

2023 年内蒙通辽初中学业水平考试

一、选择题（本题包括 12 道小题，每小题 3 分，共 36 分，每小题只有一个正确答案，请在答题卡上将代表正确答案的字母用 2B 铅笔涂黑）

1. 2023 的相反数是（ ）

- A. $\frac{1}{2023}$ B. -2023 C. 2023 D. $-\frac{1}{2023}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据只有符号不同的两个数互为相反数进行解答即可得.

【详解】解：2023 的相反数是 -2023 ,

故选：B.

【点睛】本题考查了相反数的定义，熟练掌握相反数的定义是解题的关键.

2. 在英语单词 *polynomial*（多项式）中任意选出一个字母，选出的字母为“*n*”的概率是（ ）

- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】直接由概率公式求解即可.

【详解】解：单词 *polynomial* 中共有 10 个字母，

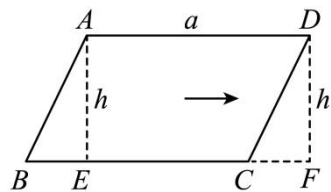
其中 *n* 出现了 1 次，

故任意选择一个字母恰好是字母“*n*”的概率为： $\frac{1}{10}$.

故选：A.

【点睛】本题主要考查运用概率公式求概率，根据已知条件找出总的情况数和符合条件的情况数是解题关键.

3. 如图，用平移方法说明平行四边形的面积公式 $S = ah$ 时，若 $\triangle ABE$ 平移到 $\triangle DCF$ ， $a = 4$ ， $h = 3$ ，则 $\triangle ABE$ 的平移距离为（ ）



- A. 3 B. 4 C. 5 D. 12

【答案】B

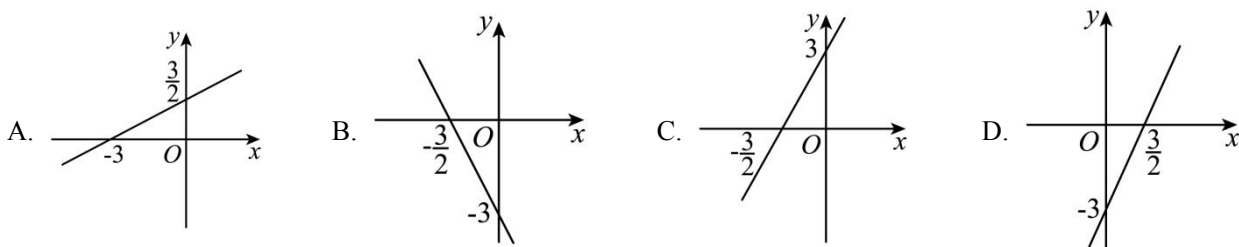
【解析】

【分析】根据平移的方向可得， $\triangle ABE$ 平移到 $\triangle DCF$ ，则点 A 与点 D 重合，故 $\triangle ABE$ 的平移距离为 AD 的长。

【详解】解：用平移方法说明平行四边形的面积公式 $S = ah$ 时，将 $\triangle ABE$ 平移到 $\triangle DCF$ ，故平移后点 A 与点 D 重合，则 $\triangle ABE$ 的平移距离为 $AD = a = 4$ ，故选：B。

【点睛】本题考查了平移的性质，熟练掌握平移的性质是解题的关键。

4. 在平面直角坐标系中，一次函数 $y = 2x - 3$ 的图象是（ ）



【答案】D

【解析】

【分析】依据一次函数 $y = 2x - 3$ 的图象经过点 $(0, -3)$ 和 $(\frac{3}{2}, 0)$ ，即可得到一次函数 $y = 2x - 3$ 的图象经过一、三、四象限。

【详解】解：一次函数 $y = 2x - 3$ 中，令 $x = 0$ ，则 $y = -3$ ；令 $y = 0$ ，则 $x = \frac{3}{2}$ ，

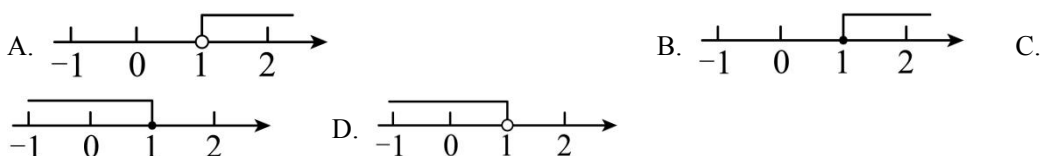
$\therefore$ 一次函数 $y = 2x - 3$ 的图象经过点 $(0, -3)$ 和 $(\frac{3}{2}, 0)$ ，

$\therefore$ 一次函数 $y = 2x - 3$ 的图象经过一、三、四象限，

故选：D。

【点睛】本题主要考查了一次函数的图象，一次函数的图象是与坐标轴不平行的一条直线。

5. 二次根式 $\sqrt{1-x}$ 在实数范围内有意义，则实数 x 的取值范围在数轴上表示为（ ）



【答案】C

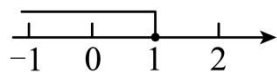
【解析】

【分析】根据被开方数大于等于 0 列不等式计算即可得到 x 的取值范围，然后在数轴上表示即可得解.

【详解】解：根据题意得， $1-x \geq 0$ ，

解得 $x \leq 1$ ，

在数轴上表示如下：



故选：C.

【点睛】本题考查了二次根式有意义的条件，不等式的解法，以及在数轴上表示不等式的解集，理解二次根式有意义的条件是解题关键.

6. 已知点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 在反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 的图像上，且 $x_1 < 0 < x_2$ ，则下列结论一定正确的是 ()

- A. $y_1 + y_2 < 0$ B. $y_1 + y_2 > 0$ C. $y_1 - y_2 < 0$ D. $y_1 - y_2 > 0$

【答案】D

【解析】

【分析】把点 A 和点 B 的坐标代入解析式，根据条件可判断出 y_1 、 y_2 的大小关系.

【详解】解：∵ 点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 是反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 的图像上的两点，

$$\therefore x_1 y_1 = x_2 y_2 = -2,$$

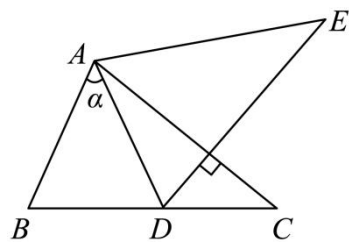
$$\therefore x_1 < 0 < x_2,$$

$$\therefore y_2 < 0 < y_1, \text{ 即 } y_1 - y_2 > 0, \text{ 故 D 正确.}$$

故选：D.

【点睛】本题主要考查反比例函数图像上点的坐标特征，掌握图像上点的坐标满足函数解析式是解题的关键.

7. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转到 $\triangle ADE$ ，旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$)，点 B 的对应点 D 恰好落在 BC 边上，若 $DE \perp AC$ ， $\angle CAD = 24^\circ$ ，则旋转角 α 的度数为 ()



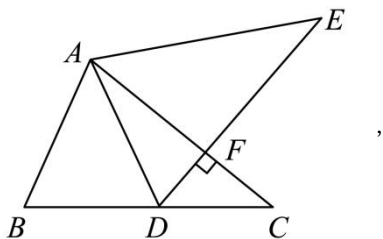
- A. 24° B. 28° C. 48° D. 66°

【答案】C

【解析】

【分析】先求出 $\angle ADE = 66^\circ$ ，再利用旋转的性质求出 $\angle B = 66^\circ$ ， $AB = AD$ ，然后利用等边对等角求出 $\angle ADB = 66^\circ$ ，最后利用三角形的内角和定理求解即可。

【详解】解：如图，



$$\because DE \perp AC,$$

$$\therefore \angle AFD = 90^\circ,$$

$$\because \angle CAD = 24^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = 180^\circ - \angle CAD - \angle AFD = 66^\circ,$$

$\because$ 旋转,

$$\therefore \angle B = \angle ADE = 66^\circ, \quad AB = AD,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle B = 66^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 180^\circ - \angle B - \angle ABD = 48^\circ,$$

即旋转角 α 的度数是 48° .

故选：C.

【点睛】本题考查了旋转的性质，等腰三角形的性质，三角形内角和定理等，掌握等边对等角是解题的关键.

8. 下列命题:

① $a^3 \cdot a^2 = a^5$;

② $-\pi > -3.14$;

③ 圆周角等于圆心角的一半;

④ 将一枚质地均匀的硬币抛掷一次时，正面朝上是必然事件;

⑤ 在一组数据中，如果每个数据都增加 4，那么方差也增加 4.

其中真命题的个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】运用同底数幂相乘法则可判定①；根据负数的绝对值越大，自身越小可判定②；根据圆周角定理可判定③；根据随机事件和方差的意义可判定④⑤.

【详解】解：① $a^3 \cdot a^2 = a^5$ ，故①是真命题；

② $-\pi < -3.14$ ，故②是假命题；

③在同圆或等圆值，一条弧所对的圆周角等于它所对圆心角的一半，故③是假命题；

④将一枚质地均匀的硬币抛掷一次时，正面朝上是随机事件，故④是假命题；

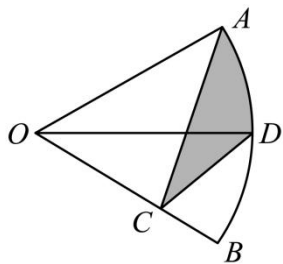
⑤在一组数据中，如果每个数据都增加 4，那么方差不变，故⑤是假命题.

综上，正确的只有①.

故选 A.

【点睛】本题主要考查了同底数幂相乘、无理数大小比较、圆周角定理、随机事件、方差等知识点，灵活运用相关知识成为解答本题的关键.

9. 如图，在扇形 AOB 中， $\angle AOB = 60^\circ$ ， OD 平分 $\angle AOB$ 交 $\widehat{AB}$ 于点 D ，点 C 是半径 OB 上一动点，若 $OA = 1$ ，则阴影部分周长的最小值为 ()



A. $\sqrt{2} + \frac{\pi}{6}$

B. $\sqrt{2} + \frac{\pi}{3}$

C. $2\sqrt{2} + \frac{\pi}{6}$

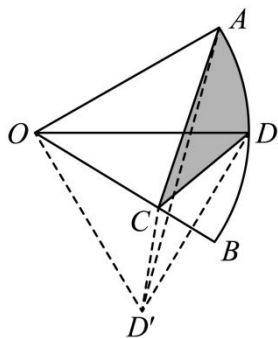
D. $2\sqrt{2} + \frac{\pi}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】由于 $l_{\widehat{AD}}$ 是定值，只需求解 $AC + CD$ 的最小值即可，作点 D 关于 OB 对称点 D' ，连接 AD' 、 CD' 、 OD' ，则 $AC + CD$ 最小值为 AD' 的长度，即阴影部分周长的最小最小值为 $AD' + l_{\widehat{AD}}$. 利用角平分线的定义可求得 $\angle AOD' = 90^\circ$ ，进而利用勾股定理和弧长公式求得 AD' 和 $l_{\widehat{AD}}$ 即可.

【详解】解：如图，作点 D 关于 OB 对称点 D' ，连接 AD' 、 CD' 、 OD' ，



则 $CD = CD'$, $OD = OD'$, $\angle DOB = \angle BOD'$,

$\therefore AC + CD = AC + CD' \geq AD'$, 当 A, C, D' 共线时取等号, 此时, $AC + CD$ 最小, 即阴影部分周长的最小, 最小值为 $AD' + l_{\text{弧}AD}$.

$\because OD$ 平分 $\angle AOB$, $\angle AOB = 60^\circ$,

$\therefore \angle AOD = \angle DOB = \frac{1}{2} \angle AOB = 30^\circ$,

$\therefore \angle AOD' = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle OAD'$ 中, $OA = OD' = 1$,

$\therefore AD' = \sqrt{OA^2 + OD'^2} = \sqrt{2}$,

又 $l_{\text{弧}AD} = \frac{30\pi \times 1}{180} = \frac{\pi}{6}$,

$\therefore$ 阴影部分周长的最小值为 $AD' + l_{\text{弧}AD} = \sqrt{2} + \frac{\pi}{6}$,

故选: A.

【点睛】本题考查弧长公式、勾股定理、角平分线的定义、轴对称性质, 能利用轴对称性质求解最短路径问题是解答的关键.

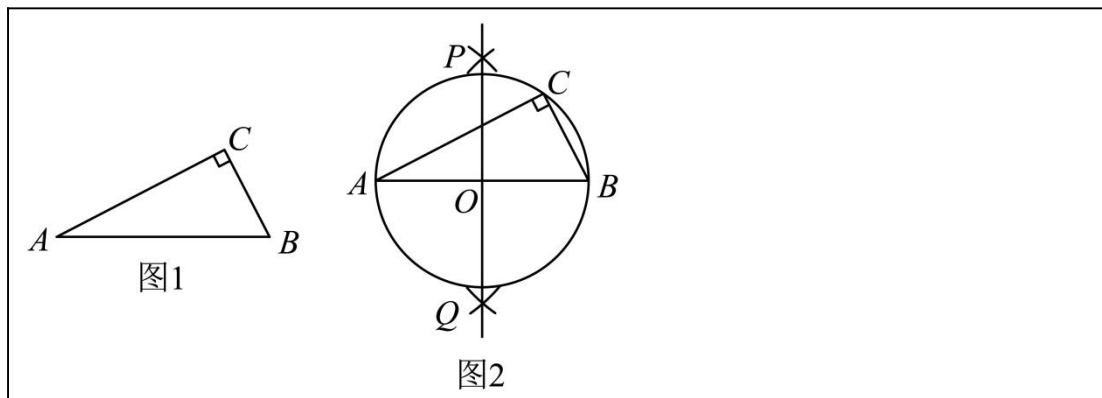
10. 下面是“作已知直角三角形的外接圆”的尺规作图过程:

已知: 如图 1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$.

求作: $\text{Rt}\triangle ABC$ 的外接圆.

作法: 如图 2.

- (1) 分别以点 A 和点 B 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧, 两弧相交于 P, Q 两点;
- (2) 作直线 PQ , 交 AB 于点 O ;
- (3) 以 O 为圆心, OA 为半径作 $\odot O$, $\odot O$ 即为所求作的圆.



下列不属于该尺规作图依据的是 ()

- A. 两点确定一条直线
- B. 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半
- C. 与线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上
- D. 线段垂直平分线上的点与这条线段两个端点的距离相等

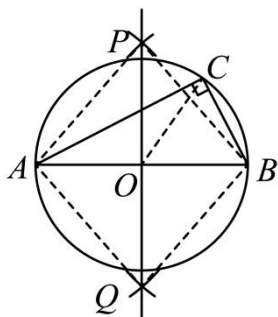
【答案】D

【解析】

【分析】利用直角三角形斜边中线的性质证明： $OC = OA = OB$ 即可.

【详解】解：作直线 PQ (两点确定一条直线),

连接 PA, PB, QA, QB, OC ,



$\therefore$ 由作图, $PA = PB, QA = QB$,

$\therefore PQ \perp AB$ 且 $AO = BO$ (与线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上).

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore OC = \frac{1}{2}AB$ (直角三角形斜边中线等于斜边的一半),

$\therefore OA = OB = OC$,

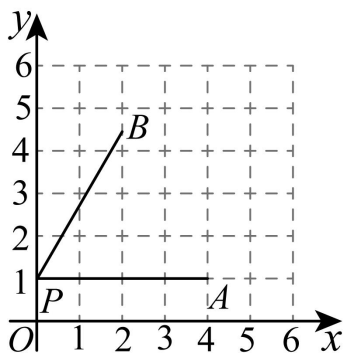
$\therefore A, B, C$ 三点在以 O 为圆心, AB 为直径的圆上.

$\therefore \odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆.

故选: D.

【点睛】本题考查作图-复杂作图，线段的垂直平分线的定义，直角三角形斜边中线的性质等知识，解题的关键熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

11. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 $P(0,1)$ ，点 $A(4,1)$ ，以点 P 为中心，把点 A 按逆时针方向旋转 60° 得到点 B ，在 $M_1(-1, -\sqrt{3})$ ， $M_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ ， $M_3(1, \sqrt{3}-1)$ ， $M_4(2, 2\sqrt{3})$ 四个点中，直线 PB 经过的点是 ()

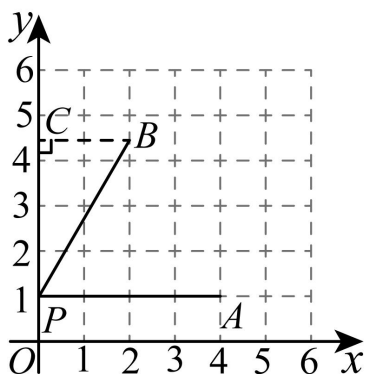
A. M_1 B. M_2 C. M_3 D. M_4

【答案】B

【解析】

【分析】根据含 30° 角的直角三角形的性质可得 $B(2, 1+2\sqrt{3})$ ，利用待定系数法可得直线 PB 的解析式，依次将 M_1 ， M_2 ， M_3 ， M_4 四个点的一个坐标代入 $y = \sqrt{3}x + 1$ 中可解答.

【详解】解： $\because$ 点 $A(4,1)$ ，点 $P(0,1)$ ，



$\therefore PA \perp y$ 轴， $PA = 4$ ，

由旋转得： $\angle APB = 60^\circ$ ， $AP = PB = 4$ ，

如图，过点 B 作 $BC \perp y$ 轴于 C ，

$\therefore \angle BPC = 30^\circ$ ，

$$\therefore BC = 2, PC = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore B(2, 1+2\sqrt{3}),$$

设直线 PB 的解析式为: $y = kx + b$,

$$\text{则} \begin{cases} 2k + b = 1 + 2\sqrt{3} \\ b = 1 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = \sqrt{3} \\ b = 1 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } PB \text{ 的解析式为: } y = \sqrt{3}x + 1,$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } y = -\sqrt{3} + 1,$$

$$\therefore \text{点 } M_1(-1, -\sqrt{3}) \text{ 不在直线 } PB \text{ 上,}$$

$$\text{当 } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 时, } y = \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 1 = 0,$$

$$\therefore M_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) \text{ 在直线 } PB \text{ 上,}$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时 } y = \sqrt{3} + 1,$$

$$\therefore M_3(1, \sqrt{3} - 1) \text{ 不在直线 } PB \text{ 上,}$$

$$\text{当 } x = 2 \text{ 时, } y = 2\sqrt{3} + 1,$$

$$\therefore M_4(2, 2\sqrt{3}) \text{ 不在直线 } PB \text{ 上.}$$

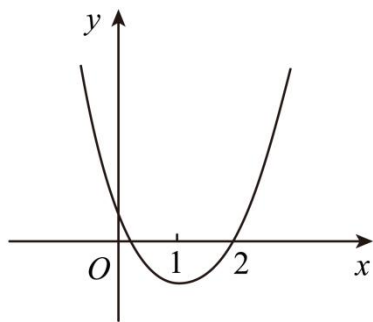
故选: B.

【点睛】 本题考查的是图形旋转变换, 待定系数法求一次函数的解析式, 确定点 B 的坐标是解本题的关键.

12. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $(x_1, 0), (2, 0)$, 其中 $0 < x_1 < 1$, 下列四个结论:

① $abc < 0$; ② $a + b + c > 0$; ③ $2b + 3c < 0$; ④ 不等式 $ax^2 + bx + c < -\frac{c}{2}x + c$ 的解集为 $0 < x < 2$. 其中

正确结论的个数是 ()



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】根据函数图象可得出 a , b , c 的符号即可判断①, 当 $x=1$ 时, $y < 0$ 即可判断②; 根据对称轴为

$x = -\frac{b}{2a} > 1$, $a > 0$ 可判断③; $y_1 = ax^2 + bx + c$, $y_2 = -\frac{c}{2}x + c$ 数形结合即可判断④.

【详解】解: $\because$ 抛物线开口向上, 对称轴在 y 轴右边, 与 y 轴交于正半轴,

$\therefore a > 0$, $b < 0$, $c > 0$,

$\therefore abc < 0$, 故①正确.

$\because$ 当 $x=1$ 时, $y < 0$,

$\therefore a + b + c < 0$, 故②错误.

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于两点 $(x_1, 0)$, $(2, 0)$, 其中 $0 < x_1 < 1$,

$\therefore \frac{2+0}{2} < -\frac{b}{2a} < \frac{2+1}{2}$,

$\therefore 1 < -\frac{b}{2a} < \frac{3}{2}$,

当 $-\frac{b}{2a} < \frac{3}{2}$ 时, $b > -3a$,

当 $x=2$ 时, $y = 4a + 2b + c = 0$,

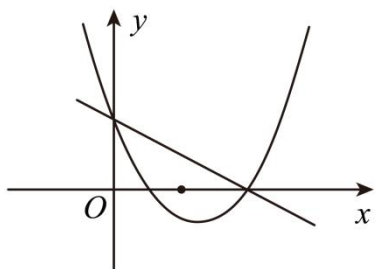
$\therefore b = -2a - \frac{1}{2}c$,

$\therefore -2a - \frac{1}{2}c > -3a$,

$\therefore 2a - c > 0$,

$\therefore 2b + 3c = -4a - c + 3c = -4a + 2c = -2(2a - c) < 0$, 故③正确;

设 $y_1 = ax^2 + bx + c$, $y_2 = -\frac{c}{2}x + c$, 如图:



由图得， $y_1 < y_2$ 时， $0 < x < 2$ ，故④正确.

综上，正确的有①③④，共 3 个，

故选：C.

【点睛】本题考查了二次函数的图象及性质，根据二次函数的图象及性质巧妙借助数形结合思想解决问题是解题的关键.

二、填空题（本题包括 5 道小题，每小题 3 分，共 15 分，将答案直接填在答题卡对应题的横线上）

13. 已知一组数据：3，4，5，5，6，则这组数据的众数是_____.

【答案】5

【解析】

【分析】根据众数的定义（一组数据中，出现次数最多的数就叫这组数据的众数）求解即可.

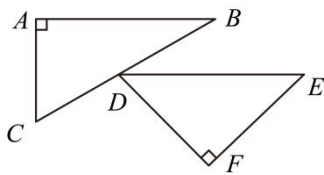
【详解】解：由这组数据可知，数字 5 出现 2 次，出现的次数最多，

$\therefore$ 这组数据的众数是 5，

故答案为：5.

【点睛】本题考查众数的定义，熟练掌握众数的概念是解题的关键.

14. 将一副三角尺如图所示放置，其中 $AB \parallel DE$ ，则 $\angle CDF =$ _____度.



【答案】105

【解析】

【分析】根据平行线的性质可得 $\angle B = \angle BDE = 30^\circ$ ，根据平角的定义即可求得.

【详解】解： $\because AB \parallel DE$ ，

$\therefore \angle B = \angle BDE = 30^\circ$ ，

又 $\because \angle EDF = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle CDF = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ,$$

故答案为：105.

【点睛】本题考查了三角板中角度计算，平行线的性质，熟练掌握平行线的性质是解题的关键.

15. 点 Q 的横坐标为一元一次方程 $3x + 7 = 32 - 2x$ 的解，纵坐标为 $a + b$ 的值，其中 a, b 满足二元一次方程组

$$\begin{cases} 2a - b = 4 \\ -a + 2b = -8 \end{cases}, \text{ 则点 } Q \text{ 关于 } y \text{ 轴对称点 } Q' \text{ 的坐标为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $(-5, -4)$

【解析】

【分析】先分别解一元一次方程 $3x + 7 = 32 - 2x$ 和二元一次方程组 $\begin{cases} 2a - b = 4 \\ -a + 2b = -8 \end{cases}$ ，求得点 Q 的坐标，再

根据直角坐标系中点的坐标的规律即可求解.

【详解】解： $3x + 7 = 32 - 2x$,

移项合并同类项得， $5x = 25$,

系数化为 1 得， $x = 5$,

$\therefore$ 点 Q 的横坐标为 5,

$$\therefore \begin{cases} 2a - b = 4 \text{ ①} \\ -a + 2b = -8 \text{ ②} \end{cases},$$

由 ① + 2 × ② 得， $3b = -12$ ，解得： $b = -4$,

把 $b = -4$ 代入 ① 得， $2a + 4 = 4$ ，解得： $a = 0$,

$$\therefore a + b = 0 - 4 = -4,$$

$\therefore$ 点 Q 的纵坐标为 -4 ,

$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(5, -4)$,

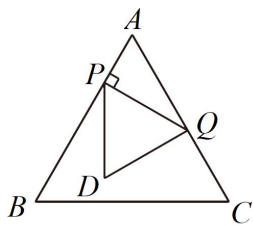
$\therefore$ 点 Q 关于 y 轴对称点 Q' 的坐标为 $(-5, -4)$,

故答案为： $(-5, -4)$.

【点睛】本题考查了坐标与图形变化——轴对称，解一元一次方程和解二元一次方程组、代数值求值、直角坐标系中点的坐标的规律，熟练掌握解一元一次方程和解二元一次方程组的方法求得点 Q 的坐标是解题的关键.

16. 如图，等边三角形 ABC 的边长为 6cm，动点 P 从点 A 出发以 2cm/s 的速度沿 AB 向点 B 匀速运动，过点 P 作 $PQ \perp AB$ ，交边 AC 于点 Q ，以 PQ 为边作等边三角形 PQD ，使点 A, D 在 PQ 异侧，当点 D

落在 BC 边上时，点 P 需移动_____s.



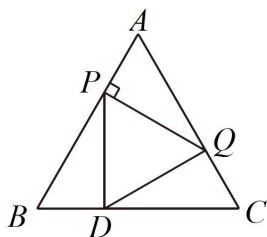
【答案】1

【解析】

【分析】当点 D 落在 BC 上时，如图， $BP = AB - AP = 6 - 2x$ ，根据 $\triangle PQD$ 等边三角形， $\triangle ABC$ 是等边三角形，证明 $\triangle APQ \cong \triangle BDP$ ，进而可得 x 的值.

【详解】解：设点 P 的运动时间为 $x(s)$ ，由题意得 $AP = 2x$ ，

$$BP = AB - AP = 6 - 2x,$$



$$\because PQ \perp AB,$$

$$\therefore \angle QPA = 90^\circ,$$

$$\because \triangle PQD \text{ 和 } \triangle ABC \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle DPQ = 60^\circ, PQ = PD,$$

$$\therefore \angle BPD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle PDB = 90^\circ,$$

$$\therefore PD \perp BC,$$

$$\therefore \triangle APQ \cong \triangle BDP (AAS),$$

$$\therefore BD = AP = 2x,$$

$$\because BP = 2BD,$$

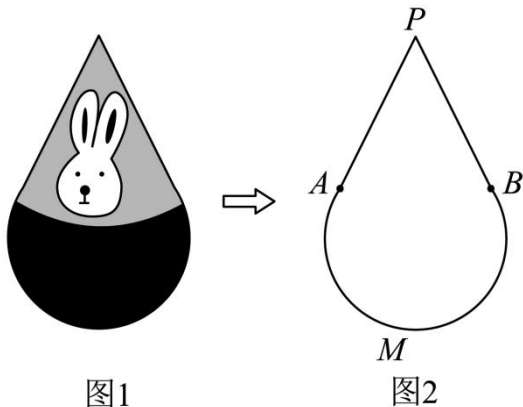
$$\therefore 6 - 2x = 4x,$$

解得 $x = 1$.

故答案为：1.

【点睛】本题主要考查等边三角形的性质，含 30° 角的直角三角形的性质，全等三角形的判定和性质，灵活运用等边三角形的性质是解题的关键.

17. 某款“不倒翁”（如图1）的主视图是图2， PA, PB 分别与 $\widehat{AMB}$ 所在圆相切于点 A, B ，若该圆半径是 10cm , $\angle P = 60^\circ$ ，则主视图的面积为 $\underline{\hspace{2cm}} \text{cm}^2$.

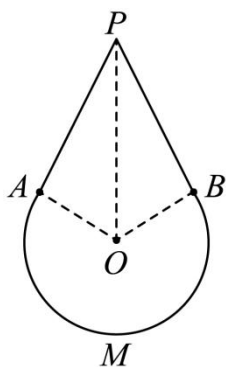


【答案】 $\left(100\sqrt{3} + \frac{200\pi}{3}\right)$

【解析】

【分析】根据题意，先找到圆心 O ，然后根据 PA, PB 分别与 $\widehat{AMB}$ 所在圆相切于点 A, B ， $\angle P = 60^\circ$ 可以得到 $\angle AOB$ 的度数，然后即可得到优弧 AMB 对应的圆心角，再根据主视图的面积为 $S_{\triangle PAO} + S_{\triangle PBO} + S_{\text{扇形}AMB}$ 计算即可.

【详解】解：设圆心为 O ，过 O 作 $AO \perp PA$ ， $BO \perp PB$ ， AO 和 BO 相交于点 O ，连接 OP ，如图，



$\because PA, PB$ 分别与 $\widehat{AMB}$ 所在圆相切于点 A, B .

$\therefore \angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$,

$\because \angle P = 60^\circ$,

$\therefore \angle AOB = 120^\circ$, $\angle AOP = \angle BOP = 60^\circ$,

$\therefore$ 优弧 AMB 对应的圆心角为 $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$, $\angle APO = \angle BPO = 30^\circ$,

∴该圆半径是10cm,

$$\therefore PB = PA = \sqrt{3}OA = 10\sqrt{3},$$

∴主视图的面积为 $S_{\triangle PAO} + S_{\triangle PBO} + S_{\text{扇形}AMB}$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times 10 \times 10\sqrt{3} + \frac{240\pi \times 10^2}{360}$$

$$= \left(100\sqrt{3} + \frac{200\pi}{3} \right) \text{cm}^2,$$

$$\text{故答案为: } \left(100\sqrt{3} + \frac{200\pi}{3} \right).$$

【点睛】本题考查了切线的性质，含30度角的直角三角形的性质，求扇形面积，牢记扇形面积公式是解题的关键.

三、解答题（本题包括9道小题，共69分，每小题分值均在各题号后面标出，请在答题卡上写出各题解答的文字说明、证明过程或计算步骤）

18. 计算: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \tan 45^\circ - \sqrt{(-10)^2}.$

【答案】0

【解析】

【分析】根据负整数次幂、特殊角的三角函数值、算术平方根化简，然后在计算即可.

【详解】解: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \tan 45^\circ - \sqrt{(-10)^2},$

$$= 9 + 1 - 10,$$

$$= 0.$$

【点睛】本题主要考查了负整数次幂、特殊角的三角函数值、算术平方根等知识点，掌握基本的运算法则是解答本题的关键.

19. 以下是某同学化简分式 $\frac{a-b}{a} \div \left(a - \frac{2ab-b^2}{a}\right)$ 的部分运算过程:

解: 原式 $= \frac{a-b}{a} \div a - \frac{a-b}{a} + \frac{2ab-b^2}{a}$ 第一步

$$= \frac{a-b}{a} \cdot \frac{1}{a} - \frac{a-b}{a} \cdot \frac{a}{2ab-b^2} \dots\dots\dots \text{第二步}$$

$$= \frac{a-b}{a^2} = \frac{a-b}{2ab-b^2} \dots\dots\dots \text{第三步}$$

.....

(1) 上面的运算过程中第_____步开始出现了错误;

(2) 请你写出完整的解答过程.

【答案】(1) 一 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据解答过程逐步分析即可解答;

(2) 根据分式混合运算法则进行计算即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \frac{a-b}{a} \div \left(a - \frac{2ab-b^2}{a} \right)$$

$$= \frac{a-b}{a} \div \left(\frac{a^2}{a} - \frac{2ab-b^2}{a} \right)$$

$$= \frac{a-b}{a} \div \left(\frac{a^2-2ab+b^2}{a} \right)$$

故第一步错误.

故答案为: 一.

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \frac{a-b}{a} \div \left(a - \frac{2ab-b^2}{a} \right)$$

$$= \frac{a-b}{a} \div \left(\frac{a^2}{a} - \frac{2ab-b^2}{a} \right)$$

$$= \frac{a-b}{a} \div \frac{a^2-2ab+b^2}{a}$$

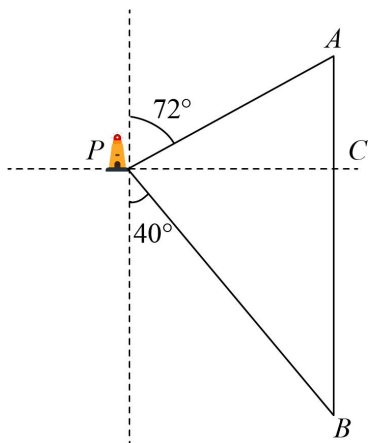
$$= \frac{a-b}{a} \div \frac{(a-b)^2}{a}$$

$$= \frac{a-b}{a} \times \frac{a}{(a-b)^2}$$

$$= \frac{1}{a-b}.$$

【点睛】本题主要考查了分式的混合运算，灵活运用分式的混合运算是解答本题的关键.

20. 如图，一艘海轮位于灯塔 P 的北偏东 72° 方向，距离灯塔 100nmile 的 A 处，它沿正南方向航行一段时间后，到达位于灯塔 P 的南偏东 40° 方向上的 B 处. 这时， B 处距离灯塔 P 有多远（结果取整数）？（参考数据： $\sin 72^\circ \approx 0.95$, $\cos 72^\circ \approx 0.31$, $\tan 72^\circ \approx 3.08$, $\sin 40^\circ \approx 0.64$, $\cos 40^\circ \approx 0.77$, $\tan 40^\circ \approx 0.84$.）



【答案】 B 处距离灯塔 P 大约有 148nmile .

【解析】

【分析】在 $\text{Rt}\triangle APC$ 中，求出 PC 的长，再在 $\text{Rt}\triangle BPC$ 中，求出 BP 即可.

【详解】解：设 AB 与灯塔 P 的正东方向相交于点 C ,

根据题意，得 $\angle A = 72^\circ$ ， $\angle B = 40^\circ$ ， $AP = 100\text{nmile}$ ；

在 $\text{Rt}\triangle APC$ 中，

$$\therefore \sin A = \frac{PC}{AP},$$

$$\therefore PC = AP \cdot \sin 72^\circ = 100 \times 0.95 = 95;$$

在 $\text{Rt}\triangle BPC$ 中， $\angle B = 40^\circ$,

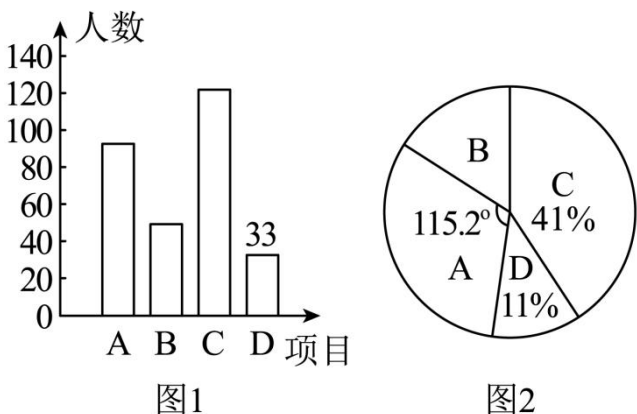
$$\therefore \sin B = \frac{PC}{PB},$$

$$\therefore PB = \frac{PC}{\sin 40^\circ} = \frac{95}{0.64} \approx 148(\text{nmile}),$$

答： B 处距离灯塔 P 大约有 148nmile .

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用—方向角问题，结合航海中的实际问题，将解直角三角形的相关知识有机结合，体现了数学应用于实际生活的思想.

21. 党的十八大以来，习近平总书记对推动全民阅读、建设书香中国高度重视，多次作出重要指示。×××中学在第28个“世界读书日”到来之际，对全校2000名学生阅读课外书的情况进行了解，随机抽取部分学生进行问卷调查，形成了如下调查报告（不完整）：

调查方式	抽样调查	调查对象	×××中学部分学生
平均每周阅读课外书的时间大约是（只能单选，每项含最小值，不含最大值） A. 8 小时以上 B. 6-8 小时 C. 4~6 小时 D. 0~4 小时		平均每周阅读课外书的时间调查统计图  图1 图2	

请解答下列问题：

- (1) 求参与本次抽样调查的学生人数；
- (2) 求图2中扇形A所占百分比；
- (3) 估计该校2000名学生中，平均每周阅读课外书的时间在“6~8小时”人数；
- (4) 在学生众多阅读书籍中，学校推荐阅读书目为四大名著：《三国演义》《红楼梦》《西游记》《水浒传》（分别记为甲、乙、丙、丁），现从这4部名著中选择2部为课外必读书籍，请用列表法或画树状图法中任意一种方法，求《西游记》被选中的概率。

【答案】(1) 300 (2) 32%

(3) 320 (4) $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 结合条形统计图和扇形统计图，根据平均每周阅读课外书的时间在“0~4小时”中人数及其所占百分比可得总人数；

(2) 用扇形A的圆心角 115.2° 除以 360° 即可求得扇形A所占百分比；

(3) 根据扇形统计图求得平均每周阅读课外书的时间在“6~8小时”所占的百分比，用总人数乘以百分比即可求得；

(4) 画树状图得出所有等可能的结果数和《西游记》被选中的结果数，再利用概率公式可得出答案。

【小问1详解】

在这次调查中一共抽查学生 $33 \div 11\% = 300$ （人），

即参与本次抽样调查的学生人数为 300 人.

【小问 2 详解】

扇形 A 所占百分比为 $\frac{115.2^\circ}{360^\circ} \times 100\% = 32\%$,

即扇形 A 所占百分比为 32% .

【小问 3 详解】

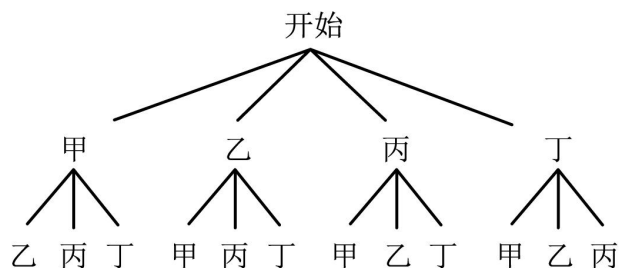
平均每周阅读课外书的时间在“6~8 小时”所占的百分比为 $1 - 32\% - 11\% - 41\% = 16\%$,

$\therefore 2000 \times 16\% = 320$ (人),

即该校 2000 名学生中, 平均每周阅读课外书的时间在“6~8 小时”人数为 320 人.

【小问 4 详解】

画树状图如下:



共有 12 种等可能的结果, 其中《西游记》被选中的结果有 6 种,

$\therefore$ 《西游记》被选中的概率为 $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

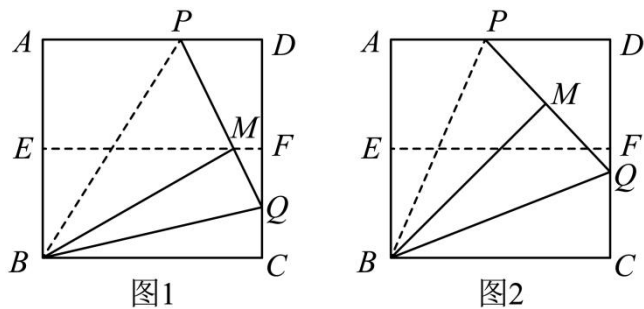
【点睛】 本题考查了条形统计图和扇形统计图的信息关联, 求扇形统计图的相关数据, 样本估计总体, 列表法或画树状图法求概率等, 熟练掌握列表法与树状图法以及用样本估计总体是解题的关键.

22. 综合与实践课上, 老师让同学们以“正方形的折叠”为主题开展数学活动, 有一位同学操作过程如下:

操作一: 对折正方形纸片 $ABCD$, 使 AD 与 BC 重合, 得到折痕 EF , 把纸片展平;

操作二: 在 AD 上选一点 P , 沿 BP 折叠, 使点 A 落在正方形内部点 M 处, 把纸片展平, 连接 PM 、 BM ,

延长 PM 交 CD 于点 Q , 连接 BQ .



(1) 如图 1, 当点 M 在 EF 上时, $\angle EMB =$ _____ 度;

(2) 改变点 P 在 AD 上的位置 (点 P 不与点 A, D 重合) 如图 2, 判断 $\angle MBQ$ 与 $\angle CBQ$ 的数量关系, 并说明理由.

【答案】(1) 30° (2) $\angle MBQ = \angle CBQ$, 理由见解析

【解析】

【分析】(1) 由正方形的性质结合折叠的性质可得出 $BM = AB = 2BE$, $\angle BEF = 90^\circ$, 进而可求出 $\sin \angle EMB = \frac{1}{2}$, 即得出 $\angle EMB = 30^\circ$;

(2) 由正方形的性质结合折叠的性质可证 $\text{Rt}\triangle BCQ \cong \text{Rt}\triangle BMQ$ (HL), 即得出 $\angle MBQ = \angle CBQ$.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 对折正方形纸片 $ABCD$, 使 AD 与 BC 重合, 得到折痕 EF ,

$\therefore AB = BC = CD = AD = 2BE$, $\angle BEF = 90^\circ$.

$\because$ 在 AD 上选一点 P , 沿 BP 折叠, 使点 A 落在正方形内部点 M 处,

$\therefore BM = AB = 2BE$.

在 $\text{Rt}\triangle BEM$ 中, $\sin \angle EMB = \frac{BE}{BM} = \frac{BE}{2BE} = \frac{1}{2}$,

$\therefore \angle EMB = 30^\circ$.

故答案为: 30° .

【小问 2 详解】

解: 结论: $\angle MBQ = \angle CBQ$, 理由如下:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AB = BC$, $\angle BAD = \angle C = 90^\circ$.

由折叠可得: $AB = BM$, $\angle BAD = \angle BMP = 90^\circ$,

$\therefore BM = BC$, $\angle BMQ = \angle C = 90^\circ$.

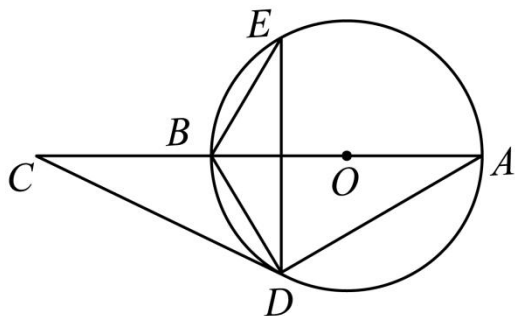
又 $\because BQ = BQ$,

$\therefore \text{Rt}\triangle BCQ \cong \text{Rt}\triangle BMQ$ (HL),

$\therefore \angle MBQ = \angle CBQ$.

【点睛】 本题主要考查正方形的性质、折叠的性质、解直角三角形、三角形全等的判定和性质、勾股定理等知识点. 熟练掌握上述知识并利用数形结合的思想是解题关键.

23. 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, D, E 是 $\odot O$ 上的两点, 延长 AB 至点 C , 连接 CD , $\angle BDC = \angle A$.



- (1) 求证: $\triangle ACD \sim \triangle DCB$;
- (2) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;
- (3) 若 $\tan E = \frac{3}{5}$, $AC = 10$, 求 $\odot O$ 的半径.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) $\odot O$ 的半径为 3.2.

【解析】

【分析】(1) 利用两角对应相等两个三角形相似, 得出结论;

(2) 连接 OD , 由圆周角定理得出 $\angle ADB = 90^\circ$, 证出 $OD \perp CD$, 由切线的判定可得出结论;

(3) 由相似三角形的性质得出 $\frac{CD}{AC} = \frac{BC}{CD} = \frac{BD}{DA} = \frac{3}{5}$, 由比例线段求出 CD 和 BC 的长, 可求出 AB 的长, 则可得出答案.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle ACD = \angle DCB$, $\angle BDC = \angle A$,

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle DCB$;

【小问 2 详解】

证明: 连接 OD ,

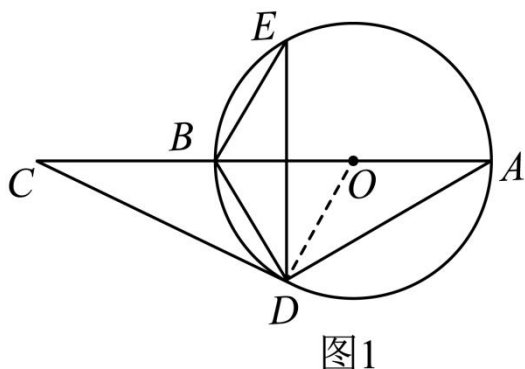


图1

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$,

$\therefore \angle A + \angle ABD = 90^\circ$,

$\because OB = OD,$
 $\therefore \angle ABD = \angle ODB,$
 $\because \angle BDC = \angle A,$
 $\therefore \angle BDC + \angle ODB = 90^\circ,$
 $\therefore \angle ODC = 90^\circ,$
 $\therefore OD \perp CD,$
 $\because OD$ 是 $\odot O$ 的半径,
 $\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 3 详解】

解: $\because \angle ADB = 90^\circ, \tan E = \frac{3}{5}, \angle A = \angle E,$
 $\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{3}{5},$
 $\because \triangle ACD \sim \triangle DCB,$
 $\therefore \frac{CD}{AC} = \frac{BC}{CD} = \frac{BD}{DA} = \frac{3}{5},$
 $\therefore AC = 10,$
 $\therefore CD = 6, BC = \frac{18}{5} = 3.6,$
 $\therefore AB = AC - BC = 10 - 3.6 = 6.4.$
 $\therefore \odot O$ 的半径为 3.2.

【点睛】 本题考查了切线的判定，相似三角形的判定与性质，锐角三角函数的定义，圆周角定理，根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键.

24. 某搬运公司计划购买 A, B 两种型号的机器搬运货物，每台 A 型机器比每台 B 型机器每天少搬运 10 吨货物，且每台 A 型机器搬运 450 吨货物与每台 B 型机器搬运 500 吨货物所需天数相同.

- (1) 求每台 A 型机器， B 型机器每天分别搬运货物多少吨？
- (2) 每台 A 型机器售价 1.5 万元，每台 B 型机器售价 2 万元，该公司计划采购两种型号机器共 30 台，满足每天搬运货物不低于 2880 吨，购买金额不超过 55 万元，请帮助公司求出最省钱的采购方案.

【答案】 (1) 每台 A 型机器， B 型机器每天分别搬运货物 90 吨和 100 吨

(2) 当购买 A 型机器人 12 台， B 型机器人 18 台时，购买总金额最低是 54 万元.

【解析】

【分析】 (1) 设每台 B 型机器每天搬运 x 吨，则每台 A 型机器每天搬运 $(x-10)$ 吨，根据题意列出分式方程，解方程、检验后即可解答；

(2 设公司计划采购 A 型机器 m 台, 则采购 B 型机器 $(30-m)$ 台, 再题意列出一元一次不等式组, 解不等式组求出 m 的取值范围, 再列出公司计划采购 A 型机器 m 台与采购支出金额 w 的函数关系式, 最后利用一次函数的增减性求最值即可.

【小问 1 详解】

解: 设每台 B 型机器每天搬运 x 吨, 则每台 A 型机器每天搬运 $(x-10)$ 吨,

由题意可得: $\frac{450}{x-10} = \frac{500}{x}$,

解得: $x = 100$

经检验, $x = 100$ 是分式方程 $\frac{450}{x-10} = \frac{500}{x}$ 的解

每台 A 型机器每天搬运 $x-10 = 100-10 = 90$ 吨

答: 每台 A 型机器, B 型机器每天分别搬运货物 90 吨和 100 吨

【小问 2 详解】

解: 设公司计划采购 A 型机器 m 台, 则采购 B 型机器 $(30-m)$ 台

由题意可得:
$$\begin{cases} 90m + 100(30-m) \geq 2880 \\ 1.5m + 2(30-m) \leq 55 \end{cases}$$
,

解得: $10 \leq m \leq 12$,

公司采购金额: $w = 1.5m + 2(30-m) = -0.5m + 60$

$\because -0.5 < 0$

$\therefore w$ 随 m 的增大而减小

$\therefore$ 当 $m = 12$ 时, 公司采购金额 w 有最小值, 即 $w = -0.5 \times 12 + 60 = 54$,

$\therefore$ 当购买 A 型机器人 12 台, B 型机器人 18 台时, 购买总金额最低是 54 万元.

【点睛】本题主要考查了分式方程的应用、不等式组的应用、一次函数的应用等知识点, 理解题意正确列出分式方程、不等式组和一次函数解析式是解答本题的关键.

25. 阅读材料:

材料 1: 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个实数根 x_1, x_2 和系数 a, b, c 有如下关系:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

材料 2: 已知一元二次方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个实数根分别为 m, n , 求 $m^2 n + m n^2$ 的值.

解: $\because m, n$ 是一元二次方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个实数根,

$$\therefore m+n=1, mn=-1.$$

$$\text{则 } m^2n+mn^2=mn(m+n)=-1\times 1=-1.$$

根据上述材料，结合你所学的知识，完成下列问题：

(1) 应用：一元二次方程 $2x^2+3x-1=0$ 的两个实数根为 x_1, x_2 ，则 $x_1+x_2=$ _____，

$$x_1x_2=_____;$$

(2) 类比：已知一元二次方程 $2x^2+3x-1=0$ 的两个实数根为 m, n ，求 m^2+n^2 的值；

(3) 提升：已知实数 s, t 满足 $2s^2+3s-1=0, 2t^2+3t-1=0$ 且 $s \neq t$ ，求 $\frac{1}{s}-\frac{1}{t}$ 的值.

【答案】(1) $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$

(2) $\frac{13}{4}$

(3) $\frac{1}{s}-\frac{1}{t}$ 的值为 $\sqrt{17}$ 或 $-\sqrt{17}$.

【解析】

【分析】(1) 直接利用一元二次方程根与系数的关系求解即可；

(2) 利用一元二次方程根与系数的关系可求出 $m+n=-\frac{3}{2}, mn=-\frac{1}{2}$ ，再根据 $m^2+n^2=(m+n)^2-2mn$ ，

最后代入求值即可；

(3) 由题意可将 s, t 可以看作方程 $2x^2+3x-1=0$ 的两个根，即得出 $s+t=-\frac{3}{2}, st=-\frac{1}{2}$ ，从而由

$$(t-s)^2=(t+s)^2-4st, \text{ 求得 } t-s=\frac{\sqrt{17}}{2} \text{ 或 } t-s=-\frac{\sqrt{17}}{2}, \text{ 最后分类讨论分别代入求值即可.}$$

【小问 1 详解】

解： $\because$ 一元二次方程 $2x^2+3x-1=0$ 的两个根为 x_1, x_2 ，

$$\therefore x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{2}, x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}.$$

故答案为： $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$ ；

【小问 2 详解】

解： $\because$ 一元二次方程 $2x^2+3x-1=0$ 的两根分别为 m, n ，

$$\therefore m+n=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{2}, mn=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}
 \therefore m^2 + n^2 &= (m+n)^2 - 2mn \\
 &= \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{9}{4} + 1 \\
 &= \frac{13}{4};
 \end{aligned}$$

【小问3详解】

解： $\because$ 实数 s, t 满足 $2s^2 + 3s - 1 = 0, 2t^2 + 3t - 1 = 0$,

$\therefore s, t$ 可以看作方程 $2x^2 + 3x - 1 = 0$ 的两个根,

$$\therefore s + t = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}, \quad st = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore (t-s)^2 = (t+s)^2 - 4st$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{17}{4},
 \end{aligned}$$

$$\therefore t-s = \frac{\sqrt{17}}{2} \text{ 或 } t-s = -\frac{\sqrt{17}}{2},$$

当 $t-s = \frac{\sqrt{17}}{2}$ 时,

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{t} = \frac{t-s}{st} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{17},$$

当 $t-s = -\frac{\sqrt{17}}{2}$ 时,

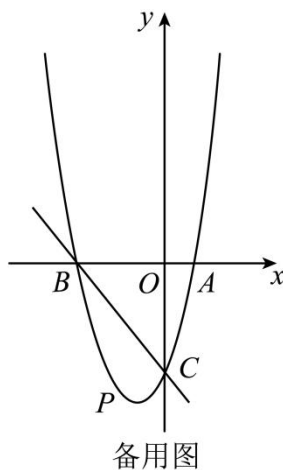
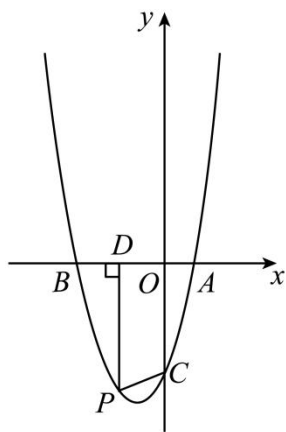
$$\frac{1}{s} - \frac{1}{t} = \frac{t-s}{st} = \frac{-\frac{\sqrt{17}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{17},$$

综上所述可知, $\frac{1}{s} - \frac{1}{t}$ 的值为 $\sqrt{17}$ 或 $-\sqrt{17}$.

【点睛】 本题考查一元二次方程根与系数的关系, 完全平方公式的变形计算, 分式的混合运算. 理解题意,

掌握一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 根与系数的关系： $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ 和 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ 是解题关键.

26. 在平面直角坐标系中, 已知抛物线 $y = ax^2 + \frac{8}{3}x + c (a \neq 0)$ 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 $C(0, -4)$.



(1) 求这条抛物线的函数解析式;

(2) P 是抛物线上一动点 (不与点 A, B, C 重合), 作 $PD \perp x$ 轴, 垂足为 D , 连接 PC .

①如图, 若点 P 在第三象限, 且 $\tan \angle CPD = 2$, 求点 P 的坐标;

②直线 PD 交直线 BC 于点 E , 当点 E 关于直线 PC 的对称点 E' 落在 y 轴上时, 请直接写出四边形 $PECE'$ 的周长.

【答案】 (1) $y = \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 4$

(2) ① $P\left(-\frac{13}{8}, -\frac{77}{16}\right)$ ② $\frac{35}{3}$ 或 $\frac{85}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 将 A, C 两点坐标代入抛物线的解析式, 从而求得 a, c , 进而求得结果;

(2) ①设 $P\left(x, \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 4\right)$, 过点 C 作 $CE \perp PD$ 于点 E , 求出 PE, CE , 根据 $\tan \angle CPD = \frac{CE}{PE} = 2$

列出方程求出 x 的值即可;

②可推出四边形 $PECE'$ 是菱形, 从而得出 $PE = CE$, 分别表示出 PE 和 CE , 从而列出方程, 进一步求得结果.

【小问 1 详解】

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + \frac{8}{3}x + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$, 与 y 轴交于点 $C(0, -4)$,

$\therefore$ 把 $A(1, 0)$, $C(0, -4)$ 代入 $y = ax^2 + \frac{8}{3}x + c$ ($a \neq 0$) 得,

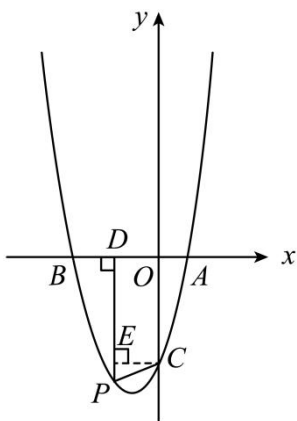
$$\begin{cases} a + \frac{8}{3} + c = 0 \\ c = -4 \end{cases},$$

解得, $\begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ c = -4 \end{cases}$,

$\therefore$ 抛物线的函数解析式为 $y = \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 4$;

【小问 2 详解】

① 设 $P\left(x, \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 4\right)$, 过点 C 作 $CE \perp PD$ 于点 E , 如图,



$\therefore \angle PEC = \angle CED = 90^\circ$,

$\therefore C(0, -4)$,

$\therefore OC = 4$,

$\therefore PD \perp x$ 轴,

$\therefore \angle PDO = 90^\circ$,

又 $\angle DOC = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $DOCE$ 是矩形,

$\therefore DE = OC = 4, DO = CE = -x$,

$$\therefore PE = PD - DE = -\left(\frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 4\right) - 4 = -\frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x,$$

$$\therefore \tan \angle CPD = \frac{CE}{PE} = 2,$$

$$\therefore \frac{-x}{-\frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x} = 2,$$

$$\therefore x_1 = -\frac{13}{8}, x_2 = 0 \text{ (不合题意, 舍去)}$$

$$\therefore \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 4 = -\frac{77}{16},$$

$$\therefore P\left(-\frac{13}{8}, -\frac{77}{16}\right);$$

$$\textcircled{2} \text{ 设 } P\left(m, \frac{4}{3}m^2 + \frac{8}{3}m - 4\right),$$

$$\text{对于 } y = \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 4, \text{ 当 } y = 0 \text{ 时, } \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 4 = 0,$$

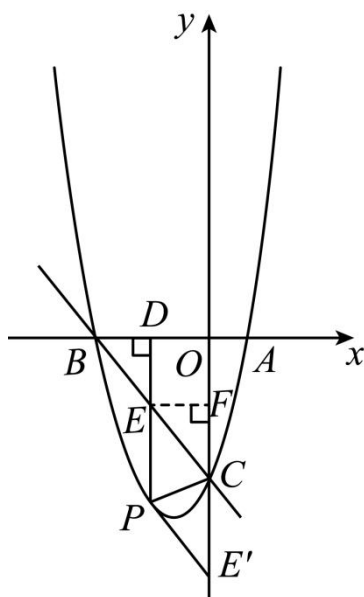
$$\text{解得, } x_1 = 1, x_2 = -3,$$

$$\therefore B(-3, 0),$$

$$\therefore OC = 4,$$

$$\text{由勾股定理得, } BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 5;$$

当点 P 在第三象限时, 如图, 过点 E 作 $EF \perp y$ 轴于点 F ,



则四边形 $DEFO$ 是矩形,

$$\therefore EF = DO = -m,$$

$\because$ 点 E 与点 E' 关于 PC 对称,

$$\therefore \angle ECP = \angle E'CP, CE = CE',$$

$\because PE \parallel y$ 轴,

$$\therefore \angle EPC = \angle PCE',$$

$$\therefore \angle EPC = \angle ECP,$$

$$\therefore PE = CE,$$

$$\therefore PE = CE',$$

$\therefore$ 四边形 $PECE'$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $PECE'$ 是菱形,

$\because EF \parallel OA,$

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle CBO,$$

$$\therefore \frac{CE}{BC} = \frac{EF}{BO},$$

$$\therefore \frac{CE}{5} = \frac{-m}{3},$$

$$\therefore CE = -\frac{5}{3}m,$$

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{把 } B(-3, 0), C(0, -4) \text{ 代入得, } \begin{cases} -3k + b = 0 \\ b = -4 \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} k = -\frac{4}{3} \\ b = -4 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 的解析式为 } y = -\frac{4}{3}x - 4,$$

$$\therefore E\left(m, -\frac{4}{3}m - 4\right),$$

$$\therefore PE = -\left(\frac{4}{3}m^2 + \frac{8}{3}m - 4\right) + \left(-\frac{4}{3}m - 4\right) = -\frac{4}{3}m^2 - \frac{12}{3}m,$$

