

2023 年长春市初中学业水平考试

数学

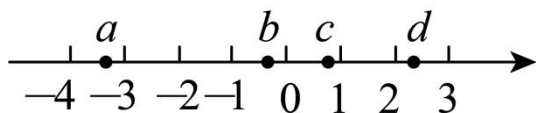
本试卷包括三道大题，共 24 道小题，共 6 页。全卷满分 20 分。考试时间为 120 分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名，准考证号填写在答题卡上，并将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时，考生务必按照考试要求在答题卡上的指定区域内作答，在草稿纸、试卷上答题无效。

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. 实数 a 、 b 、 c 、 d 在数轴上对应点位置如图所示，这四个数中绝对值最小的是（ ）



- A. a B. b C. c D. d

2. 长春龙嘉国际机场 T3A 航站楼设计创意为“鹤舞长春”，如图所示，航站楼的造型如仙鹤飞翔，蕴含了对吉林大地未来发展的美好愿景。本期工程按照满足 2030 年旅客吞吐量 38000000 人次目标设计的，其中 38000000 这个数用科学记数法表示为（ ）

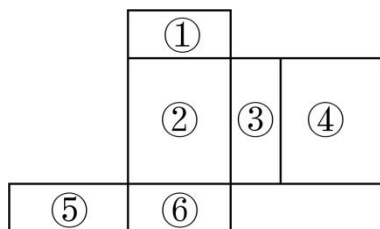


- A. 0.38×10^8 B. 3.8×10^6 C. 3.8×10^8 D. 3.8×10^7

3. 下列运算正确的是（ ）

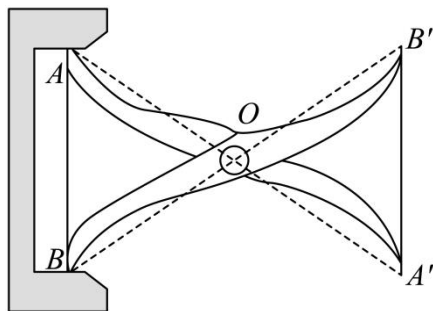
- A. $a^3 - a^2 = a$ B. $a^2 \cdot a = a^3$ C. $(a^2)^3 = a^5$ D. $a^6 \div a^2 = a^3$

4. 下图是一个多面体的表面展开图，每个面都标注了数字。若多面体的底面是面③，则多面体的上面是（ ）



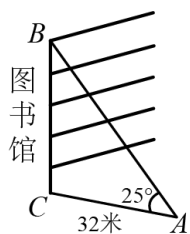
- A. 面① B. 面② C. 面⑤ D. 面⑥

5. 如图，工人师傅设计了一种测零件内径 AB 的卡钳，卡钳交叉点 O 为 AA' 、 BB' 的中点，只要量出 $A'B'$ 的长度，就可以知道该零件内径 AB 的长度。依据的数学基本事实是（ ）



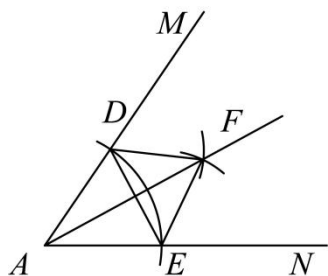
- A. 两边及其夹角分别相等的两个三角形全等 B. 两角及其夹边分别相等的两个三角形全等
C. 两余直线被一组平行线所截，所的对对应线段成比例 D. 两点之间线段最短

6. 学校开放日即将来临，负责布置的林老师打算从学校图书馆的顶楼拉出一条彩旗绳 AB 到地面，如图所示。已彩旗绳与地面形成 25° 角（即 $\angle BAC = 25^\circ$ ）、彩旗绳固定在地面的位置与图书馆相距 32 米（即 $AC = 32$ 米），则彩旗绳 AB 的长度为（ ）



- A. $32 \sin 25^\circ$ 米 B. $32 \cos 25^\circ$ 米 C. $\frac{32}{\sin 25^\circ}$ 米 D. $\frac{32}{\cos 25^\circ}$ 米

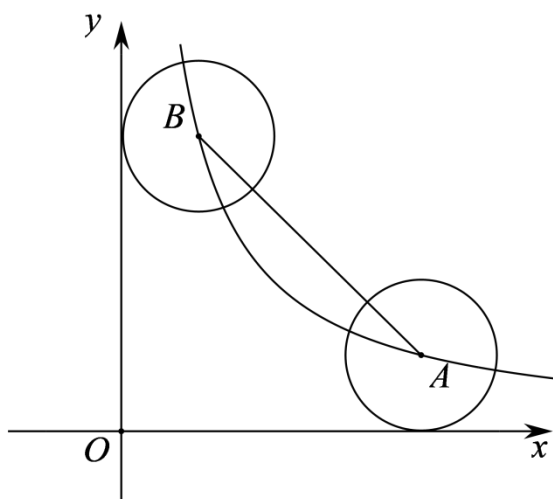
7. 如图，用直尺和圆规作 $\angle MAN$ 的角平分线，根据作图痕迹，下列结论不一定正确的是（ ）



- A. $AD = AE$ B. $AD = DF$ C. $DF = EF$ D. $AF \perp DE$

8. 如图，在平面直角坐标系中，点 A 、 B 在函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 的图象上，分别以 A 、 B 为圆心，1 为半

径作圆，当 $\odot A$ 与 x 轴相切、 $\odot B$ 与 y 轴相切时，连结 AB ， $AB=3\sqrt{2}$ ，则 k 的值为（ ）



A. 3

B. $3\sqrt{2}$

C. 4

D. 6

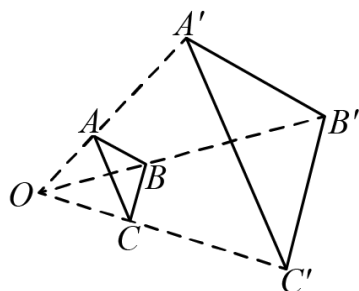
二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 8 分）

9. 分解因式： $a^2-1=$ _____.

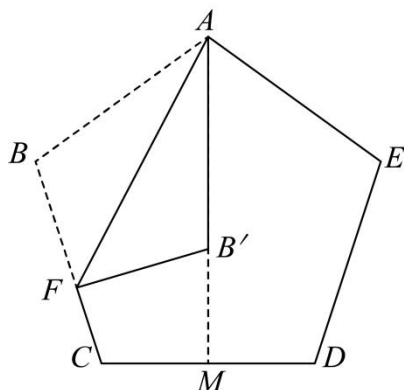
10. 若关于 x 的方程 $x^2-2x+m=0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的取值范围是_____.

11. 2023 长春马拉松于 5 月 21 日在南岭体育场鸣枪开跑，某同学参加了 7.5 公里健康跑项目，他从起点开始以平均每分钟 x 公里的速度跑了 10 分钟，此时他离健康跑终点的路程为_____公里. (用含 x 的代数式表示)

12. 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是以点 O 为位似中心的位似图形，点 A 在线段 OA' 上. 若 $OA:AA'=1:2$ ，则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的周长之比为_____.



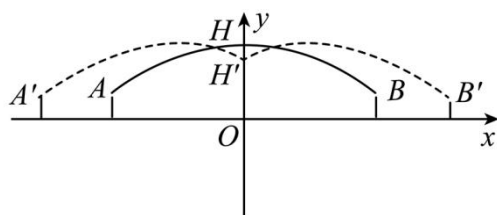
13. 如图，将正五边形纸片 $ABCDE$ 折叠，使点 B 与点 E 重合，折痕为 AM ，展开后，再将纸片折叠，使边 AB 落在线段 AM 上，点 B 的对应点为点 B' ，折痕为 AF ，则 $\angle AFB'$ 的大小为_____度.



14. 2023年5月8日，C919商业首航完成——中国民商业运营国产大飞机正式起步。12时31分航班抵达北京首都机场，穿过隆重的“水门礼”（寓意“接风洗尘”、是国际民航中高级别的礼仪）。如图①，在一次“水门礼”的预演中，两辆消防车面向飞机喷射水柱，喷射的两条水柱近似看作形状相同的地物线的一部分。如图②，当两辆消防车喷水口 A 、 B 的水平距离为 80 米时，两条水柱在物线的顶点 H 处相遇，此时相遇点 H 距地面 20 米，喷水口 A 、 B 距地面均为 4 米。若两辆消防车同时后退 10 米，两条水柱的形状及喷水口 A' 、 B' 到地面的距离均保持不变，则此时两条水柱相遇点 H' 距地面_____米。



图①



图②

三、解答题（本大题共 10 小题，共 78 分）

15. 先化简，再求值： $(a+1)^2 + a(1-a)$ ，其中 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

16. 班级联欢会上有一个抽奖活动，每位同学均参加一次抽奖，活动规则下：将三个完全相同的不透明纸杯倒置放在桌面上，每个杯子内放入一个彩蛋，彩蛋颜色分别为红色、红色、绿色。参加活动的同学先从中随机选中一个杯子，记录杯内彩蛋颜色后再将杯子倒置于桌面，重新打乱杯子的摆放位置，再从中随机选中一个杯子，记录杯内彩蛋颜色。若两次选中的彩蛋颜色不同则获一等奖，颜色相同则获二等奖。用画树状图（或列表）的方法，求某同学获一等奖的概率。

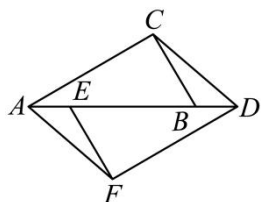


17. 随着中国网民规模突破 10 亿、博物馆美育不断向线上拓展，敦煌研究院顺势推出数字敦煌文化大使“伽

瑶”，受到广大敦煌文化爱好者的好评．某工厂计划制作3000个“伽瑶”玩偶摆件，为了尽快完成任务，实际平均每天完成的数量是原计划的1.5倍，结果提前5天完成任务．问原计划平均每天制作多少个摆件？



18. 将两个完全相同的含有 30° 角的直角三角板在同一平面内按如图所示位置摆放．点 A, E, B, D 依次在同一直线上，连结 AF, CD ．



(1) 求证：四边形 $AFDC$ 是平行四边形；

(2) 已知 $BC = 6\text{cm}$ ，当四边形 $AFDC$ 是菱形时， AD 的长为_____ cm ．

19. 近年来，肥胖经成为影响人们身体健康的重要因素．目前，国际上常用身体质量指数（Body Mass Index，缩写 BMI）来衡量人体胖瘦程度以及是否健康，其计算公式是

$$\text{BMI} = \frac{\text{体重 (单位: kg)}}{\text{身高}^2 (\text{位置: m}^2)}$$

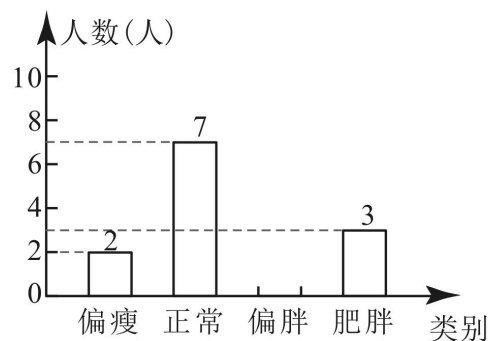
例如：某人身高 1.60m ，体重 60kg ，则他的 $\text{BMI} = \frac{60}{1.60^2} \approx 23.4$ ．

中国成人的 BMI 数值标准为： $\text{BMI} < 18.5$ 为偏瘦； $18.5 \leq \text{BMI} < 24$ 为正常； $24 \leq \text{BMI} < 28$ 为肥胖；

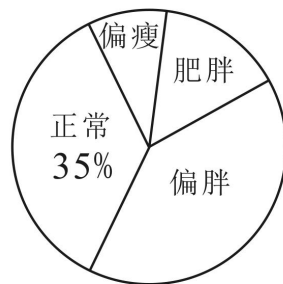
$\text{BMI} \geq 28$ 为肥胖．

某公司为了了解员工的健康情况，随机抽取了一部分员工的体检数据，通过计算得到他们的 BMI 值并绘制了如下两幅不完整的统计图．

抽取的员工胖瘦程度的条形统计图



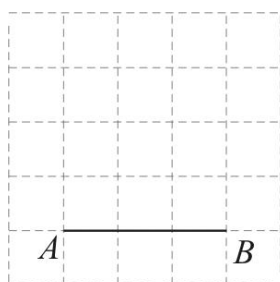
抽取的员工胖瘦程度的扇形统计图



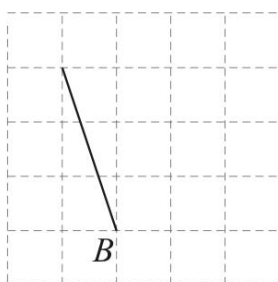
根据以上信息回答下列问题：

- (1) 补全条形统计图；
- (2) 请估计该公司 200 名员工中属于偏胖和肥胖的总人数；
- (3) 基于上述统计结果，公司建议每个人制定健身计划。员工小张身高 1.70m，BMI 值为 27，他想通过健身减重使自己的 BMI 值达到正常，则他的体重至少需要减掉_____kg。（结果精确到 1kg）

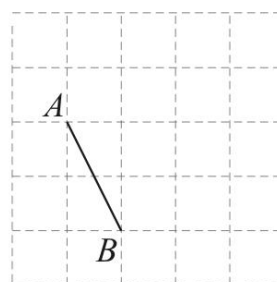
20. 图①、图②、图③均是 5×5 的正方形网格，每个小正方形的边长均为 1，每个小正方形的顶点称为格点。点 A 、 B 均在格点上，只用无刻度的直尺，分别在给定的网格中按下列要求作 $\triangle ABC$ ，点 C 在格点上。



图①



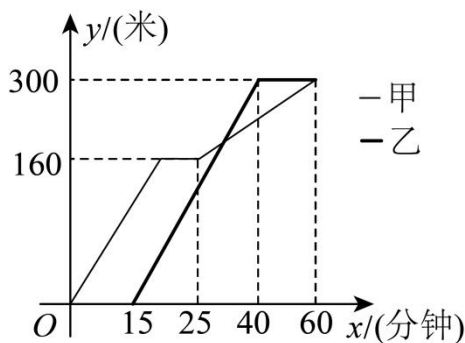
图②



图③

- (1) 在图①中， $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{9}{2}$ ；
- (2) 在图②中， $\triangle ABC$ 的面积为 5
- (3) 在图③中， $\triangle ABC$ 是面积为 $\frac{5}{2}$ 的钝角三角形。

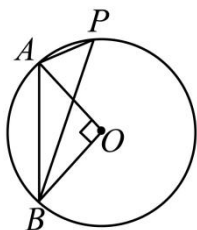
21. 甲、乙两个相约登山，他们同时从入口处出发，甲步行登山到山顶，乙先步行 15 分钟到缆车站，再乘坐缆车到达山顶。甲、乙距山脚的垂直高度 y （米）与甲登山的时间 x （分钟）之间的函数图象如图所示。



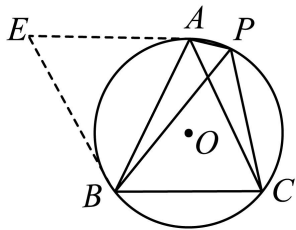
(1) 当 $15 \leq x \leq 40$ 时, 求乙距山脚的垂直高度 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 求乙乘坐缆车上升过程中, 和甲处于同一高度时距山脚的垂直高度.

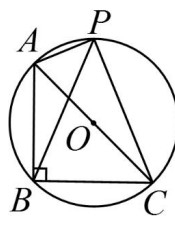
22. 【感知】如图①, 点 A 、 B 、 P 均在 $\odot O$ 上, $\angle AOB = 90^\circ$, 则锐角 $\angle APB$ 的大小为_____度.



图①



图②



图③

【探究】小明遇到这样一个问题: 如图②, $\odot O$ 是等边三角形 ABC 的外接圆, 点 P 在 $\widehat{AC}$ 上 (点 P 不与点 A 、 C 重合), 连结 PA 、 PB 、 PC . 求证: $PB = PA + PC$. 小明发现, 延长 PA 至点 E , 使 $AE = PC$, 连结 BE , 通过证明 $\triangle PBC \cong \triangle EBA$, 可推得 PBE 是等边三角形, 进而得证.

下面是小明的部分证明过程:

证明: 延长 PA 至点 E , 使 $AE = PC$, 连结 BE ,

$\because$ 四边形 $ABCP$ 是 $\odot O$ 的内接四边形,

$\therefore \angle BAP + \angle BCP = 180^\circ$.

$\because \angle BAP + \angle BAE = 180^\circ$,

$\therefore \angle BCP = \angle BAE$.

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形.

$\therefore BA = BC$,

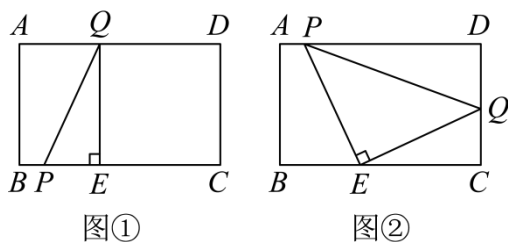
$\therefore \triangle PBC \cong \triangle EBA (\text{SAS})$

请你补全余下的证明过程.

【应用】如图③, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC$, 点 P 在 $\odot O$ 上, 且点 P 与点 B 在 AC 的两侧, 连结 PA 、 PB 、 PC . 若 $PB = 2\sqrt{2}PA$, 则 $\frac{PB}{PC}$ 的值为_____.

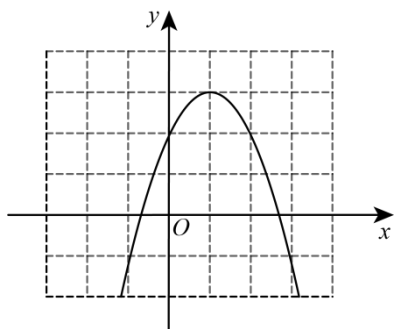
23. 如图①. 在矩形 $ABCD$. $AB = 3$, $AD = 5$, 点 E 在边 BC 上, 且 $BE = 2$. 动点 P 从点 E 出发, 沿折

线 $EB-BA-AD$ 以每秒 1 个单位长度的速度运动，作 $\angle PEQ = 90^\circ$ ， EQ 交边 AD 或边 DC 于点 Q ，连续 PQ 。当点 Q 与点 C 重合时，点 P 停止运动。设点 P 的运动时间为 t 秒。（ $t > 0$ ）



- (1) 当点 P 和点 B 重合时，线段 PQ 的长为_____；
- (2) 当点 Q 和点 D 重合时，求 $\tan \angle PQE$ ；
- (3) 当点 P 在边 AD 上运动时， $\triangle PQE$ 的形状始终是等腰直角三角形。如图②。请说明理由；
- (4) 作点 E 关于直线 PQ 的对称点 F ，连接 PF 、 QF ，当四边形 $EPFQ$ 和矩形 $ABCD$ 重叠部分图形为轴对称四边形时，直接写出 t 的取值范围。

24. 在平面直角坐标系中，点 O 为坐标原点，抛物线 $y = -x^2 + bx + 2$ （ b 是常数）经过点 $(2, 2)$ 。点 A 的坐标为 $(m, 0)$ ，点 B 在该抛物线上，横坐标为 $1 - m$ 。其中 $m < 0$ 。



- (1) 求该抛物线对应的函数表达式及顶点坐标；
- (2) 当点 B 在 x 轴上时，求点 A 的坐标；
- (3) 该抛物线与 x 轴的左交点为 P ，当抛物线在点 P 和点 B 之间的部分（包括 P 、 B 两点）的最高点与最低点的纵坐标之差为 $2 - m$ 时，求 m 的值。
- (4) 当点 B 在 x 轴上方时，过点 B 作 $BC \perp y$ 轴于点 C ，连结 AC 、 BO 。若四边形 $AOBC$ 的边和抛物线有两个交点（不包括四边形 $AOBC$ 的顶点），设这两个交点分别为点 E 、点 F ，线段 BO 的中点为 D 。当以点 C 、 E 、 O 、 D （或以点 C 、 F 、 O 、 D ）为顶点的四边形的面积是四边形 $AOBC$ 面积的一半时，直接写出所有满足条件的 m 的值。

