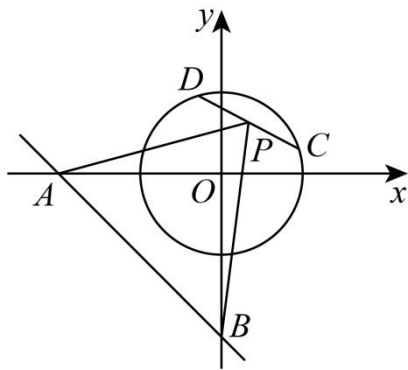
$\therefore y_1 < y_2$ ，故④错误.

$\therefore$ 正确的有①②③共 3 个，

故选：B.

【点睛】 本题考查二次函数图象与系数的关系，二次函数的性质，熟练掌握根据二次函数图象性质是解题的关键.

10. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = -x - 2$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点， C 、 D 是半径为 1 的 $\odot O$ 上两动点，且 $CD = \sqrt{2}$ ， P 为弦 CD 的中点. 当 C 、 D 两点在圆上运动时， $\triangle PAB$ 面积的最大值是 ()



A. 8

B. 6

C. 4

D. 3

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据一次函数与坐标轴的交点得出 $OA = OB = 2$ ，确定 $AB = 2\sqrt{2}$ ，再由题意得出当 PO 的延长线恰好垂直 AB 时，垂足为点 E ，此时 PE 即为三角形的最大高，连接 DO ，利用勾股定理求解即可.

【详解】 解： $\because$ 直线 $y = -x - 2$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点，

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时， $y = -2$ ，当 $y = 0$ 时， $x = -2$ ，

$$\therefore A(-2,0), B(0,-2),$$

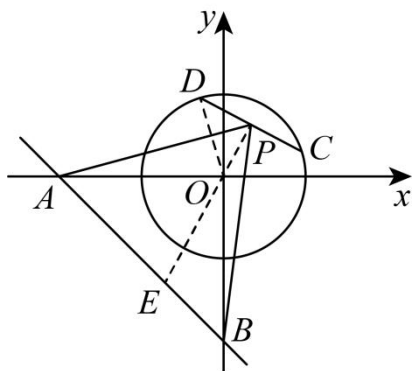
$$\therefore OA = OB = 2,$$

$$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 2\sqrt{2},$$

$\therefore \triangle PAB$ 的底边 $AB = 2\sqrt{2}$ 为定值,

$\therefore$ 使得 $\triangle PAB$ 底边上的高最大时, 面积最大,

点 P 为 CD 的中点, 当 PO 的延长线恰好垂直 AB 时, 垂足为点 E , 此时 PE 即为三角形的最大高, 连接 DO ,



$\therefore CD = \sqrt{2}$, $\odot O$ 的半径为 1,

$$\therefore DP = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore OP = \sqrt{OD^2 - DP^2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore OE \perp AB$,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2},$$

$$\therefore PE = OE + OP = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3,$$

故选: D.

【点睛】题目主要考查一次函数的应用及勾股定理理解三角形, 垂径定理的应用, 理解题意, 确定出高的最大值是解题关键.

第 II 卷 (非选择题 共 120 分)

注意事项:

1. 考生使用 0.5m 黑色墨汁签字笔在答题卡上题目所指示的答题区域内作答, 答在试题卷上

无效。

2. 作图时，可先用铅笔画线，确认后再用 0.5mm 黑色墨汁签字笔描清楚。

3. 解答题应写出文字说明、证明过程或推演步骤。

4. 本部分共 16 个小题，共 120 分。

二、填空题：本大题共 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分。

11. 不等式 $x-1>0$ 的解集是_____。

【答案】 $x>1$

【解析】

【分析】直接移项即可得解。

【详解】解： $\because x-1>0$,

$\therefore x>1$,

故答案为： $x>1$ 。

【点睛】本题主要考查了解一元一次不等式，熟练掌握解一元一次不等式的步骤是解答本题的关键。

12. 小张在“阳光大课间”活动中进行了 5 次一分钟跳绳练习，所跳个数分别为：160, 163, 160, 157, 160. 这组数据的众数为_____。

【答案】 160

【解析】

【分析】根据众数是一组数据中出现次数最多的数值求解即可。

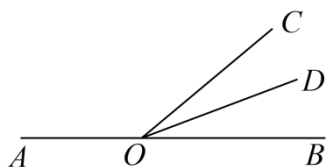
【详解】解：这组数据中出现次数最多的是 160，出现了三次，

$\therefore$ 这组数据的众数为 160，

故答案为： 160。

【点睛】题目注意考查求一组数据的众数，理解众数的定义是解题关键。

13. 如图，点 O 在直线 AB 上， OD 是 $\angle BOC$ 的平分线，若 $\angle AOC = 140^\circ$ ，则 $\angle BOD$ 的度数为_____。



【答案】 20° ## 20 度

【解析】

【分析】根据邻补角得出 $\angle BOC = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ ，再由角平分线求解即可。

【详解】解： $\because \angle AOC = 140^\circ$,

$\therefore \angle BOC = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$,

$\because OD$ 是 $\angle BOC$ 的平分线,

$$\therefore \angle BOD = 20^\circ,$$

故答案为: 20° .

【点睛】题目注意考查邻补角及角平分线的计算, 找准各角之间的关系是解题关键.

14. 若 m 、 n 满足 $3m - n - 4 = 0$, 则 $8^m \div 2^n =$ _____.

【答案】16

【解析】

【分析】先将已知 $3m - n - 4 = 0$ 变形为 $3m - n = 4$, 再将 $8^m \div 2^n$ 变形为 2^{3m-n} , 然后整体代入即可.

【详解】解: $\because 3m - n - 4 = 0$

$$\therefore 3m - n = 4$$

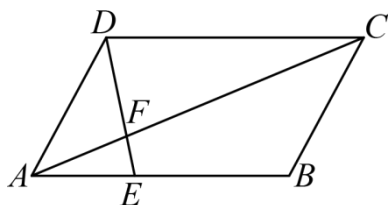
$$\therefore 8^m \div 2^n = (2^3)^m \div 2^n = 2^{3m} \div 2^n = 2^{3m-n} = 2^4 = 16$$

故答案为: 16.

【点睛】本题考查代数式值, 幂的乘方和同底数幂除法, 熟练掌握幂的乘方和同底数幂除法法则是解题的关键.

15. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 是线段 AB 上一点, 连结 AC 、 DE 交于点 F . 若 $\frac{AE}{EB} = \frac{2}{3}$, 则

$$\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AEF}} = \text{_____}.$$



【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 则 $AB = CD$, $AB \parallel CD$, 可证明 $\triangle EAF \sim \triangle DCF$, 得到

$$\frac{DF}{EF} = \frac{CD}{AE} = \frac{AB}{AE}, \text{ 由 } \frac{AE}{EB} = \frac{2}{3} \text{ 进一步即可得到答案.}$$

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = CD, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle CDF, \angle EAF = \angle DCF,$$

$$\therefore \triangle EAF \sim \triangle DCF,$$

$$\therefore \frac{DF}{EF} = \frac{CD}{AE} = \frac{AB}{AE},$$

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{DF}{EF} = \frac{AB}{AE} = \frac{5}{2}.$$

故答案为: $\frac{5}{2}$

【点睛】此题考查了平行四边形的性质、相似三角形的判定和性质等知识，证明 $\triangle EAF \sim \triangle DCF$ 是解题的关键.

16. 定义：若 x, y 满足 $x^2 = 4y + t, y^2 = 4x + t$ 且 $x \neq y$ (t 为常数)，则称点 $M(x, y)$ 为“和谐点”.

(1) 若 $P(3, m)$ 是“和谐点”，则 $m =$ _____.

(2) 若双曲线 $y = \frac{k}{x} (-3 < x < -1)$ 存在“和谐点”，则 k 的取值范围为_____.

【答案】 ①. -7 ②. $3 < k < 4$

【解析】

【分析】(1) 根据“和谐点”的定义得到 $3^2 = 4m + t, m^2 = 4 \times 3 + t$ ，整理得到 $m^2 + 4m - 21 = 0$ ，解得 $m_1 = -7, m_2 = 3$ (不合题意，舍去)，即可得到答案；

(2) 设点 (a, b) 为双曲线 $y = \frac{k}{x} (-3 < x < -1)$ 上的“和谐点”，根据“和谐点”的定义整理得到 $(a - b)(a + b + 4) = 0$ ，由 $a \neq b$ 得到 $a + b + 4 = 0$ ，则 $b = -a - 4$ ，由 $b = \frac{k}{a} (-3 < a < -1)$ 进一步得到 $k = -(a + 2)^2 + 4$ ，且 $-3 < a < -1$ ，根据二次函数的图象和性质即可得到 k 的取值范围.

【详解】解：(1) 若 $P(3, m)$ 是“和谐点”，则 $3^2 = 4m + t, m^2 = 4 \times 3 + t$ ，
则 $3^2 - 4m = t, m^2 - 12 = t$ ，

$$\therefore 3^2 - 4m = m^2 - 12,$$

即 $m^2 + 4m - 21 = 0$ ，解得 $m_1 = -7, m_2 = 3$ (不合题意，舍去)，

$$\therefore m = -7,$$

故答案为: -7

(2) 设点 (a, b) 为双曲线 $y = \frac{k}{x} (-3 < x < -1)$ 上的“和谐点”，

$$\therefore a^2 = 4b + t, b^2 = 4a + t, \quad b = \frac{k}{a} (-3 < a < -1),$$

$$\text{即 } a^2 - 4b = b^2 - 4a,$$

$$\therefore (a+b)(a-b) + 4(a-b) = 0,$$

$$\text{则 } (a-b)(a+b+4) = 0,$$

$$\therefore a \neq b,$$

$$\therefore a + b + 4 = 0,$$

$$\text{即 } b = -a - 4,$$

$$\therefore b = \frac{k}{a} (-3 < a < -1),$$

$$\therefore k = ab = a(-a-4) = -a^2 - 4a = -(a+2)^2 + 4, \text{ 且 } -3 < a < -1,$$

对抛物线 $k = -(a+2)^2 + 4$ 来说,

$$\therefore -1 < 0,$$

$\therefore$ 开口向下,

$$\text{当 } a = -1 \text{ 时, } k = -(-1+2)^2 + 4 = 3,$$

$$\text{当 } a = -3 \text{ 时, } k = -(-3+2)^2 + 4 = 3,$$

$$\therefore \text{对称轴为 } a = -2, \quad -3 < a < -1,$$

$$\therefore \text{当 } a = -2 \text{ 时, } k \text{ 取最大值为 } 4,$$

$$\therefore k \text{ 的取值范围为 } 3 < k < 4,$$

故答案为: $3 < k < 4$

【点睛】 此题考查了反比例函数的性质、二次函数的图象和性质等知识，读懂题意，熟练掌握反比例函数和二次函数的性质是解题的关键。

三、解答题： 本大题共 10 个小题，共 102 分。解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤。

$$17. \text{ 计算: } |-2| + 2023^0 - \sqrt{4}$$

【答案】 1

【解析】

【分析】 先化简绝对值及算术平方根，计算零次幂的运算，然后进行加减法即可。

【详解】解： $|-2|+2023^0-\sqrt{4}$
 $=2+1-2$
 $=1.$

【点睛】题目注意考查实数的混合运算，熟练掌握运算是解题关键.

18. 解二元一次方程组： $\begin{cases} x-y=1 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

【解析】

【分析】采用加减消元法即可求解.

【详解】解： ① $\times 2$ ，得 $2x-2y=2$ ②，

将②+③，得 $5x=10$ ，

解得 $x=2$.

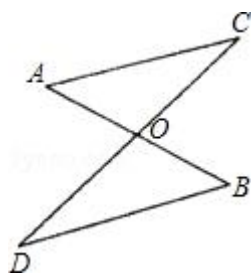
将 $x=2$ 代入①，

得 $y=1$ ，

$\therefore$ 方程组的解为： $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

【点睛】本题主要考查了运用加减消元法解二元一次方程组的知识，掌握加减消元法是解答本题的关键.

19. 如图，AB、CD 相交于点 O，AO=BO，AC // DB. 求证：AC=BD.



【答案】见解析

【解析】

【分析】要证明 $AC=BD$ ，只要证明 $\triangle AOC \cong \triangle BOD$ ，根据 $AC \parallel DB$ 可得 $\angle A = \angle B$ ， $\angle C = \angle D$ ，又知 $AO=BO$ ，则可得到 $\triangle AOC \cong \triangle BOD$ ，从而求得结论.

【详解】（方法一）

$\because AC \parallel DB$,

$$\therefore \angle A = \angle B, \angle C = \angle D.$$

在 $\triangle AOC$ 与 $\triangle BOD$ 中

$$\because \angle A = \angle B, \angle C = \angle D, AO = BO,$$

$$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOD.$$

$$\therefore AC = BD.$$

(方法二) $\because AC \parallel DB,$

$$\therefore \angle A = \angle B.$$

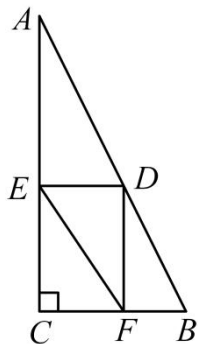
在 $\triangle AOC$ 与 $\triangle BOD$ 中,

$$\because \begin{cases} \angle A = \angle B \\ AO = BO \\ \angle AOC = \angle BOD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOD.$$

$$\therefore AC = BD.$$

20. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 D 为 AB 边上任意一点(不与点 A, B 重合), 过点 D 作 $DE \parallel BC$, $DF \parallel AC$, 分别交 AC 、 BC 于点 E, F , 连接 EF .



(1) 求证: 四边形 $ECFD$ 是矩形;

(2) 若 $CF = 2$, $CE = 4$, 求点 C 到 EF 的距离.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{4}{5}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) 利用平行线的性质证明 $\angle CED = \angle CFD = 90^\circ$, 再利用四边形内角和为 360° , 证明 $\angle EDF = 90^\circ$, 即可由矩形判定定理得出结论;

(2) 先由勾股定理求出 $EF = \sqrt{CF^2 + CE^2} = 2\sqrt{5}$, 再根据三角形面积公式求解即可.

【小问1详解】

证明: $\because DE \parallel BC, DF \parallel AC,$

$\therefore$ 四边形 $ECFD$ 为平行四边形,

$\therefore \angle C = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ECFD$ 是矩形.

【小问 2 详解】

解: $\because \angle C = 90^\circ$, $CF = 2$, $CE = 4$,

$$\therefore EF = \sqrt{CF^2 + CE^2} = 2\sqrt{5}$$

设点 C 到 EF 的距离为 h ,

$$\therefore S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot CF = \frac{1}{2} EF \cdot h$$

$$\therefore 2 \times 4 = 2\sqrt{5}h$$

$$\therefore h = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

答: 点 C 到 EF 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

【点睛】 本题考查矩形的判定, 平行线的性质, 勾股定理. 熟练掌握矩形的判定定理和利用面积法求线段长是解题的关键.

21. 为了践行习近平总书记提出的“绿水青山就是金山银山”的发展理念, 某地计划在规定时间内种植梨树 6000 棵. 开始种植时, 由于志愿者的加入, 实际每天种植梨树的数量比原计划增加了 20%, 结果提前 2 天完成任务. 问原计划每天种植梨树多少棵?

【答案】 原计划每天种植梨树 500 棵

【解析】

【分析】 根据题意列出分式方程求解即可.

【详解】 解: 设原计划每天种植梨树 x 棵

$$\text{由题可知: } \frac{6000}{x} - \frac{6000}{(1+20\%)x} = 2$$

解得: $x = 500$

经检验: $x = 500$ 是原方程的根, 且符合题意.

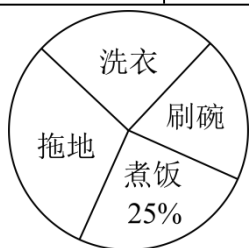
答: 原计划每天种植梨树 500 棵.

【点睛】 题目注意考查分式方程的应用, 理解题意列出分式方程是解题关键.

22. 为培养同学们爱劳动的习惯, 某班开展了“做好一件家务”主题活动, 要求全班同学人人参与经统计, 同学们做的家务类型为“洗衣”“拖地”“煮饭”“刷碗”. 班主任将以上信息绘制成了统计图表, 如图

所示.

家务类型	洗衣	拖地	煮饭	刷碗
人数 (人)	10	12	10	m



根据上面图表信息，回答下列问题：

- (1) $m =$ _____；
- (2) 在扇形统计图中，“拖地”所占的圆心角度数为_____；
- (3) 班会课上，班主任评选出了近期做家务表现优异的 4 名同学，其中有 2 名男生．现准备从表现优异的同学中随机选取两名同学分享体会，请用画树状图或列表的方法求所选同学中有男生的概率．

【答案】 (1) 8 (2) 108°

(3) $\frac{5}{6}$

【解析】

【分析】 (1) 用做饭的人数除以做饭点的百分比 25%，得抽取的总人数，再减去“洗衣”、“拖地”、“刷碗”的人数即可求得 m 值；

(2) 用 360° 乘以“拖地”人数所占的百分比，即可求解；

(3) 画树状图或列表分析出所有可能的结果数和有男生的结果数，再用概率公式计算即可．

【小问 1 详解】

解： $m = 10 \div 25\% - 10 - 12 - 10 = 8$ ，

故答案为：8；

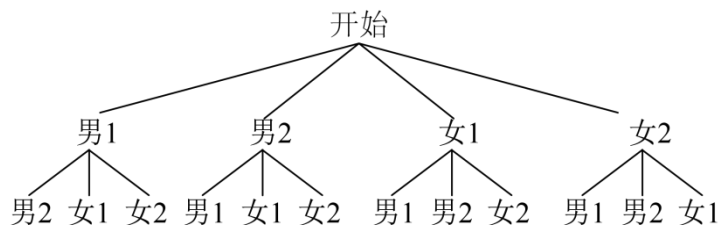
【小问 2 详解】

解： $360^\circ \times 12 \div (10 \div 25\%) = 108^\circ$ ，

故答案为： 108° ；

【小问 3 详解】

解： 方法一： 画树状图如下：



由图可知所有可能的结果共的 12 种，有男生的结果 有 10 种，所以所选同学中有男生的概率为 $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

方法二：列表如下：

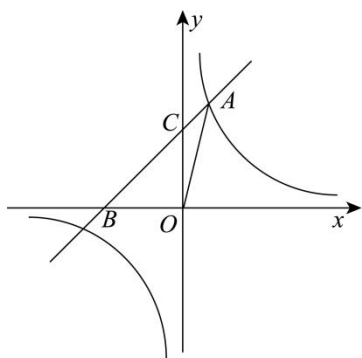
	男 1	男 2	女 1	女 2
男 1		(男 1, 男 2)	(男 1, 女 1)	(男 1, 女 2)
男 2	(男 2, 男 1)		(男 2, 女 1)	(男 2, 女 2)
女 1	(女 1, 男 1)	(女 1, 男 2)		(女 1, 女 2)
女 2	(女 2, 男 1)		(女 2, 女 1)	

由表可知所有可能的结果共的 12 种，有男生的结果 有 10 种，所以所选同学中有男生的概率为 $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

【点睛】 本题考查统计表，扇形统计图，用画树状图或列表的方法求概率. 熟练掌握从统计图表中获取有用信息和用画树状图或列表的方法求概率是解题的关键.

23. 如图，一次函数 $y = kx + b$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象交于点 $A(m, 4)$ ，与 x 轴交于点 B ，与 y

轴交于点 $C(0, 3)$.



(1) 求 m 的值和一次函数的表达式；

(2) 已知 P 为反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 图象上的一点， $S_{\triangle OBP} = 2S_{\triangle OAC}$ ，求点 P 的坐标.

【答案】 (1) $y = x + 3$

(2) $P(2,2)$ 或 $(-2,-2)$

【解析】

【分析】(1) 先把点 A 坐标代入反比例函数解析式求出 m 的值，进而求出点 A 的坐标，再把点 A 和点 C 的坐标代入一次函数解析式中求出一函数解析式即可；

(2) 先求出 $OB=3$ ， $OC=3$ ，过点 A 作 $AH \perp y$ 轴于点 H ，过点 P 作 $PD \perp x$ 轴于点 D ，如图所示，根据 $S_{\triangle OBP} = 2S_{\triangle OAC}$ 可得 $\frac{1}{2}OB \cdot PD = 2 \times \frac{1}{2}OC \cdot AH$ ，求出 $PD=2$ ，则点 P 的纵坐标为 2 或 -2，由此即可得到答案.

【小问 1 详解】

解：∵ 点 $A(m,4)$ 在反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象上，

$$\therefore 4 = \frac{4}{m},$$

$$\therefore m = 1,$$

$$\therefore A(1,4),$$

又∵ 点 $A(1,4)$ ， $C(0,3)$ 都在一次函数 $y = kx + b$ 的图象上，

$$\therefore \begin{cases} 4 = k + b \\ 3 = b \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ b = 3 \end{cases},$$

∴ 一次函数的解析式为 $y = x + 3$.

【小问 2 详解】

解：对于 $y = x + 3$ ，当 $y = 0$ 时， $x = -3$ ，

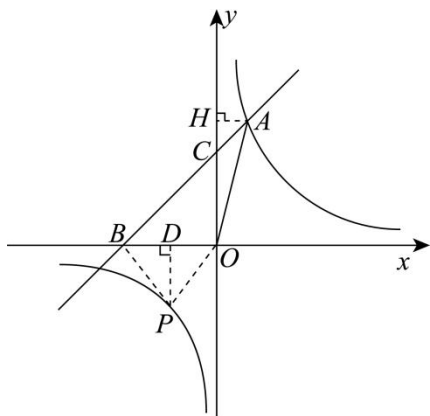
$$\therefore B(-3,0),$$

$$\therefore OB = 3,$$

$$\therefore C(0,3),$$

$$\therefore OC = 3$$

过点 A 作 $AH \perp y$ 轴于点 H ，过点 P 作 $PD \perp x$ 轴于点 D ，如图所示.



$$\because S_{\triangle OBP} = 2S_{\triangle AOC},$$

$$\therefore \frac{1}{2}OB \cdot PD = 2 \times \frac{1}{2}OC \cdot AH.$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 3 \times PD = 2 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 1,$$

解得 $PD = 2$.

$\therefore$ 点 P 的纵坐标为 2 或 -2.

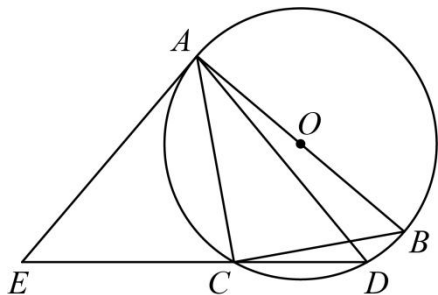
将 $y = 2$ 代入 $y = \frac{4}{x}$ 得 $x = 2$,

将 $y = -2$ 代入 $y = \frac{4}{x}$ 得 $x = -2$,

$\therefore$ 点 $P(2, 2)$ 或 $(-2, -2)$.

【点睛】 本题主要考查了一次函数与反比例函数综合，利用数形结合的思想求解是解题的关键.

24. 如图，已知 $\odot O$ 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的外接圆， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 是圆上一点， E 是 DC 延长线上一点，连结 AD ， AE ，且 $AD = AE$ ， $CA = CE$.



(1) 求证：直线 AE 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $\sin E = \frac{2}{3}$ ， $\odot O$ 的半径为 3，求 AD 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$

【解析】

【分析】(1) 由 $\angle ACB = 90^\circ$ ，可知 AB 是 $\odot O$ 的直径，由 $\overline{AC} = \overline{AC}$ ，可得 $\angle ABC = \angle ADC$ ，由 $AD = AE$ ， $CA = CE$ ，可得 $\angle E = \angle ADC$ ， $\angle CAE = \angle E$ ，则 $\angle CAE = \angle ADC = \angle ABC$ ，由 $\angle ABC + \angle CAB = 90^\circ$ ，可得 $\angle CAE + \angle CAB = 90^\circ$ ，即 $\angle OAE = 90^\circ$ ，进而结论得证；

(2) 作 $CF \perp AE$ ，垂足为 E ，如图所示，由题意知， $\triangle ACE$ 是等腰三角形，则 $EF = \frac{1}{2}AE$ ，由题意知， $AB = 6$ ， $\sin \angle ABC = \sin \angle E$ ，可求 $AC = AB \cdot \sin B = 6 \times \frac{2}{3} = 4$ ， $CE = 4$ ， $CF = CE \cdot \sin E = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ ，由勾股定理得 $EF = \sqrt{CE^2 - CF^2} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$ ，根据 $AD = AE = 2EF$ ，计算求解即可。

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

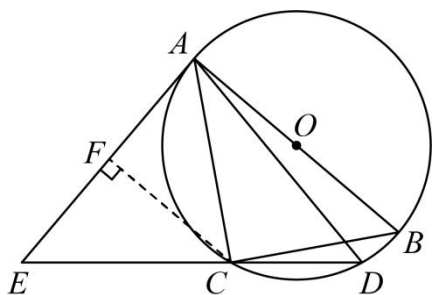
$$\therefore \overline{AC} = \overline{AC},$$
$$\therefore \angle ABC = \angle ADC,$$
$$\therefore AD = AE, \quad CA = CE,$$
$$\therefore \angle E = \angle ADC, \quad \angle CAE = \angle E,$$
$$\therefore \angle CAE = \angle ADC = \angle ABC,$$
$$\therefore \angle ABC + \angle CAB = 90^\circ,$$
$$\therefore \angle CAE + \angle CAB = 90^\circ,$$
$$\therefore \angle OAE = 90^\circ,$$

又 $\because OA$ 是半径,

$\therefore$ 直线 AE 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

解: 作 $CF \perp AE$, 垂足为 E , 如图所示,


$$\therefore CA = CE,$$

$\therefore \triangle ACE$ 是等腰三角形,

$\therefore CF \perp AE$,

$$\therefore EF = \frac{1}{2} AE,$$

由题意知, $AB = 6$, $\sin \angle ABC = \sin \angle E$,

$$\therefore AC = AB \cdot \sin B = 6 \times \frac{2}{3} = 4,$$

$$\therefore CE = 4,$$

$$\therefore CF = CE \cdot \sin E = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3},$$

$$\text{由勾股定理得 } EF = \sqrt{CE^2 - CF^2} = \frac{4\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore AD = AE = 2EF = \frac{8\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore AD \text{ 的长为 } \frac{8\sqrt{5}}{3}.$$

【点睛】 本题考查了切线的判定, 90° 的圆周角所对的弦为直径, 同弧所对的圆周角相等, 等腰三角形的判定与性质, 正弦, 勾股定理等知识. 解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用.

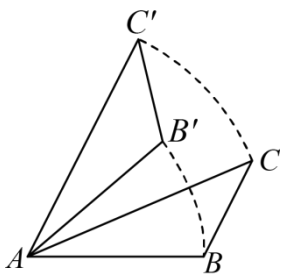
25. 在学习完《图形的旋转》后, 刘老师带领学生开展了一次数学探究活动

【问题情境】

刘老师先引导学生回顾了华东师大版教材七年级下册第121页“探索”部分内容:

如图, 将一个三角形纸板 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 θ 到达 $\triangle AB'C'$ 的位置, 那么可以得到: $AB = AB'$,

$AC = AC'$, $BC = B'C'$; $\angle BAC = \angle B'AC'$, $\angle ABC = \angle AB'C'$, $\angle ACB = \angle AC'B'$ ()



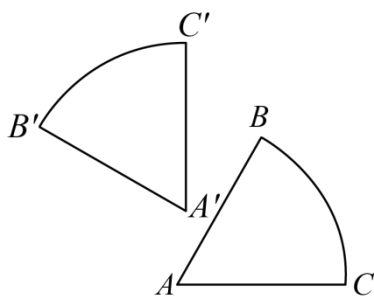
刘老师进一步谈到: 图形的旋转蕴含于自然界的运动变化规律中, 即“变”中蕴含着“不变”, 这是我们解决图形旋转的关键; 故数学就是一门哲学.

【问题解决】

(1) 上述问题情境中“()”处应填理由: _____;

(2) 如图, 小王将一个半径为 4cm, 圆心角为 60° 的扇形纸板 ABC 绕点 O 逆时针旋转 90° 到达扇形纸板

$A'B'C'$ 的位置.

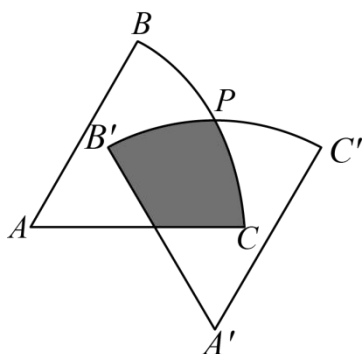


①请在图中作出点 O ;

②如果 $BB'=6\text{cm}$, 则在旋转过程中, 点 B 经过的路径长为_____;

【问题拓展】

小李突发奇想, 将与 (2) 中完全相同的两个扇形纸板重叠, 一个固定在墙上, 使得一边位于水平位置, 另一个在弧的中点处固定, 然后放开纸板, 使其摆动到竖直位置时静止, 此时, 两个纸板重叠部分的面积是多少呢? 如图所示, 请你帮助小李解决这个问题.



【答案】问题解决 (1) 旋转前后的图形对应线段相等, 对应角相等; (2) ①见解析② $\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi\text{cm}$; 问题拓

展: $\left(\frac{8}{3}\pi - \frac{8}{3}\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$

【解析】

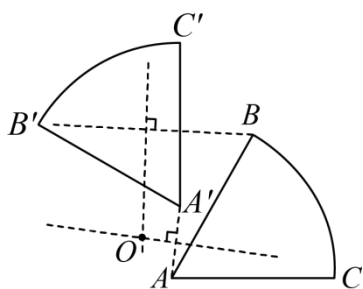
【分析】问题解决 (1) 根据旋转性质得出旋转前后的图形对应线段相等, 对应角相等;

(2) ①分别作 BB' 和 AA' 的垂直平分线, 两垂直平分线的交点即为所求点 O ; ②根据弧长公式求解即可;
问题拓展, 连接 PA' , 交 AC 于 M , 连接 PA , PD , AA' , 由旋转得 $\angle PA'B' = 30^\circ$, $PA = PA' = 4$,
在 $\text{Rt}\triangle PAM$ 和 $\text{Rt}\triangle A'DM$ 中求出 $A'M$ 和 DM 的长, 可以求出 $S_{\text{阴影部分} B'DP} = S_{\text{扇形} B'A'P} - S_{\triangle A'DP}$, 再证明 $\triangle ADP \cong \triangle A'DP$, 即可求出最后结果.

【详解】解: 【问题解决】

(1) 旋转前后的图形对应线段相等，对应角相等

(2) ①下图中，点 O 为所求



②连接 OB ， OB' ，

$\because$ 扇形纸板 ABC 绕点 O 逆时针旋转 90° 到达扇形纸板 $A'B'C'$ 的位置，

$$\therefore \angle BOB' = 90^\circ, \quad OB = OB',$$

$$\because BB' = 6\text{cm},$$

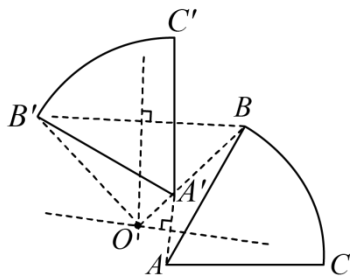
$$\text{设 } OB = OB' = x\text{cm},$$

$$\therefore x^2 + x^2 = 6^2,$$

$$\therefore OB = OB' = 3\sqrt{2}\text{cm},$$

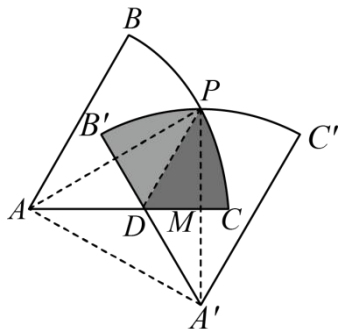
在旋转过程中，点 B 经过的路径长为以点 O 为圆心，圆心角为 90° ， OB 为半径的所对应的弧长，

$$\therefore \text{点 } B \text{ 经过的路径长} = \frac{90 \times \pi \times 3\sqrt{2}}{180} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi\text{cm};$$



【问题拓展】解：连接 PA' ，交 AC 于 M ，连接 PA ， PD ， AA' 如

图所示



$$\therefore \angle PAC = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ.$$

由旋转得 $\angle PA'B' = 30^\circ$, $PA = PA' = 4$.

在 $\text{Rt}\triangle PAM$ 中,

$$A'M = PM = PA \cdot \sin \angle PAM = 4 \times \sin 30^\circ = 2.$$

在 $\text{Rt}\triangle A'DM$ 中,

$$\therefore \angle DA'M = \frac{1}{2} \angle B'A'C' = 30^\circ,$$

$$\therefore A'D = \frac{A'M}{\cos \angle DA'M} = \frac{2}{\cos 30^\circ} = \frac{4}{3} \sqrt{3},$$

$$DM = \frac{1}{2} A'D = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \sqrt{3} = \frac{2}{3} \sqrt{3}.$$

$$\therefore S_{\triangle A'DP} = \frac{1}{2} DM \cdot A'D = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \sqrt{3} \times \frac{4}{3} \sqrt{3} = \frac{4}{3}.$$

$$S_{\text{扇形} B'A'P} = \frac{30 \times \pi \times 4^2}{360} = \frac{4}{3} \pi.$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分} B'DP} = S_{\text{扇形} B'A'P} - S_{\triangle A'DP} = \frac{4}{3} \pi - \frac{4}{3},$$

在 $\triangle ADP$ 和 $\triangle A'DP$ 中,

$$\therefore AD = AM - DM = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3} = A'D,$$

$$\text{又} \because \angle PAD = \angle PA'D = 30^\circ, \quad PA = PA',$$

$$\therefore \triangle ADP \cong \triangle A'DP.$$

$$\text{又} \because S_{\text{扇形} PAC} = S_{\text{扇形} B'A'P},$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分} B'DP} = S_{\text{阴影部分} CDP},$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = 2S_{\text{阴影部分} B'DP} = 2 \times \left(\frac{4}{3} \pi - \frac{4}{3} \right) = \left(\frac{8}{3} \pi - \frac{8}{3} \right) \text{cm}^2.$$

【点睛】 本题考查了旋转的性质，弧长公式，解直角三角形，三角形全等的性质与判定，解题的关键是抓住图形旋转前后的对应边相等，对应角相等，正确作出辅助线构造出直角三角形.

26. 已知 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 是抛物线 $C_1: y = -\frac{1}{4}x^2 + bx$ (b 为常数) 上的两点, 当 $x_1 + x_2 = 0$ 时, 总有 $y_1 = y_2$

(1) 求 b 的值;

(2) 将抛物线 C_1 平移后得到抛物线 $C_2: y = -\frac{1}{4}(x-m)^2 + 1 (m > 0)$.

探究下列问题:

①若抛物线 C_1 与抛物线 C_2 有一个交点, 求 m 的取值范围;

②设抛物线 C_2 与 x 轴交于 A, B 两点, 与 y 轴交于点 C , 抛物线 C_2 的顶点为点 E , $\triangle ABC$ 外接圆的圆心为点 F , 如果对抛物线 C_1 上的任意一点 P , 在抛物线 C_2 上总存在一点 Q , 使得点 P, Q 的纵坐标相等. 求 EF 长的取值范围.

【答案】(1) 0 (2) ① $2 \leq m \leq 2 + 2\sqrt{2}$ ② $\frac{7}{2} \leq EF \leq \frac{9}{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据 $y_1 = -\frac{1}{4}x_1^2 + bx_1, y_2 = -\frac{1}{4}x_2^2 + bx_2$, 且 $x_1 + x_2 = 0$ 时, 总有 $y_1 = y_2$, 变形后即可得到结论;

(2) 按照临界情形, 画出图象分情况讨论求解即可.

【小问 1 详解】

解: 由题可知: $y_1 = -\frac{1}{4}x_1^2 + bx_1, y_2 = -\frac{1}{4}x_2^2 + bx_2$

$\because x_1 + x_2 = 0$ 时, 总有 $y_1 = y_2$,

$$\therefore -\frac{1}{4}x_1^2 + bx_1 = -\frac{1}{4}x_2^2 + bx_2.$$

$$\text{则 } \frac{1}{4}(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) - b(x_2 - x_1) = 0,$$

$$\therefore (x_2 - x_1) \left[\frac{1}{4}(x_2 + x_1) - b \right] = 0,$$

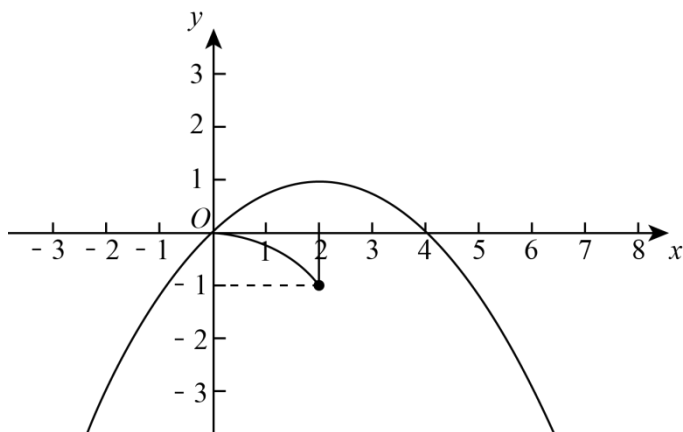
$$\therefore -b(x_2 - x_1) = 0 \text{ 总成立, 且 } x_2 - x_1 \neq 0,$$

$$\therefore b = 0;$$

【小问 2 详解】

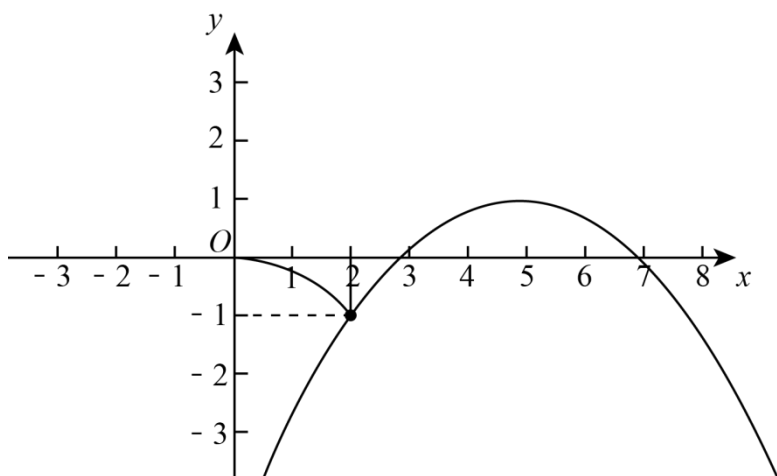
①注意到抛物线 C_2 最大值和开口大小不变, m 只影响图象左右平移下面考虑满足题意的两种临界情形:

(i) 当抛物线 C_2 过点 $(0,0)$ 时, 如图所示,



此时, $x=0, y=-\frac{1}{4}m^2+1=0$, 解得 $m=2$ 或 -2 (舍).

(ii) 当抛物线 C_2 过点 $(2, -1)$ 时, 如图所示,



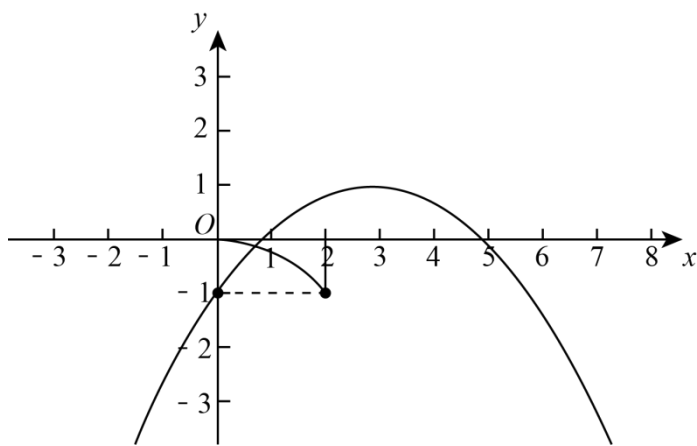
此时, $x=2, y=-\frac{1}{4}(m-2)^2+1=-1$,

解得 $m=2+2\sqrt{2}$ 或 $2-2\sqrt{2}$ (舍),

综上, $2 \leq m \leq 2+2\sqrt{2}$,

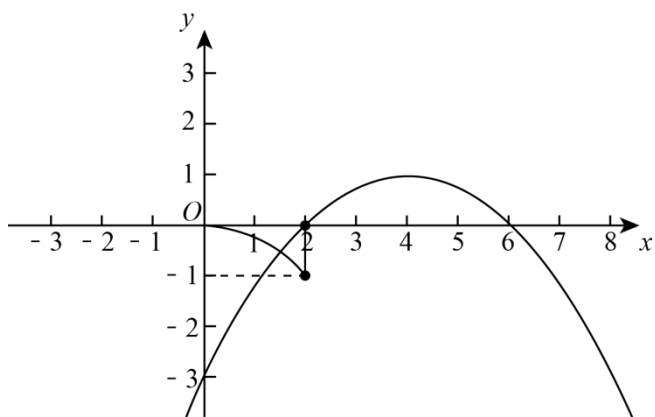
②同①考虑满足题意的两种临界情形:

(i) 当抛物线 C_2 过点 $(0, -1)$ 时, 如图所示,



此时, $x=0, y=-\frac{1}{4}m^2+1=-1$, 解得 $m=2\sqrt{2}$ 或 $-2\sqrt{2}$ (舍).

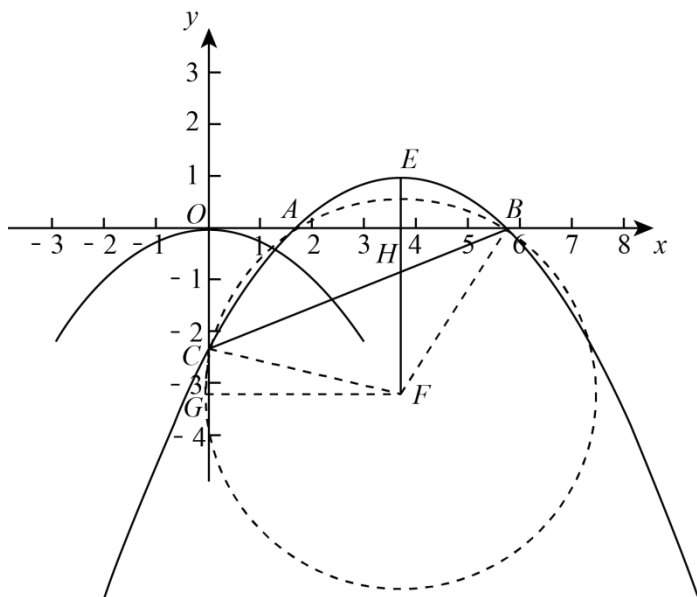
(ii) 当抛物线 C_2 过点 $(2, 0)$ 时, 如图所示,



此时, $x=2, y=-\frac{1}{4}(2-m)^2+1=0$, 解得 $m=4$ 或 0 (舍).

综上 $2\sqrt{2} \leq m \leq 4$,

如图, 由圆的性质可知, 点 E 、 F 在线段 AB 的垂直平分线上.



令 $y=-\frac{1}{4}(x-m)^2+1=0$, 解得 $x_A=m-2, x_B=m+2$,

$\therefore HB=m+2-m=2$,

$\because FB=FC$,

$\therefore FH^2+HB^2=FG^2+GC^2$,

设 $FH=t$,

$\therefore t^2+2^2=\left(\frac{m^2}{4}-1-t\right)^2+m^2$,

$\therefore \left(\frac{m^2}{4}-1\right)^2-2\left(\frac{m^2}{4}-1\right)t+m^2-4=0$,

$$\therefore \left(\frac{m^2}{4} - 1\right)\left(\frac{m^2}{4} - 2t + 3\right) = 0,$$

$$\therefore m \geq 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{m^2}{4} - 1 \neq 0,$$

$$\therefore \frac{m^2}{4} - 2t + 3 = 0, \text{ 即 } t = \frac{m^2}{8} + \frac{3}{2},$$

$$\therefore 2\sqrt{2} \leq m \leq 4.$$

$$\therefore \frac{5}{2} \leq t \leq \frac{7}{2}, \text{ 即 } \frac{5}{2} \leq FH \leq \frac{7}{2},$$

$$\therefore EF = FH + 1,$$

$$\therefore \frac{7}{2} \leq EF \leq \frac{9}{2}$$

【点睛】此题考查了二次函数的图象和性质、垂径定理、解一元二次方程等知识，数形结合和分类讨论是解题的关键.

