

2023 年长春市初中学业水平考试

数学

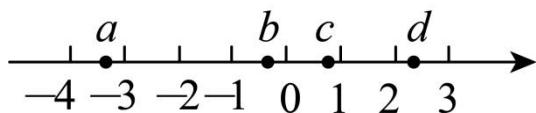
本试卷包括三道大题，共 24 道小题，共 6 页。全卷满分 20 分。考试时间为 120 分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名，准考证号填写在答题卡上，并将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时，考生务必按照考试要求在答题卡上的指定区域内作答，在草稿纸、试卷上答题无效。

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. 实数 a 、 b 、 c 、 d 在数轴上对应点位置如图所示，这四个数中绝对值最小的是（ ）



- A. a B. b C. c D. d

【答案】B

【解析】

【分析】根据绝对值的意义即可判断出绝对值最小的数。

【详解】解：由图可知， $|a| > 3$ ， $0 < |b| < 1$ ， $0 < |c| < 1$ ， $2 < |d| < 3$ ，

比较四个数的绝对值排除 a 和 d ，

根据绝对值的意义观察图形可知， c 离原点的距离大于 b 离原点的距离，

$$\therefore |b| < |c|,$$

$\therefore$ 这四个数中绝对值最小的是 b 。

故选：B。

【点睛】本题考查了绝对值的意义，解题的关键在于熟练掌握绝对值的意义，绝对值是指一个数在数轴上所对应点到原点的距离，离原点越近说明绝对值越小。

2. 长春龙嘉国际机场 T3A 航站楼设计创意为“鹤舞长春”，如图所示，航站楼的造型如仙鹤飞翔，蕴含了对吉春大地未来发展的美好愿景。本期工程按照满足 2030 年旅客吞吐量 38000000 人次目标设计的，其中 38000000 这个数用科学记数法表示为（ ）



- A. 0.38×10^8 B. 3.8×10^6 C. 3.8×10^8 D. 3.8×10^7

【答案】D

【解析】

【分析】根据科学记数法公式转换即可，科学记数法公式为： $a \times 10^n$ ， $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数的位数减 1.

【详解】解： $38000000 = 3.8 \times 10^7$ ，

故选：D.

【点睛】本题考查了科学记数法；解题的关键是熟练掌握科学记数法的定义.

3. 下列运算正确的是 ()

- A. $a^3 - a^2 = a$ B. $a^2 \cdot a = a^3$ C. $(a^2)^3 = a^5$ D. $a^6 \div a^2 = a^3$

【答案】B

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方，合并同类项，逐项分析判断即可求解.

【详解】A. a^3 与 a^2 不能合并，故该选项不正确，不符合题意；

B. $a^2 \cdot a = a^3$ ，故该选项正确，符合题意；

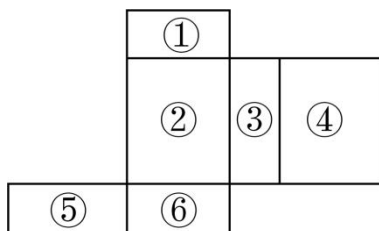
C. $(a^2)^3 = a^6$ ，故该选项不正确，不符合题意；

D. $a^6 \div a^2 = a^4$ ，故该选项不正确，不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查了同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方，合并同类项，熟练掌握以上运算法则是解题的关键.

4. 下图是一个多面体的表面展开图，每个面都标注了数字. 若多面体的底面是面③，则多面体的上面是 ()



- A. 面① B. 面② C. 面⑤ D. 面⑥

【答案】C

【解析】

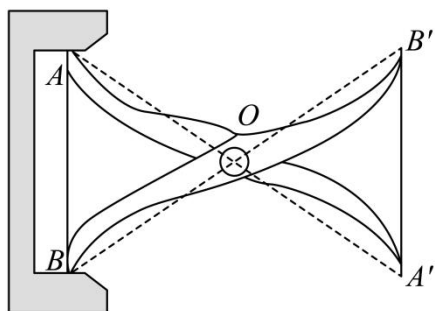
【分析】根据底面与多面体的上面是相对面，则形状相等，间隔 1 个长方形，且没有公共顶点，即可求解.

【详解】解：依题意，多面体的底面是面③，则多面体的上面是面⑤，

故选：C.

【点睛】本题考查了长方体的表面展开图，熟练掌握基本几何体的展开图是解题的关键.

5. 如图，工人师傅设计了一种测零件内径 AB 的卡钳，卡钳交叉点 O 为 AA' 、 BB' 的中点，只要量出 $A'B'$ 的长度，就可以知道该零件内径 AB 的长度. 依据的数学基本事实是 ()



- A. 两边及其夹角分别相等的两个三角形全等 B. 两角及其夹边分别相等的两个三角形全等
C. 两余直线被一组平行线所截，所对应线段成比例 D. 两点之间线段最短

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意易证 $\triangle AOB \cong \triangle A'OB'$ (SAS)，根据证明方法即可求解.

【详解】解：O 为 AA' 、 BB' 的中点，

$$\therefore OA = OA', \quad OB = OB',$$

$$\because \angle AOB = \angle A'OB' \quad (\text{对顶角相等}),$$

$\therefore$ 在 $\triangle AOB$ 与 $\triangle A'OB'$ 中，

$$\begin{cases} OA = OA' \\ \angle AOB = \angle A'OB', \\ OB = OB \end{cases}$$

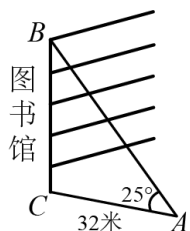
$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle A'OB' (\text{SAS}),$$

$$\therefore AB = A'B',$$

故选：A.

【点睛】本题考查了全等三角形的证明，正确使用全等三角形的证明方法是解题的关键.

6. 学校开放日即将来临，负责布置的林老师打算从学校图书馆的顶楼拉出一条彩旗绳 AB 到地面，如图所示. 已彩旗绳与地面形成 25° 角（即 $\angle BAC = 25^\circ$ ）、彩旗绳固定在地面的位置与图书馆相距 32 米（即 $AC = 32$ 米），则彩旗绳 AB 的长度为（ ）



- A. $32 \sin 25^\circ$ 米 B. $32 \cos 25^\circ$ 米 C. $\frac{32}{\sin 25^\circ}$ 米 D. $\frac{32}{\cos 25^\circ}$ 米

【答案】D

【解析】

【分析】根据余弦值的概念即邻边与斜边之比，即可求出答案.

【详解】解： $\because AC$ 表示的是地面， BC 表示是图书馆，

$$\therefore AC \perp BC,$$

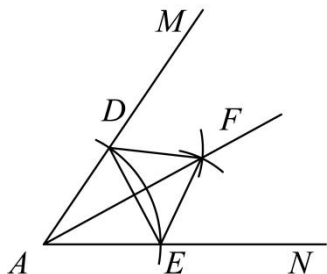
$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形，

$$\therefore AB = \frac{AC}{\cos 25^\circ} = \frac{32}{\cos 25^\circ} \text{ (米)}.$$

故选：D.

【点睛】本题考查的是解直角三角形的应用，涉及到余弦值，解题的关键在于熟练掌握余弦值的概念.

7. 如图，用直尺和圆规作 $\angle MAN$ 的角平分线，根据作图痕迹，下列结论不一定正确的是（ ）



- A. $AD = AE$ B. $AD = DF$ C. $DF = EF$ D. $AF \perp DE$

【答案】B

【解析】

【分析】根据作图可得 $AD = AE, DF = EF$ ，进而逐项分析判断即可求解.

【详解】解：根据作图可得 $AD = AE, DF = EF$ ，故 A，C 正确；

$\therefore A, F$ 在 DE 的垂直平分线上，

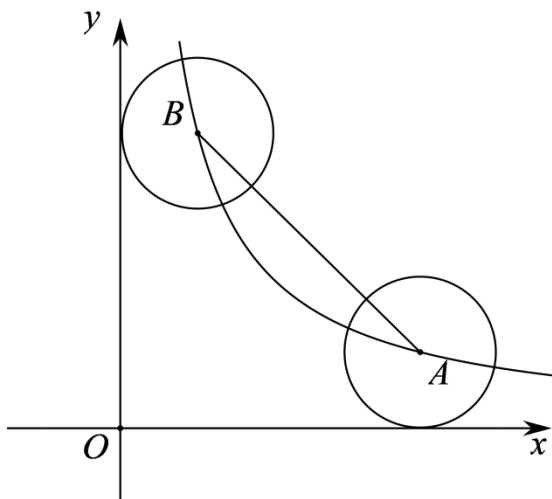
$\therefore AF \perp DE$ ，故 D 选项正确，

而 $DF = EF$ 不一定成立，故 B 选项错误，

故选：B.

【点睛】本题考查了作角平分线，垂直平分线的判定，熟练掌握基本作图是解题的关键.

8. 如图，在平面直角坐标系中，点 A、B 在函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 的图象上，分别以 A、B 为圆心，1 为半径作圆，当 $\odot A$ 与 x 轴相切、 $\odot B$ 与 y 轴相切时，连结 AB ， $AB = 3\sqrt{2}$ ，则 k 的值为 ()



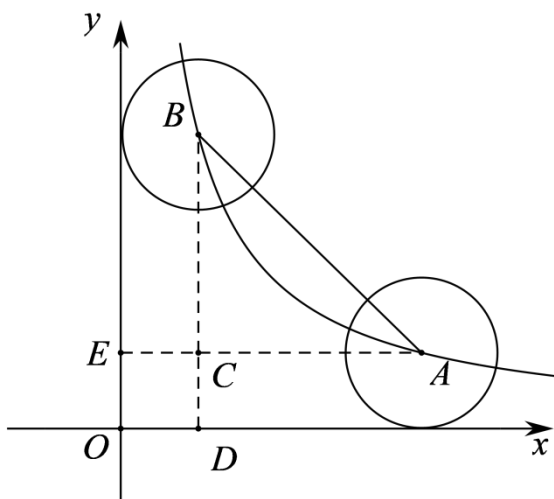
- A. 3 B. $3\sqrt{2}$ C. 4 D. 6

【答案】C

【解析】

【分析】过点 A、B 分别作 y, x 轴的垂线，垂足分别为 E, D ， AE, BD 交于点 C ，得出 B 的横坐标为 1，A 的纵坐标为 1，设 $A(k, 1)$ ， $B(1, k)$ ，则 $AC = k - 1, BC = k - 1$ ，根据 $AB = 3\sqrt{2}$ ，即可求解.

【详解】解：如图所示，过点 A、B 分别作 y, x 轴的垂线，垂足分别为 E, D ， AE, BD 交于点 C ，



依题意， B 的横坐标为 1， A 的纵坐标为 1，设 $A(k, 1)$ ， $B(1, k)$

$\therefore C(1, 1)$,

则 $AC = k - 1$, $BC = k - 1$,

又 $\because \angle ACB = 90^\circ$, $AB = 3\sqrt{2}$,

$$\therefore (k-1)^2 + (k-1)^2 = (3\sqrt{2})^2$$

$\therefore k-1=3$ (负值已舍去)

解得: $k=4$,

故选: C.

【点睛】本题考查了切线的性质，反比例函数的性质，勾股定理，掌握以上知识是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 8 分)

9. 分解因式: $a^2 - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(a+1)(a-1)$.

【解析】

【分析】利用平方差公式分解因式即可得到答案

【详解】解: $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$.

故答案为: $(a+1)(a-1)$

【点睛】本题考查的是利用平方差公式分解因式，掌握利用平方差公式分解因式是解题的关键.

10. 若关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < 1$

【解析】

【分析】 根据根的判别式求出 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times m = 4 - 4m > 0$ ，再求出不等式的解集即可.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times m = 4 - 4m > 0$$

解得： $m < 1$ ，

故答案为： $m < 1$.

【点睛】 本题考查了根的判别式和解一元一次不等式，解题的关键是能熟记根的判别式的内容是解此题的关键，注意：已知一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 为常数， $a \neq 0$)，①当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根，②当 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时，方程有两个相等的实数根，③当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时，方程没有实数根.

11. 2023 长春马拉松于 5 月 21 日在南岭体育场鸣枪开跑，某同学参加了 7.5 公里健康跑项目，他从起点开始以平均每分钟 x 公里的速度跑了 10 分钟，此时他离健康跑终点的路程为_____公里. (用含 x 的代数式表示)

【答案】 $(7.5 - 10x)$

【解析】

【分析】 根据题意列出代数式即可.

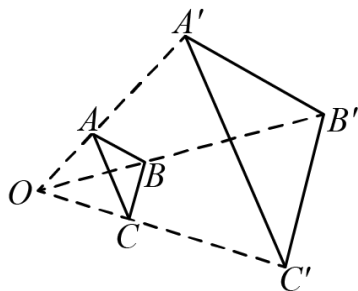
【详解】 根据题意可得，

他离健康跑终点的路程为 $(7.5 - 10x)$.

故答案为： $(7.5 - 10x)$.

【点睛】 此题考查了列代数式，解题的关键是读懂题意.

12. 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是以点 O 为位似中心的位似图形，点 A 在线段 OA' 上. 若 $OA : AA' = 1 : 2$ ，则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的周长之比为_____.



【答案】 1:3

【解析】

【分析】 根据位似图形的性质即可求出答案.

【详解】 解: $\because OA:AA'=1:2$,

$$\therefore OA:OA'=1:3,$$

设 $\triangle ABC$ 周长为 l_1 , 设 $\triangle A'B'C'$ 周长为 l_2 ,

$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是以点 O 为位似中心的位似图形,

$$\therefore \frac{l_1}{l_2} = \frac{OA}{OA'} = \frac{1}{3}.$$

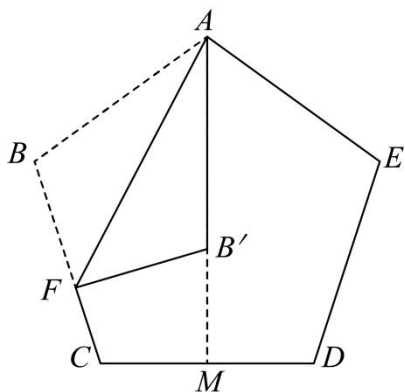
$$\therefore l_1:l_2=1:3.$$

$\therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的周长之比为 1:3.

故答案为: 1:3.

【点睛】 本题考查了位似图形的性质, 解题的关键在于熟练掌握位似图形性质.

13. 如图, 将正五边形纸片 $ABCDE$ 折叠, 使点 B 与点 E 重合, 折痕为 AM , 展开后, 再将纸片折叠, 使边 AB 落在线段 AM 上, 点 B 的对应点为点 B' , 折痕为 AF , 则 $\angle AFB'$ 的大小为 _____ 度.



【答案】 45

【解析】

【分析】根据题意求得正五边形的每一个内角为 $\frac{1}{5}(5-2) \times 180^\circ = 108^\circ$ ，根据折叠的性质求得

$\angle BAM, \angle FAB'$ ，在 $\triangle AFB'$ 中，根据三角形内角和定理即可求解。

【详解】解：∵ 正五边形的每一个内角为 $\frac{1}{5}(5-2) \times 180^\circ = 108^\circ$ ，

将正五边形纸片 $ABCDE$ 折叠，使点 B 与点 E 重合，折痕为 AM ，

$$\text{则 } \angle BAM = \frac{1}{2} \angle BAE = \frac{1}{2} \times 108^\circ = 54^\circ,$$

∴ 将纸片折叠，使边 AB 落在线段 AM 上，点 B 的对应点为点 B' ，折痕为 AF ，

$$\therefore \angle FAB' = \frac{1}{2} \angle BAM = \frac{1}{2} \times 54^\circ = 27^\circ, \quad \angle AB'F = \angle B = 108^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle AFB' \text{ 中, } \angle AFB' = 180^\circ - \angle B - \angle FAB' = 180^\circ - 108^\circ - 27^\circ = 45^\circ,$$

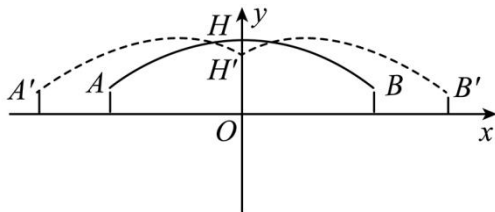
故答案为：45。

【点睛】本题考查了折叠的性质，正多边形的内角和的应用，熟练掌握折叠的性质是解题的关键。

14. 2023年5月8日，C919商业首航完成——中国民商业运营国产大飞机正式起步。12时31分航班抵达北京首都机场，穿过隆重的“水门礼”（寓意“接风洗尘”、是国际民航中高级别的礼仪）。如图①，在一次“水门礼”的预演中，两辆消防车面向飞机喷射水柱，喷射的两条水柱近似看作形状相同的地物线的一部分。如图②，当两辆消防车喷水口 A 、 B 的水平距离为80米时，两条水柱在物线的顶点 H 处相遇，此时相遇点 H 距地面20米，喷水口 A 、 B 距地面均为4米。若两辆消防车同时后退10米，两条水柱的形状及喷水口 A' 、 B' 到地面的距离均保持不变，则此时两条水柱相遇点 H' 距地面_____米。



图①



图②

【答案】19

【解析】

【分析】根据题意求出原来抛物线的解析式，从而求得平移后的抛物线解析式，再令 $x=0$ 求平移后的抛物线与 y 轴的交点即可。

【详解】解：由题意可知：

$$A(-40, 4)、B(40, 4)、H(0, 20),$$

设抛物线解析式为： $y = ax^2 + 20$ ，

将 $A(-40, 4)$ 代入解析式 $y = ax^2 + 20$,

$$\text{解得: } a = -\frac{1}{100},$$

$$\therefore y = -\frac{x^2}{100} + 20,$$

消防车同时后退10米, 即抛物线 $y = -\frac{x^2}{100} + 20$ 向左 (右) 平移10米,

$$\text{平移后的抛物线解析式为: } y = -\frac{(x+10)^2}{100} + 20,$$

令 $x = 0$, 解得: $y = 19$,

故答案为: 19.

【点睛】本题考查了待定系数法求抛物线解析式、函数图像的平移及坐标轴的交点; 解题的关键是求得移动前后抛物线的解析式.

三、解答题 (本大题共 10 小题, 共 78 分)

15. 先化简. 再求值: $(a+1)^2 + a(1-a)$, 其中 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

【答案】 $3a+1$; $\sqrt{3}+1$

【解析】

【分析】根据完全平方公式以及单项式乘以单项式进行化简, 然后将字母的值代入进行计算即可求解.

【详解】解: $(a+1)^2 + a(1-a)$

$$= a^2 + 2a + 1 + a - a^2$$

$$= 3a + 1$$

$$\text{当 } a = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 时, 原式} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 = \sqrt{3} + 1$$

【点睛】本题考查了整式乘法的化简求值, 实数的混合运算, 熟练掌握完全平方公式以及单项式乘以单项式的运算法则是解题的关键.

16. 班级联欢会上有一个抽奖活动, 每位同学均参加一次抽奖, 活动规则下: 将三个完全相同的不透明纸杯倒置放在桌面上, 每个杯子内放入一个彩蛋, 彩蛋颜色分别为红色、红色、绿色. 参加活动的同学先从中随机选中一个杯子, 记录杯内彩蛋颜色后再将杯子倒置于桌面, 重新打乱杯子的摆放位置, 再从中随机选中一个杯子, 记录杯内彩蛋颜色. 若两次选中的彩蛋颜色不同则获一等奖, 颜色相同则获二等奖. 用画树

状图（或列表）的方法，求某同学获一等奖的概率．

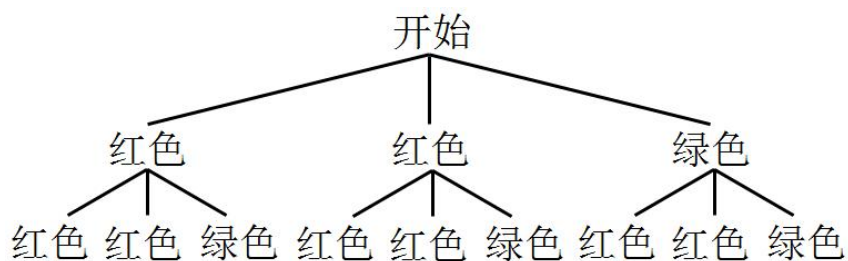


【答案】 $\frac{4}{9}$

【解析】

【分析】依题意画出树状图，运用概率公式求解即可．

【详解】解：画树状图如下：



共有9种可能，获一等奖即两次颜色不相同的可能有4种，

则某同学获一等奖的概率为： $\frac{4}{9}$ ，

答：某同学获一等奖的概率为 $\frac{4}{9}$ ．

【点睛】本题考查了树状图求概率，正确画出树状图是解题的关键．

17. 随着中国网民规模突破10亿、博物馆美育不断向线上拓展，敦煌研究院顺势推出数字敦煌文化大使“伽瑶”，受到广大敦煌文化爱好者的好评．某工厂计划制作3000个“伽瑶”玩偶摆件，为了尽快完成任务，实际平均每天完成的数量是原计划的1.5倍，结果提前5天完成任务．问原计划平均每天制作多少个摆件？



【答案】原计划平均每天制作 200 个摆件.

【解析】

【分析】设原计划平均每天制作 x 个, 根据题意列出方程, 解方程即可求解.

【详解】解: 设原计划平均每天制作 x 个, 根据题意得,

$$\frac{3000}{x} = \frac{3000}{1.5x} + 5$$

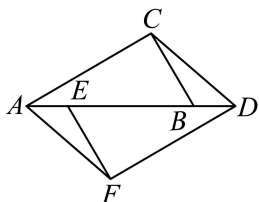
解得: $x = 200$

经检验, $x = 200$ 是原方程的解, 且符合题意,

答: 原计划平均每天制作 200 个摆件.

【点睛】本题考查了分式方程的应用, 根据题意列出方程是解题的关键.

18. 将两个完全相同的含有 30° 角的直角三角板在同一平面内按如图所示位置摆放. 点 A, E, B, D 依次在同一直线上, 连结 AF, CD .



(1) 求证: 四边形 $AFDC$ 是平行四边形;

(2) 已知 $BC = 6\text{cm}$, 当四边形 $AFDC$ 是菱形时, AD 的长为 _____ cm .

【答案】(1) 见解析;

(2) 18

【解析】

【分析】(1) 由题意可知 $\triangle ACB \cong \triangle DFE$ 易得 $AC = DF$, $\angle CAB = \angle FDE = 30^\circ$ 即 $AC \parallel DF$, 依据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形可证明;

(2) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, 由 30° 角所对的直角边等于斜边的一半和直角三角形锐角互余易得 $AB = 2BC = 12\text{cm}$, $\angle ABC = 60^\circ$; 由菱形得对角线平分对角得 $\angle CDA = \angle FDA = 30^\circ$, 再由三角形外角和易证 $\angle BCD = \angle CDA$ 即可得 $BC = BD = 6\text{cm}$, 最后由 $AD = AB + BD$ 求解即可.

【小问 1 详解】

证明: 由题意可知 $\triangle ACB \cong \triangle DFE$,

$\therefore AC = DF$, $\angle CAB = \angle FDE = 30^\circ$,

$\therefore AC \parallel DF$,

$\therefore$ 四边形 $AFDC$ 地平行四边形;

【小问 2 详解】

如图，在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle CAB = 30^\circ$ ， $BC = 6\text{cm}$ ，

$\therefore AB = 2BC = 12\text{cm}$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

四边形 $AFDC$ 是菱形，

$\therefore AD$ 平分 $\angle CDF$ ，

$\therefore \angle CDA = \angle FDA = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle CDA + \angle BCD$ ，

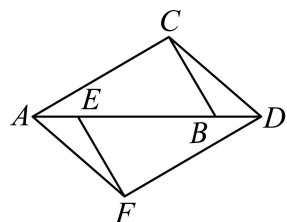
$\therefore \angle BCD = \angle ABC - \angle CDA = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle BCD = \angle CDA$ ，

$\therefore BC = BD = 6\text{cm}$ ，

$\therefore AD = AB + BD = 18\text{cm}$ ，

故答案为：18.



【点睛】本题考查了全等三角形的性质，平行四边形的判定，菱形的性质， 30° 角

所对的直角边等于斜边的一半和直角三角形锐角互余，三角形外角及等角对等边；解题的关键是熟练掌握相关知识综合求解.

19. 近年来，肥胖经成为影响人们身体健康的重要因素. 目前，国际上常用身体质量指数（Body Mass Index，缩写 BMI）来衡量人体胖瘦程度以及是否健康，其计算公式是

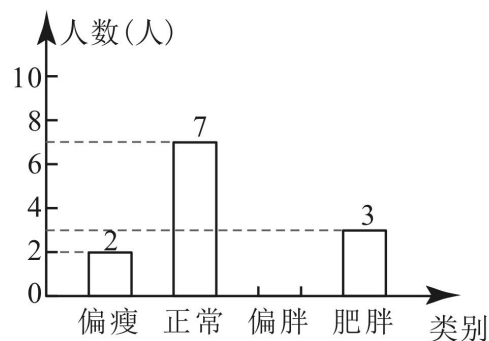
$$\text{BMI} = \frac{\text{体重 (单位: kg)}}{\text{身高}^2 (\text{位置: m}^2)}$$

例如：某人身高 1.60m ，体重 60kg ，则他的 $\text{BMI} = \frac{60}{1.60^2} \approx 23.4$.

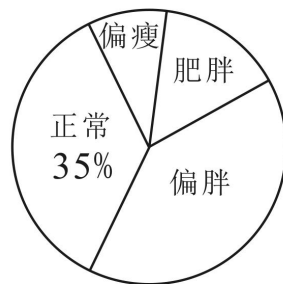
中国成人的 BMI 数值标准为：BMI < 18.5 为偏瘦； $18.5 \leq \text{BMI} < 24$ 为正常； $24 \leq \text{BMI} < 28$ 为肥胖； $\text{BMI} \geq 28$ 为肥胖.

某公司为了了解员工的健康情况，随机抽取了一部分员工的体检数据，通过计算得到他们的 BMI 值并绘制了如下两幅不完整的统计图.

抽取的员工胖瘦程度的条形统计图



抽取的员工胖瘦程度的扇形统计图



根据以上信息回答下列问题：

- (1) 补全条形统计图；
- (2) 请估计该公司 200 名员工中属于偏胖和肥胖的总人数；
- (3) 基于上述统计结果，公司建议每个人制定健身计划。员工小张身高 1.70m，BMI 值为 27，他想通过健身减重使自己的 BMI 值达到正常，则他的体重至少需要减掉_____kg。（结果精确到 1kg）

【答案】(1) 见解析 (2) 110 人

(3) 9

【解析】

【分析】(1) 根据属于正常的人数除以占比得出抽取的人数，结合条形统计图求得属于偏胖的人数，进而补全统计图即可求解；

(2) 用属于偏胖和肥胖的占比乘以 200 即可求解；

(3) 设小张体重需要减掉 x kg，根据 BMI 计算公式，列出不等式，解不等式即可求解。

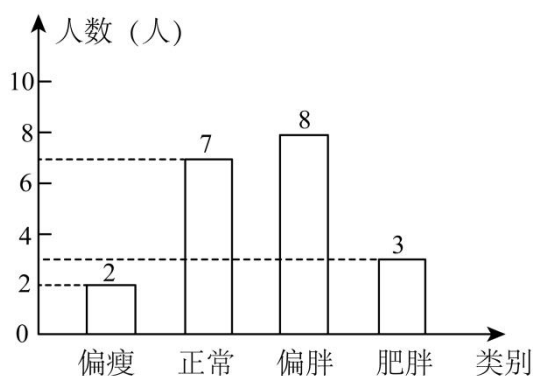
【小问 1 详解】

抽取了 $7 \div 35\% = 20$ 人，

属于偏胖的人数为： $20 - 2 - 7 - 3 = 8$ ，

补全统计图如图所示，

抽取的员工胖瘦程度的条形统计图



【小问 2 详解】

$$200 \times \frac{8+3}{20} = 110 \text{ (人)}$$

【小问3详解】

设小张体重需要减掉 $x\text{kg}$,

$$\text{依题意, } 27 - \frac{x}{1.70^2} < 24$$

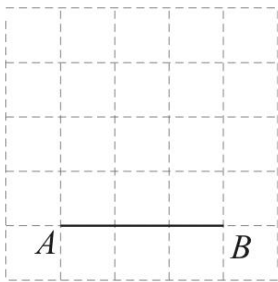
解得: $x > 8.67$,

答: 他的体重至少需要减掉 9kg ,

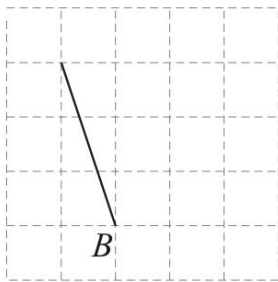
故答案为: 9.

【点睛】本题考查了条形统计图与扇形统计图信息关联, 样本估计总体, 一元一次不等式的应用, 根据统计图表获取信息是解题的关键.

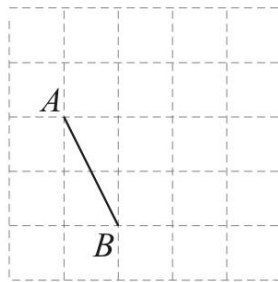
20. 图①、图②、图③均是 5×5 的正方形网格, 每个小正方形的边长均为 1, 每个小正方形的顶点称为格点. 点 A 、 B 均在格点上, 只用无刻度的直尺, 分别在给定的网格中按下列要求作 $\triangle ABC$, 点 C 在格点上.



图①



图②



图③

- (1) 在图①中, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{9}{2}$;
- (2) 在图②中, $\triangle ABC$ 的面积为 5
- (3) 在图③中, $\triangle ABC$ 是面积为 $\frac{5}{2}$ 的钝角三角形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 见解析

【解析】

【分析】(1) 以 $AB=3$ 为底, 设 AB 边上的高为 h , 依题意得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{9}{2}$, 解得 $h=3$, 即点 C 在 AB 上方且到 AB 距离为 3 个单位的线段上的格点即可;

(2) 由网格可知, $AB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, 以 $AB = \sqrt{10}$ 为底, 设 AB 边上的高为 h , 依题意得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h = 5$, 解得 $h = \sqrt{10}$, 将 AB 绕 A 或 B 旋转 90° , 过线段的另一个端点作 AB 的平行线, 与网格格点的交点即为点 C ;

(3) 作 $BD = AB = \sqrt{5}$ ，过点 D 作 $CD \parallel AB$ ，交于格点 C ，连接 A 、 B 、 C 即可。

【小问 1 详解】

解：如图所示，

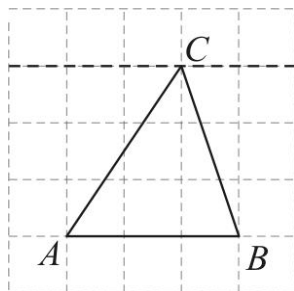
以 $AB = 3$ 为底，设 AB 边上的高为 h ，

$$\text{依题意得：} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{9}{2}$$

解得： $h = 3$

即点 C 在 AB 上方且到 AB 距离为 3 个单位的线段上的格点即可，

答案不唯一；



【小问 2 详解】

由网格可知，

$$AB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

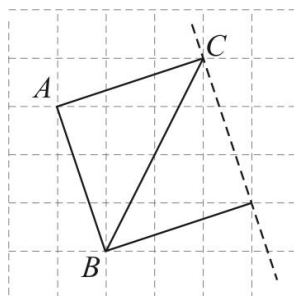
以 $AB = \sqrt{10}$ 为底，设 AB 边上的高为 h ，

$$\text{依题意得：} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h = 5$$

解得： $h = \sqrt{10}$

将 AB 绕 A 或 B 旋转 90° ，过线段的另一个端点作 AB 的平行线，与网格格点的交点即为点 C ，

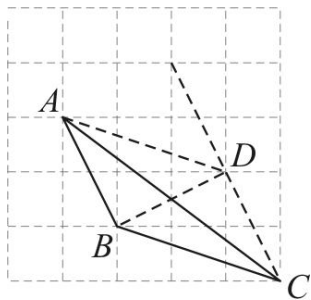
答案不唯一，



【小问 3 详解】

如图所示，

作 $BD = AB = \sqrt{5}$ ，过点 D 作 $CD \parallel AB$ ，交于格点 C ，



图③

由网格可知,

$$BD = AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \quad AD = \sqrt{10},$$

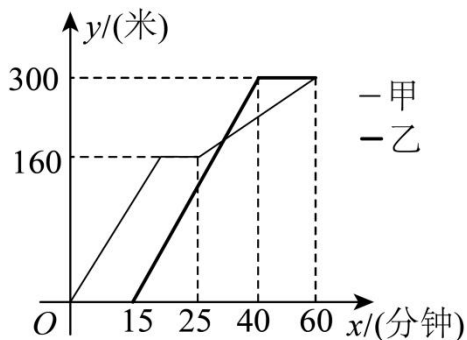
$\therefore \triangle ABD$ 是直角三角形, 且 $AB \perp BD$

$\therefore CD \parallel AB$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BD = \frac{5}{2}.$$

【点睛】 本题考查了网格作图, 勾股定理求线段长度, 与三角形的高的有关计算; 解题的关键是熟练利用网格作平行线或垂直.

21. 甲、乙两个相约登山, 他们同时从入口处出发, 甲步行登山到山顶, 乙先步行 15 分钟到缆车站, 再乘坐缆车到达山顶. 甲、乙距山脚的垂直高度 y (米) 与甲登山的时间 x (分钟) 之间的函数图象如图所示.



(1) 当 $15 \leq x \leq 40$ 时, 求乙距山脚的垂直高度 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 求乙乘坐缆车上升过程中, 和甲处于同一高度时距山脚的垂直高度.

【答案】 (1) $y = 12x - 180$

(2) 180

【解析】

【分析】 (1) 待定系数法求解析式即可求解;

(2) 求得甲距山脚的垂直高度 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = 4x + 60$ ($25 \leq x \leq 60$), 联立 $y = 12x - 180$ ($15 \leq x \leq 40$), 即可求解.

【小问 1 详解】

解：设乙距山脚的垂直高度 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = kx + b$ ，将 $(15, 0)$ ， $(40, 300)$ 代入得，

$$\begin{cases} 15k + b = 0 \\ 40k + b = 300 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} k = 12 \\ b = -180 \end{cases}$,

$$\therefore y = 12x - 180 \quad (15 \leq x \leq 40);$$

【小问 2 详解】

设甲距山脚的垂直高度 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = k_1x + b_1$ ($25 \leq x \leq 60$)

将点 $(25, 160)$ ， $(60, 300)$ 代入得，

$$\begin{cases} 25k_1 + b_1 = 160 \\ 60k_1 + b_1 = 300 \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} k_1 = 4 \\ b_1 = 60 \end{cases}$,

$$\therefore y = 4x + 60 \quad (25 \leq x \leq 60);$$

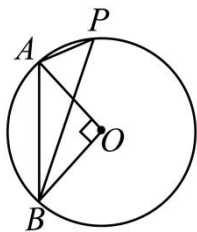
联立 $\begin{cases} y = 12x - 180 \\ y = 4x + 60 \end{cases}$

解得： $\begin{cases} x = 30 \\ y = 180 \end{cases}$

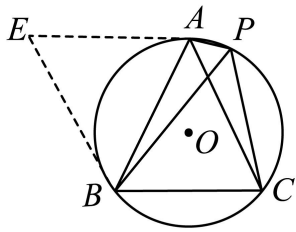
$\therefore$ 乙乘坐缆车上升过程中，和甲处于同一高度时距山脚的垂直高度为 180 米

【点睛】 本题考查了一次函数的应用，熟练掌握待定系数法求解析式是解题的关键.

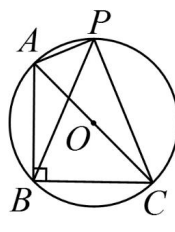
22. 【感知】如图①，点 A 、 B 、 P 均在 $\odot O$ 上， $\angle AOB = 90^\circ$ ，则锐角 $\angle APB$ 的大小为_____度.



图①



图②



图③

【探究】小明遇到这样一个问题：如图②， $\odot O$ 是等边三角形 ABC 的外接圆，点 P 在 $\widehat{AC}$ 上（点 P 不与点 A 、 C 重合），连结 PA 、 PB 、 PC 。求证： $PB = PA + PC$ 。小明发现，延长 PA 至点 E ，使 $AE = PC$ ，连结 BE ，通过证明 $\triangle PBC \cong \triangle EBA$ ，可推得 PBE 是等边三角形，进而得证。

下面是小明的部分证明过程：

证明：延长 PA 至点 E ，使 $AE = PC$ ，连结 BE ，

$\because$ 四边形 $ABCP$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，

$$\therefore \angle BAP + \angle BCP = 180^\circ.$$

$$\because \angle BAP + \angle BAE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BCP = \angle BAE.$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形.

$$\therefore BA = BC,$$

$$\therefore \triangle PBC \cong \triangle EBA (\text{SAS})$$

请你补全余下的证明过程.

【应用】如图③， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = BC$ ，点 P 在 $\odot O$ 上，且点 P 与点 B 在 AC 的两侧，连结 PA 、 PB 、 PC 。若 $PB = 2\sqrt{2}PA$ ，则 $\frac{PB}{PC}$ 的值为_____.

【答案】感知：45；探究：见解析；应用： $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。

【解析】

【分析】感知：由圆周角定理即可求解；

探究：延长 PA 至点 E ，使 $AE = PC$ ，连结 BE ，通过证明 $\triangle PBC \cong \triangle EBA (\text{SAS})$ ，可推得 PBE 是等边三角形，进而得证；

应用：延长 PA 至点 E ，使 $AE = PC$ ，连结 BE ，通过证明 $\triangle PBC \cong \triangle EBA (\text{SAS})$ 得，可推得 PBE 是等腰直角三角形，结合 $PE = PA + PC$ 与 $PE = \sqrt{2}PB$ 可得 $PC = 3PA$ ，代入 $\frac{PB}{PC}$ 即可求解。

【详解】感知：

由圆周角定理可得 $\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB = 45^\circ$ ，

故答案为：45；

探究：

证明：延长 PA 至点 E ，使 $AE = PC$ ，连结 BE ，

$\because$ 四边形 $ABCP$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，

$$\therefore \angle BAP + \angle BCP = 180^\circ.$$

$$\because \angle BAP + \angle BAE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BCP = \angle BAE .$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形.

$$\therefore BA = BC ,$$

$$\therefore \triangle PBC \cong \triangle EBA (\text{SAS}),$$

$$\therefore PB = EB , \quad \angle PBC = \angle EBA ,$$

$$\therefore \angle EBA + \angle ABP = \angle PBC + \angle ABP = \angle ABC = 60^\circ ,$$

$\therefore \triangle PBE$ 是等边三角形,

$$\therefore PB = PE ,$$

$$\therefore PB = PE = PA + AE = PA + PC ,$$

即 $PB = PA + PC$;

应用:

延长 PA 至点 E , 使 $AE = PC$, 连结 BE ,

$\because$ 四边形 $ABCP$ 是 $\odot O$ 的内接四边形,

$$\therefore \angle BAP + \angle BCP = 180^\circ .$$

$$\because \angle BAP + \angle BAE = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle BCP = \angle BAE .$$

$$\because AB = CB ,$$

$$\therefore \triangle PBC \cong \triangle EBA (\text{SAS}),$$

$$\therefore PB = EB , \quad \angle PBC = \angle EBA ,$$

$$\therefore \angle EBA + \angle ABP = \angle PBC + \angle ABP = \angle ABC = 90^\circ ,$$

$\therefore \triangle PBE$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore PB^2 + BE^2 = PE^2 ,$$

$$\therefore 2PB^2 = PE^2 ,$$

$$\text{即 } PE = \sqrt{2}PB ,$$

$$\because PE = PA + AE = PA + PC ,$$

$$\therefore PA + PC = \sqrt{2}PB ,$$

$$\because PB = 2\sqrt{2}PA ,$$

$$\therefore PA + PC = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}PA = 4PA ,$$

$$\therefore PC = 3PA ,$$

【分析】(1) 证明四边形 $ABEQ$ 是矩形，进而在 $\text{Rt}\triangle QBE$ 中，勾股定理即可求解.

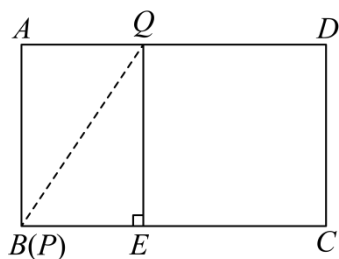
(2) 证明 $\triangle PBE \sim \triangle ECD$ ，得出 $\tan \angle PQE = \frac{PE}{DE} = \frac{BE}{CD} = \frac{2}{3}$;

(3) 过点 P 作 $PH \perp BC$ 于点 H ，证明 $\triangle PHE \cong \triangle ECQ$ 得出 $PE = QE$ ，即可得出结论

(4) 分三种情况讨论，①如图所示，当点 P 在 BE 上时，②当 P 点在 AB 上时，当 F, A 重合时符合题意，此时如图，③当点 P 在 AD 上，当 F, D 重合时，此时 Q 与点 C 重合，则 $PFQE$ 是正方形，即可求解.

【小问 1 详解】

解：如图所示，连接 BQ ，



图①

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形

$\therefore \angle BAQ = \angle ABE = 90^\circ$

$\therefore \angle PEQ = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABEQ$ 是矩形，

当点 P 和点 B 重合时，

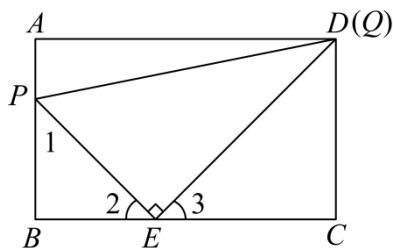
$\therefore QE = AB = 3$, $BE = 2$

在 $\text{Rt}\triangle QBE$ 中， $BQ = \sqrt{BE^2 + QE^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$,

故答案为： $\sqrt{13}$.

【小问 2 详解】

如图所示，



$$\therefore \angle PEQ = 90^\circ, \angle PBE = \angle ECD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ, \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3$$

$$\therefore \triangle PBE \sim \triangle ECD,$$

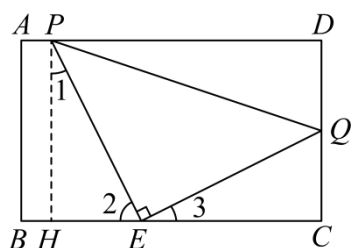
$$\therefore \frac{PE}{DE} = \frac{BE}{CD},$$

$$\therefore BE = 2, CD = AB = 3,$$

$$\therefore \tan \angle PQE = \frac{PE}{DE} = \frac{BE}{CD} = \frac{2}{3};$$

【小问 3 详解】

如图所示，过点 P 作 $PH \perp BC$ 于点 H ，



图②

$$\therefore \angle PEQ = 90^\circ, \angle PHE = \angle ECQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ, \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

则四边形 $ABHP$ 是矩形，

$$\therefore PH = AB = 3$$

$$\text{又} \because EC = BC - BE = 5 - 2 = 3$$

$$\therefore PH = EC,$$

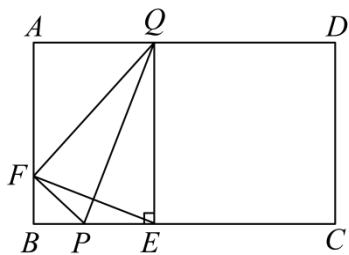
$$\therefore \triangle PHE \cong \triangle ECQ$$

$$\therefore PE = QE$$

$\therefore \triangle PQE$ 是等腰直角三角形；

【小问 4 详解】

①如图所示，当点 P 在 BE 上时，



$$\because QE = QF = 3, AQ = BE = 2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AQF \text{ 中, } AF = \sqrt{QF^2 - AQ^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5},$$

$$\text{则 } BF = 3 - \sqrt{5},$$

$$\because PE = t, \text{ 则 } BP = 2 - t, PF = PE = t,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PBF \text{ 中, } PF^2 = PB^2 + FB^2,$$

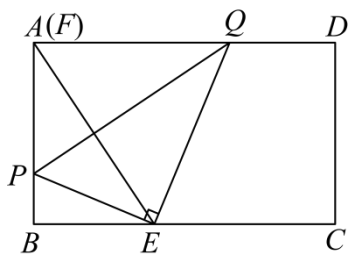
$$\therefore t^2 = (3 - \sqrt{5})^2 + (2 - t)^2$$

$$\text{解得: } t = \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{当 } t < \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2} \text{ 时, 点 } F \text{ 在矩形内部, 符合题意,}$$

$$\therefore 0 < t \leq \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2} \text{ 符合题意,}$$

②当 P 点在 AB 上时, 当 F, A 重合时符合题意, 此时如图,



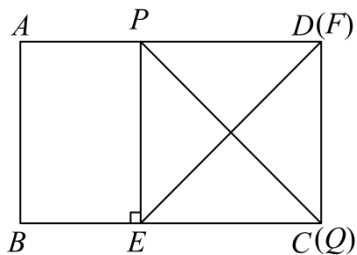
$$\text{则 } PB = t - BE = t - 2, PE = AP = AB - PB = 3 - (t - 2) = 5 - t,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PBE \text{ 中, } PE^2 = PB^2 + BE^2$$

$$(5 - t)^2 = (t - 2)^2 + 2^2,$$

$$\text{解得: } t = \frac{17}{6},$$

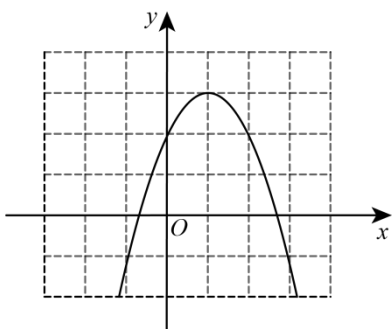
③当点 P 在 AD 上, 当 F, D 重合时, 此时 Q 与点 C 重合, 则 $PFQE$ 是正方形, 此时 $t = 2 + 3 + 2 = 7$



综上所述, $0 < t \leq \frac{9-3\sqrt{5}}{2}$ 或 $t = \frac{17}{6}$ 或 $t = 7$.

【点睛】 本题考查了矩形的性质, 正方形的性质与判定, 勾股定理, 求正切, 轴对称的性质, 分类讨论, 分别画出图形, 数形结合是解题的关键.

24. 在平面直角坐标系中, 点 O 为坐标原点, 抛物线 $y = -x^2 + bx + 2$ (b 是常数) 经过点 $(2, 2)$. 点 A 的坐标为 $(m, 0)$, 点 B 在该抛物线上, 横坐标为 $1-m$. 其中 $m < 0$.



- (1) 求该抛物线对应的函数表达式及顶点坐标;
- (2) 当点 B 在 x 轴上时, 求点 A 的坐标;
- (3) 该抛物线与 x 轴的左交点为 P , 当抛物线在点 P 和点 B 之间的部分 (包括 P 、 B 两点) 的最高点与最低点的纵坐标之差为 $2-m$ 时, 求 m 的值.
- (4) 当点 B 在 x 轴上方时, 过点 B 作 $BC \perp y$ 轴于点 C , 连结 AC 、 BO . 若四边形 $AOBC$ 的边和抛物线有两个交点 (不包括四边形 $AOBC$ 的顶点), 设这两个交点分别为点 E 、点 F , 线段 BO 的中点为 D . 当以点 C 、 E 、 O 、 D (或以点 C 、 F 、 O 、 D) 为顶点的四边形的面积是四边形 $AOBC$ 面积的一半时, 直接写出所有满足条件的 m 的值.

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 2$; 顶点坐标为 $(1, 3)$

(2) $A(-\sqrt{3}, 0)$

(3) $m = -1$ 或 $m = -2$ 或 $m = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 或 $m = \frac{\sqrt{21}-1}{2}$

(4) $m = -2 + \sqrt{2}$ 或 $m = 2 - 2\sqrt{3}$ 或 $m = -\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 将点(2,2)代入抛物线解析式，待定系数法即可求解；

(2) 当 $y=0$ 时， $-x^2+2x+2=0$ ，求得抛物线与 x 轴的交点坐标，根据抛物线上的点 B 在 x 轴上时，横坐标为 $1-m$ ，其中 $m<0$ ，得出 $m=-\sqrt{3}$ ，即可求解；

(3) ①如图所示，当 $1<1-m<1+\sqrt{3}$ ，即 $-\sqrt{3}<m<0$ 时，②当 $1-m\geq 1+\sqrt{3}$ ，即 $m\leq -\sqrt{3}$ 时，③当 $1-\sqrt{3}<1-m<1$ ，即 $0<m<\sqrt{3}$ 时，④当 $1-m\leq 1-\sqrt{3}$ ，即 $m\geq \sqrt{3}$ ，分别画出图形，根据最高点与最低点的纵坐标之差为 $2-m$ ，建立方程，解方程即可求解；

(4) 根据 B 在 x 轴的上方，得出 $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$ ，根据题意分三种情况讨论①当 E 是 AC 的中点，②同理当 F 为 AO 的中点时，③ $\frac{1}{2}S_{\triangle AOC} = S_{\triangle CDF}$ ，根据题意分别得出方程，解方程即可求解。

【小问 1 详解】

解：将点(2,2)代入抛物线 $y=-x^2+bx+2$ ，得，

$$2 = -4 + 2b + 2$$

解得： $b=2$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y=-x^2+2x+2$ ；

$$\therefore y = -x^2 + 2x + 2 = -(x-1)^2 + 3,$$

$\therefore$ 顶点坐标为 $(1,3)$ ，

【小问 2 详解】

解：由 $y=-x^2+2x+2$ ，

当 $y=0$ 时， $-x^2+2x+2=0$ ，

解得： $x_1=1-\sqrt{3}, x_2=1+\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 抛物线上的点 B 在 x 轴上时，横坐标为 $1-m$ ，其中 $m<0$ 。

$$\therefore 1-m > 1$$

$$\therefore 1-m = 1+\sqrt{3}$$

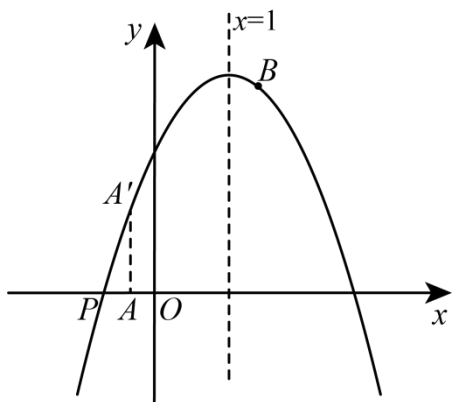
解得： $m=-\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(m,0)$ ，

$$\therefore A(-\sqrt{3}, 0);$$

【小问3详解】

①如图所示，当 $1 < 1-m < 1+\sqrt{3}$ ，即 $-\sqrt{3} < m < 0$ 时，



抛物线在点 P 和点 B 之间的部分（包括 P 、 B 两点）的最高点为顶点，最低点为点 P ，

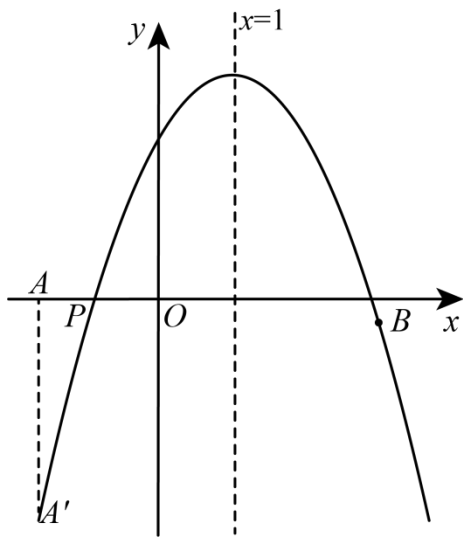
$$\therefore \text{顶点坐标为 } (1, 3), \quad P(1-\sqrt{3}, 0)$$

则纵坐标之差为 $3-0=3$

依题意， $3=2-m$

解得： $m=-1$ ；

②当 $1-m \geq 1+\sqrt{3}$ ，即 $m \leq -\sqrt{3}$ 时，

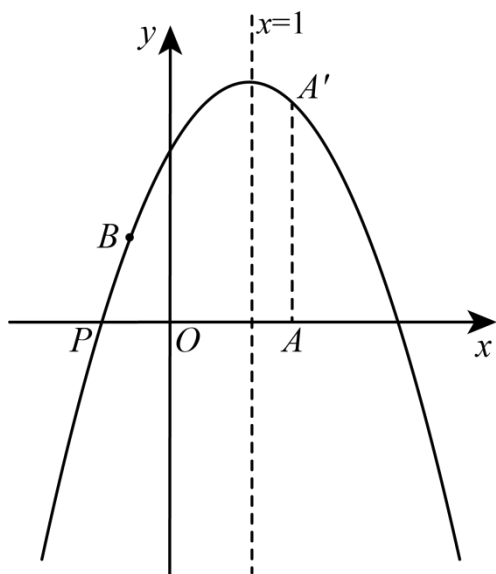


$$\therefore B(1-m, -(1-m)^2 + 2(1-m) + 2), \text{ 即 } B(1-m, -m^2 + 3),$$

依题意， $3 - (-m^2 + 3) = 2 - m$ ，

解得： $m=-2$ 或 $m=1$ （舍去），

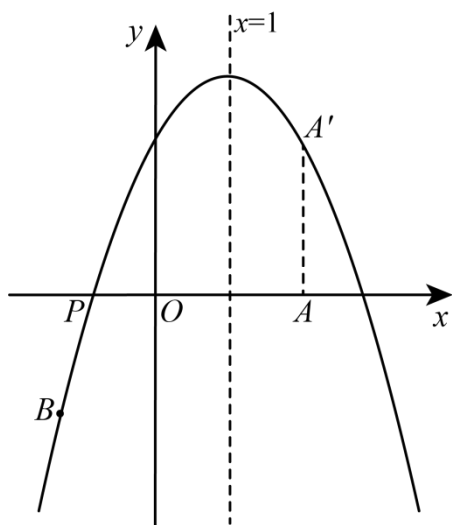
③当 $1-\sqrt{3} < 1-m < 1$ ，即 $0 < m < \sqrt{3}$ 时，



则 $-m^2 + 3 = 2 - m$,

解得: $m = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 或 $m = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (舍去),

④当 $1-m \leq 1-\sqrt{3}$, 即 $m \geq \sqrt{3}$,



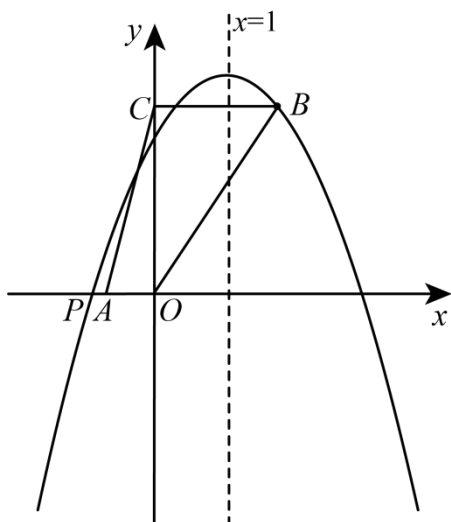
则 $0 - (-m^2 + 3) = 2 - m$,

解得: $m = \frac{-\sqrt{21}-1}{2}$ (舍去) 或 $m = \frac{\sqrt{21}-1}{2}$,

综上所述, $m = -1$ 或 $m = -2$ 或 $m = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 或 $m = \frac{\sqrt{21}-1}{2}$;

【小问 4 详解】

解: 如图所示,



$\therefore B$ 在 x 轴的上方,

$$\therefore 1 - \sqrt{3} < 1 - m < 1 + \sqrt{3}$$

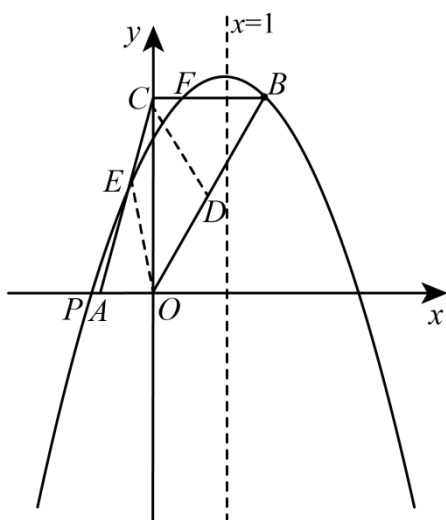
$$\therefore -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$$

$\therefore$ 以点 C 、 E 、 O 、 D 为顶点的四边形的面积是四边形 $AOBC$ 面积的一半, 线段 BO 的中点为 D

$$\therefore S_{\triangle BCD} = S_{\triangle COD}$$

$$\therefore S_{AOBC} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC}, S_{\triangle BOC} = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle COD}$$

①当 E 是 AC 的中点, 如图所示



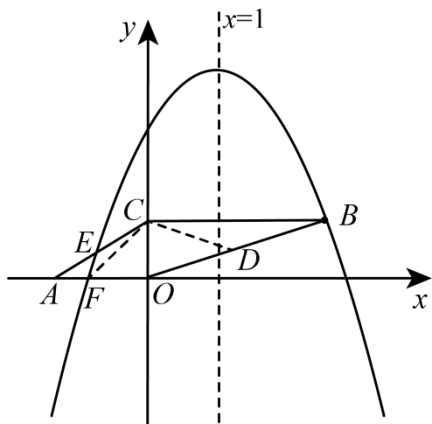
$$\text{则 } S_{AOBC} = 2S_{CEOD},$$

$$\therefore E\left(\frac{m}{2}, \frac{-m^2+3}{2}\right) \text{ 代入 } y = -x^2 + 2x + 2,$$

$$\text{即 } \frac{-m^2+3}{2} = -\left(\frac{m}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{m}{2} + 2,$$

解得: $m = -\sqrt{2} - 2$ (舍去) 或 $m = -2 + \sqrt{2}$;

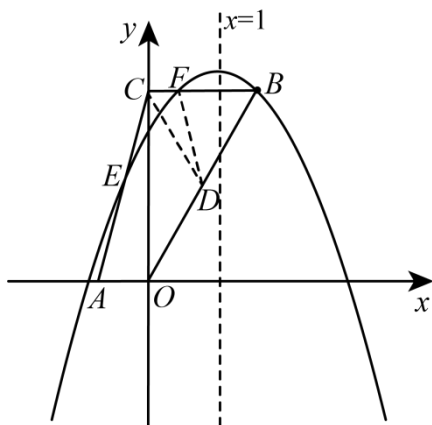
②同理当 F 为 AO 的中点时, 如图所示, $S_{\triangle ACF} = S_{\triangle CFO}$, $S_{\triangle BCD} = S_{\triangle COD}$, 则点 C 、 F 、 O 、 D 为顶点的四边形的面积是四边形 $AOBC$ 面积的一半,



$$\therefore \frac{m}{2} = 1 - \sqrt{3},$$

解得: $m = 2 - 2\sqrt{3}$,

③如图所示,



设 $S_{\triangle BOC} = S$, 则 $S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2}S$,

$\therefore$ 以点 C 、 E 、 O 、 D 为顶点的四边形的面积是四边形 $AOBC$ 面积的一半, 线段 BO 的中点为 D

$$\therefore \frac{1}{2}S + S_{\Delta CDF} = S_{\Delta FDB} + S_{\Delta AOC}$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}S + S_{\Delta CDF} = \frac{1}{2}S - S_{\Delta CDF} + S_{\Delta AOC}$$

$$\therefore \frac{1}{2} S_{\triangle AOC} = S_{\triangle CDF} ,$$

$$\therefore CF = AO,$$

$$\therefore F(-m, -m^2 + 3),$$

$\therefore B, F$ 关于 $x=1$ 对称,

$$\therefore \frac{-m+1-m}{2}=1,$$

解得: $m=-\frac{1}{2},$

综上所述, $m=-2+\sqrt{2}$ 或 $m=2-2\sqrt{3}$ 或 $m=-\frac{1}{2}.$

【点睛】 本题考查了二次函数综合运用, 二次函数的性质, 面积问题, 根据题意画出图形, 分类讨论, 熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

