

2023 年赤峰市初中毕业、升学统一考试试卷

数学

温馨提示：

1. 本试卷卷面分值 150 分，共 8 页，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必将姓名、座位号、考生号填写在答题卡的对应位置上，并仔细阅读答题卡上的“注意事项”。
3. 答题时，请将答案填涂在答题卡上，写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题（每小题只有一个选项符合题意，请将该选项的序号按要求在答题卡上的指定位置涂黑。每小题 3 分，共 42 分）

1. 化简 $-(-20)$ 的结果是 ()

A. $-\frac{1}{20}$

B. 20

C. $\frac{1}{20}$

D. -20

【答案】B

【解析】

【分析】 $-(-20)$ 表示 -20 的相反数，据此解答即可。

【详解】解： $-(-20) = 20$ ，

故选：B

【点睛】此题考查了相反数，熟练掌握相反数的定义是解题的关键。

2. 剪纸艺术是最古老的中国民间艺术之一，先后入选中国国家级非物质文化遗产名录和人类非物质文化遗产代表作名录。以下剪纸中，为中心对称图形的是 ()



【答案】C

【解析】

【分析】根据在平面内，把一个图形绕着某点旋转 180 度，如果旋转后得到的图形能够与原图形重合，那么这个图形就叫中心对称图形，据此即可解答。

【详解】A. 不是中心对称图形，故不符合题意；

- B. 不是中心对称图形，故不符合题意；
- C. 既是轴对称图形，又是中心对称图形，故符合题意；
- D. 不是中心对称图形，故不符合题意，

故选：C.

【点睛】本题考查中心对称图形的识别，解题的关键是熟练掌握中心对称图形的概念.

3. 2023年5月19日是第13个“中国旅游日”. 文化和旅游部公布的数据显示，今年“五一”假期国内出游合计274000000人次，同比增长70.83%. 将数字274000000用科学记数法表示为()

- A. 0.274×10^7 B. 2.74×10^8 C. 27.4×10^7 D. 274×10^8

【答案】B

【解析】

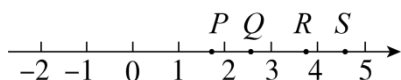
【分析】科学记数法的表现形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数，确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同，由此进行求解即可得到答案.

【详解】解： $274000000 = 2.74 \times 10^8$,

故选 B.

【点睛】本题主要考查了科学记数法，解题的关键在于能够熟练掌握科学记数法的定义和表示法.

4. 如图，数轴上表示实数 $\sqrt{7}$ 的点可能是()



- A. 点 P B. 点 Q C. 点 R D. 点 S

【答案】B

【解析】

【分析】根据先估算 $\sqrt{7}$ 的大小，看它介于哪两个整数之间，从而得解.

【详解】解： $\because 4 < 7 < 9$

$\therefore \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$ ，即 $2 < \sqrt{7} < 3$ ，

$\therefore$ 数轴上表示实数 $\sqrt{7}$ 的点可能是 Q，

故选：B.

【点睛】本题考查无理数的大小估算，推出 $\sqrt{7}$ 介于哪两个整数之间是解题的关键.

5. 下列运算正确的是 ()

A. $(a^2b^3)^2 = a^4b^6$ B. $3ab - 2ab = 1$ C. $(-a)^3 \cdot a = a^4$ D. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

【答案】A

【解析】

【分析】根据幂的运算法则，乘法公式处理.

【详解】A. $(a^2b^3)^2 = a^4b^6$ ，正确，符合题意；

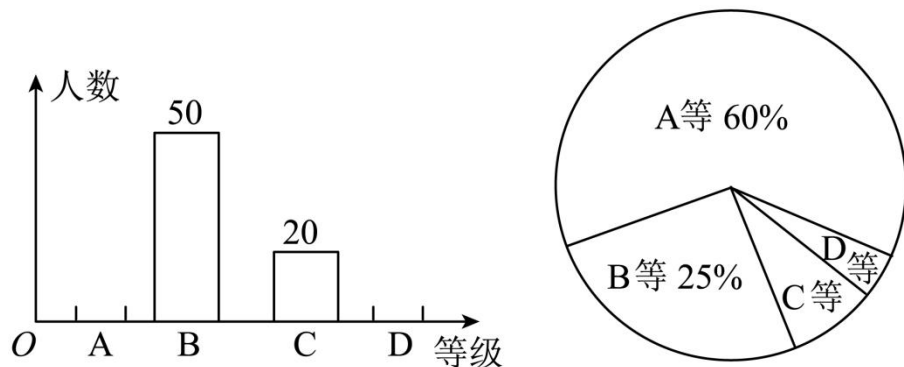
B. $3ab - 2ab = ab$ ，原计算错误，本选项不合题意；

C. $(-a)^3 \cdot a = -a^4$ ，原计算错误，本选项不合题意；

D. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ，原计算错误，本选项不合题意；

【点睛】本题考查幂的运算法则，整式的运算，完全平方公式，掌握相关法则是解题的关键.

6. 2023年5月30日，神舟十六号载人飞船成功发射，成为我国航天事业的里程碑，某校对全校1500名学生进行了“航空航天知识”了解情况的调查，调查结果分为A，B，C，D四个等级（A：非常了解；B：比较了解；C：了解；D：不了解）. 随机抽取了部分学生的调查结果，绘制成两幅不完整的统计图. 根据统计图信息，下列结论不正确的是（ ）



A. 样本容量是200

B. 样本中C等级所占百分比是10%

C. D等级所在扇形的圆心角为 15°

D. 估计全校学生A等级大约有900人

【答案】C

【解析】

【分析】用B等的人数除以B等的百分比即可得到样本容量，用C等级人数除以总人数计算样本中C等级所占百分比，用 360° 乘以D等级的百分比即可计算D等级所在扇形的圆心角，用全校学生数乘以A等级的百分比即可得到全校学生A等级人数，即可分别判断各选项.

【详解】解：A. $\because 50 \div 25\% = 200$ ，即样本容量为200，故选项正确，不符合题意；

B. 样本中C等级所占百分比是 $\frac{20}{200} \times 100\% = 10\%$ ，故选项正确，不符合题意；

C. 样本中 C 等级所占百分比是 $\frac{20}{200} \times 100\% = 10\%$ ，D 等级所在扇形的圆心角为

$360^\circ \times (1 - 60\% - 25\% - 10\%) = 18^\circ$ ，故选项错误，符合题意；

D. 估计全校学生 A 等级大约有 $1500 \times 60\% = 900$ (人)，故选项正确，不符合题意.

故选：C.

【点睛】此题考查了条形统计图和扇形统计图的信息关联，读懂题意，准确计算是解题的关键.

7. 已知 $2a^2 - a - 3 = 0$ ，则 $(2a+3)(2a-3) + (2a-1)^2$ 的值是 ()

A. 6

B. -5

C. -3

D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】 $2a^2 - a - 3 = 0$ 变形为 $2a^2 - a = 3$ ，将 $(2a+3)(2a-3) + (2a-1)^2$ 变形为 $4(2a^2 - a) - 8$ ，然后整体代入求值即可.

【详解】解：由 $2a^2 - a - 3 = 0$ 得： $2a^2 - a = 3$ ，

$$\therefore (2a+3)(2a-3) + (2a-1)^2$$

$$= 4a^2 - 9 + 4a^2 - 4a + 1$$

$$= 8a^2 - 4a - 8$$

$$= 4(2a^2 - a) - 8$$

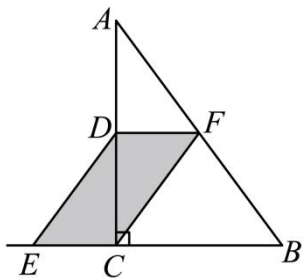
$$= 4 \times 3 - 8$$

$$= 4,$$

故选：D.

【点睛】本题主要考查了代数式求值，解题的关键是熟练掌握整式混合运算法则，将 $(2a+3)(2a-3) + (2a-1)^2$ 变形为 $4(2a^2 - a) - 8$.

8. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $BC = 6$. 点 F 是 AB 中点，连接 CF ，把线段 CF 沿射线 BC 方向平移到 DE ，点 D 在 AC 上. 则线段 CF 在平移过程中扫过区域形成的四边形 $CFDE$ 的周长和面积分别是()



A. 16, 6

B. 18, 18

C. 16, 12

D. 12, 16

【答案】C

【解析】

【分析】先论证四边形 $CFDE$ 是平行四边形，再分别求出 CF 、 CD 、 DF ，继而用平行四边形的周长公式和面积公式求解即可。

【详解】由平移的性质可知： $DF \parallel CE, DF = CE$ ，

$\therefore$ 四边形 $CFDE$ 是平行四边形，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $BC = 6$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， 点 F 是 AB 中点

$$\therefore CF = \frac{1}{2} AB = 5$$

$\because DF \parallel CE$ ， 点 F 是 AB 中点

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AB} = \frac{1}{2}, \quad \angle CDF = 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 点 D 是 AC 的中点，

$$\therefore CD = \frac{1}{2} AC = 4$$

$\because D$ 是 AC 的中点， 点 F 是 AB 中点，

$\therefore DF$ 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的中位线，

$$\therefore DF = \frac{1}{2} BC = 3$$

$$\therefore \text{四边形 } CFDE \text{ 的周长为: } 2(DF + CF) = 2 \times (5 + 3) = 16,$$

四边形 $CFDE$ 的面积为: $DF \times CD = 3 \times 4 = 12$ 。

故选: C.

【点睛】 本题考查平移的性质，平行四边形的判定与性质，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，平行线分线段成比例，三角形中位线定理等知识，推导四边形 $CFDE$ 是平行四边形和 DF 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的中位线是解题的关键。

9. 化简 $\frac{4}{x+2} + x - 2$ 的结果是 ()

A. 1

B. $\frac{x^2}{x^2-4}$

C. $\frac{x}{x+2}$

D. $\frac{x^2}{x+2}$

【答案】D

【解析】

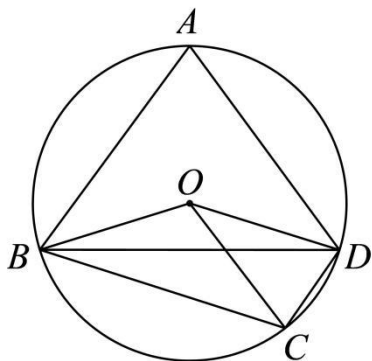
【分析】根据分式的加减混合运算法则即可求出答案.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \frac{4}{x+2} + x - 2 \\ &= \frac{4 + (x+2)(x-2)}{x+2} \\ &= \frac{x^2}{x+2}. \end{aligned}$$

故选 D.

【点睛】本题考查了分式的化简，解题的关键在于熟练掌握分式加减混合运算法则.

10. 如图，圆内接四边形 $ABCD$ 中， $\angle BCD = 105^\circ$ ，连接 OB ， OC ， OD ， BD ， $\angle BOC = 2\angle COD$ ，则 $\angle CBD$ 的度数是 ()



A. 25°

B. 30°

C. 35°

D. 40°

【答案】A

【解析】

【分析】根据圆内接四边形对角互补得出 $\angle A = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$ ，根据圆周角定理得出 $\angle BOD = 2\angle A = 150^\circ$ ，根据已知条件得出 $\angle COD = \frac{1}{3}\angle BOD = 50^\circ$ ，进而根据圆周角定理即可求解.

【详解】解：∵ 圆内接四边形 $ABCD$ 中， $\angle BCD = 105^\circ$ ，

$$\therefore \angle A = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

$$\therefore \angle BOD = 2\angle A = 150^\circ$$

$$\because \angle BOC = 2\angle COD$$

$$\therefore \angle COD = \frac{1}{3}\angle BOD = 50^\circ,$$

$$\because \widehat{CD} = \widehat{CD}$$

$$\therefore \angle CBD = \frac{1}{2}\angle COD = \frac{1}{2} \times 50^\circ = 25^\circ,$$

故选：A.

【点睛】本题考查了圆内接四边形对角互补，圆周角定理，熟练掌握以上知识是解题的关键.

11. 某校在劳动课上，设置了植树、种花、除草三个劳动项目. 九年一班和九年二班都通过抽签的方式从这三个项目中随机抽取一个项目，则这两个班级恰好都抽到种花的概率是（ ）

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{9}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据列表法求概率即可求解.

【详解】解：设 A, B, C 分别表示植树、种花、除草三个劳动项目，列表如下，

	A	B	C
A	AA	AB	AC
B	BA	BB	BC
C	CA	CB	CC

共有 9 种等可能结果，符合题意得出有 1 种，

$\therefore$ 这两个班级恰好都抽到种花的概率是 $\frac{1}{9}$ ，

故选：D.

【点睛】本题考查了列表法求概率，熟练掌握求概率的方法是解题的关键.

12. 用配方法解方程 $x^2 - 4x - 1 = 0$ 时，配方后正确的是（ ）

- A. $(x+2)^2 = 3$ B. $(x+2)^2 = 17$ C. $(x-2)^2 = 5$ D. $(x-2)^2 = 17$

【答案】C

【解析】

【分析】根据配方法，先将常数项移到右边，然后两边同时加上 4，即可求解.

【详解】解： $x^2 - 4x - 1 = 0$

移项得， $x^2 - 4x = 1$

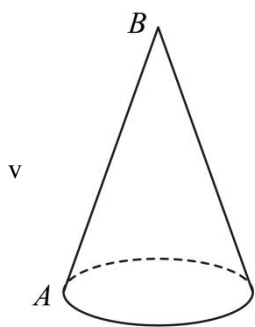
两边同时加上 4，即 $x^2 - 4x + 4 = 5$

$$\therefore (x-2)^2 = 5,$$

故选：C.

【点睛】本题考查了配方法解一元二次方程，熟练掌握配方法是解题的关键.

13. 某班学生表演课本剧，要制作一顶圆锥形的小丑帽. 如图，这个圆锥的底面圆周长为 20π cm，母线 AB 长为 30 cm，为了使帽子更美观，要粘贴彩带进行装饰，其中需要粘贴一条从点 A 处开始，绕侧面一周又回到点 A 的彩带（彩带宽度忽略不计），这条彩带的最短长度是（ ）



A. 30 cm

B. $30\sqrt{3}$ cm

C. 60 cm

D. 20π cm

【答案】B

【解析】

【分析】根据圆锥的底面圆周长求得半径为 10，根据母线长求得展开后的扇形的圆心角为 120° ，进而即可求解.

【详解】解： $\because$ 这个圆锥的底面圆周长为 20π cm，

$$\therefore 2\pi r = 20\pi$$

解得： $r = 10$

$$\therefore \frac{n\pi \times 30}{180} = 20\pi$$

解得： $n = 120$

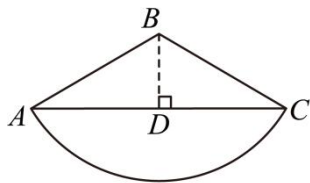
$\therefore$ 侧面展开图的圆心角为 120°

如图所示， AC 即为所求，过点 B 作 $BD \perp AC$ ，

$\because \angle ABC = 120^\circ$ ， $BA = BC$ ，则 $\angle BAC = 30^\circ$

$\because AB = 30$ ，则 $BD = 15$

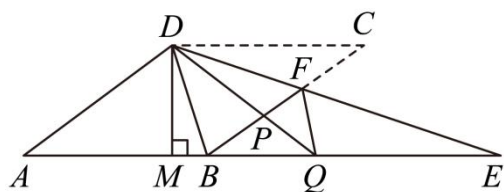
$$\therefore AD = 15\sqrt{3}, \quad AC = 2AD = 30\sqrt{3},$$



故选：B.

【点睛】本题考查了圆锥侧面展开图的圆心角的度数，勾股定理解直角三角形，求得侧面展开图的圆心角为 120° 解题的关键.

14. 如图，把一个边长为 5 的菱形 $ABCD$ 沿着直线 DE 折叠，使点 C 与 AB 延长线上的点 Q 重合. DE 交 BC 于点 F ，交 AB 延长线于点 E . DQ 交 BC 于点 P ， $DM \perp AB$ 于点 M ， $AM = 4$ ，则下列结论，
① $DQ = EQ$ ，② $BQ = 3$ ，③ $BP = \frac{15}{8}$ ，④ $BD \parallel FQ$. 正确的是 ()



- A. ①②③ B. ②④ C. ①③④ D. ①②③④

【答案】A

【解析】

【分析】由折叠性质和平行线的性质可得 $\angle QDF = \angle CDF = \angle QEF$ ，根据等角对等边即可判断①正确；根据等腰三角形三线合一的性质求出 $MQ = AM = 4$ ，再求出 BQ 即可判断②正确；由 $\triangle CDP \sim \triangle BQP$ 得 $\frac{CP}{BP} = \frac{CD}{BQ} = \frac{5}{3}$ ，求出 BP 即可判断③正确；根据 $\frac{EF}{DE} \neq \frac{QE}{BE}$ 即可判断④错误.

【详解】由折叠性质可知： $\angle CDF = \angle QDF, CD = DQ = 5$,

$\because CD \parallel AB$,

$\therefore \angle CDF = \angle QEF$.

$\therefore \angle QDF = \angle QEF$.

$\therefore DQ = EQ = 5$.

故①正确；

$$\therefore DQ = CD = AD = 5, \quad DM \perp AB,$$

$$\therefore MQ = AM = 4.$$

$$\therefore MB = AB - AM = 5 - 4 = 1,$$

$$\therefore BQ = MQ - MB = 4 - 1 = 3.$$

故②正确；

$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle CDP \sim \triangle BQP.$$

$$\therefore \frac{CP}{BP} = \frac{CD}{BQ} = \frac{5}{3}.$$

$$\therefore CP + BP = BC = 5,$$

$$\therefore BP = \frac{3}{8}BC = \frac{15}{8}.$$

故③正确；

$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle CDF \sim \triangle BEF.$$

$$\therefore \frac{DF}{EF} = \frac{CD}{BE} = \frac{CD}{BQ + QE} = \frac{5}{3 + 5} = \frac{5}{8}.$$

$$\therefore \frac{EF}{DE} = \frac{8}{13}.$$

$$\therefore \frac{QE}{BE} = \frac{5}{8},$$

$$\therefore \frac{EF}{DE} \neq \frac{QE}{BE}.$$

$\therefore \triangle EFQ$ 与 $\triangle EDB$ 不相似.

$$\therefore \angle EQF \neq \angle EBD.$$

$\therefore BD$ 与 FQ 不平行.

故④错误；

故选 A.

【点睛】本题主要考查了折叠的性质，平行线的性质，等腰三角形的性质，相似三角形的判定和性质，菱形的性质等知识，属于选择压轴题，有一定难度，熟练掌握相关性质是解题的关键.

二、填空题（请把答案填写在答题卡的相应横线上，每小题3分，共12分）

15. 分解因式： $x^3 - 9x = \underline{\hspace{2cm}}$.【答案】 $x(x+3)(x-3)$

【解析】

【分析】 先提取公因式 x 后继续应用平方差公式分解即可.【详解】 $x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x+3)(x-3)$.故答案为： $x(x+3)(x-3)$ 16. 方程 $\frac{1}{x+2} + \frac{x+6}{x^2-4} = 1$ 的解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.【答案】 $x = 4$

【解析】

【分析】 依据题意将分式方程化为整式方程，再按照因式分解即可求出 x 的值.【详解】 解： $\because \frac{1}{x+2} + \frac{x+6}{x^2-4} = 1$,方程两边同时乘以 $(x+2)(x-2)$ 得， $x-2+x+6 = (x+2)(x-2)$,

$$\therefore 2x+4 = x^2-4,$$

$$\therefore x^2-2x-8=0,$$

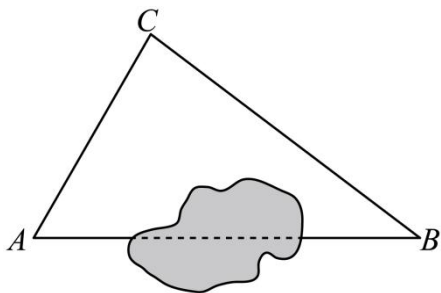
$$\therefore (x-4)(x+2)=0,$$

$$\therefore x=4 \text{ 或 } x=-2.$$

经检验 $x=-2$ 时， $x^2-4=0$ ，故舍去. $\therefore$ 原方程的解为： $x=4$.故答案为： $x=4$.

【点睛】 本题考查的是解分式方程，解题的关键在于注意分式方程必须检验根的情况.

17. 为发展城乡经济，建设美丽乡村，某乡对 A 地和 B 地之间的一处垃圾填埋场进行改造，把原来 A 地去往 B 地需要绕行到 C 地的路线，改造成可以直线通行的公路 AB. 如图，经勘测， $AC = 6$ 千米， $\angle CAB = 60^\circ$ ， $\angle CBA = 37^\circ$ ，则改造后公路 AB 的长是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 千米（精确到 0.1 千米；参考数据： $\sin 37^\circ \approx 0.60$ ， $\cos 37^\circ \approx 0.80$ ， $\tan 37^\circ \approx 0.75$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$ ）.

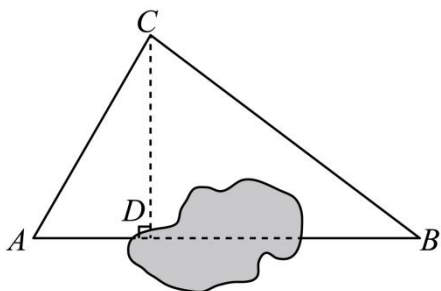


【答案】 9.9

【解析】

【分析】 如图所示，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ，分别解 $\text{Rt}\triangle ACD$, $\text{Rt}\triangle BCD$ ，求得 AD, DB ，进而即可求解.

【详解】 解：如图所示，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ，



在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中， $AC = 6$ ， $\angle CAB = 60^\circ$ ， $\cos A = \frac{AD}{AC}$ ， $\sin A = \frac{CD}{AC}$

$$\therefore AD = AC \times \cos A = \frac{1}{2} \times 6 = 3, \quad CD = AC \times \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

在 $\text{Rt}\triangle CDB$ 中， $\angle CBA = 37^\circ$ ， $CD = 3\sqrt{3}$ ， $\tan \angle CBD = \frac{CD}{DB}$ ，

$$\therefore DB = \frac{CD}{\tan \angle CBD} = \frac{3\sqrt{3}}{\tan 37^\circ} \approx \frac{3\sqrt{3}}{0.75} = 4\sqrt{3},$$

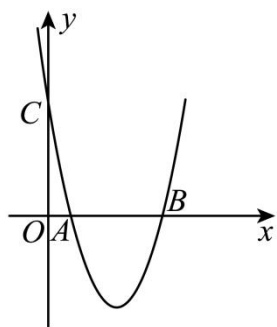
$$\therefore AB = AD + DB = 3 + 4\sqrt{3} = 3 + 4 \times 1.73 \approx 9.9 \text{ (千米)}$$

改造后公路 AB 的长是 9.9 千米，

故答案为：9.9.

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用，熟练掌握三角函数的定义是解题的关键.

18. 如图，抛物线 $y = x^2 - 6x + 5$ 与 x 轴交于点 A, B ，与 y 轴交于点 C ，点 $D(2, m)$ 在抛物线上，点 E 在直线 BC 上，若 $\angle DEB = 2\angle DCB$ ，则点 E 的坐标是_____.



【答案】 $(\frac{17}{5}, \frac{8}{5})$ 和 $(\frac{33}{5}, -\frac{8}{5})$

【解析】

【分析】先根据题意画出图形，先求出 D 点坐标，当 E 点在线段 BC 上时： $\angle DEB$ 是 $\triangle DCE$ 的外角， $\angle DEB = 2\angle DCB$ ，而 $\angle DEB = \angle DCE + \angle CDE$ ，所以此时 $\angle DCE = \angle CDE$ ，有 $CE = DE$ ，可求出 BC 所在直线的解析式 $y = -x + 5$ ，设 E 点 $(a, -a + 5)$ 坐标，再根据两点距离公式， $CE = DE$ ，得到关于 a 的方程，求解 a 的值，即可求出 E 点坐标；当 E 点在线段 CB 的延长线上时，根据题中条件，可以证明 $BC^2 + BD^2 = DC^2$ ，得到 $\angle DBC$ 为直角三角形，延长 EB 至 E' ，取 $BE' = BE$ ，此时， $\angle DE'E = \angle DEE' = 2\angle DCB$ ，从而证明 E' 是要找的点，应为 $OC = OB$ ， $\triangle OCB$ 为等腰直角三角形，点 E 和 E' 关于 B 点对称，可以根据 E 点坐标求出 E' 点坐标。

【详解】解：在 $y = x^2 - 6x + 5$ 中，当 $x = 0$ 时， $y = 5$ ，则有 $C(0, 5)$ ，

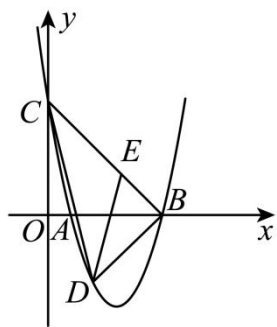
令 $y = 0$ ，则有 $x^2 - 6x + 5 = 0$ ，

解得： $x_1 = 1, x_2 = 6$ ，

$\therefore A(1, 0), B(5, 0)$ ，

根据 D 点坐标，有 $m = 2^2 - 6 \times 2 + 5 = -3$

所以 D 点坐标 $(2, -3)$



设 BC 所在直线解析式为 $y = kx + b$ ，其过点 $C(0, 5)$ 、 $B(5, 0)$

$$\text{有} \begin{cases} b = 5 \\ 5k + b = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -1 \\ b = 5 \end{cases}$$

$\therefore BC$ 所在直线的解析式为: $y = -x + 5$

当 E 点在线段 BC 上时, 设 $E(a, -a + 5)$

$$\angle DEB = \angle DCE + \angle CDE$$

$$\text{而 } \angle DEB = 2\angle DCB$$

$$\therefore \angle DCE = \angle CDE$$

$$\therefore CE = DE$$

因为: $E(a, -a + 5)$, $C(0, 5)$, $D(2, -3)$

$$\text{有 } \sqrt{a^2 + (-a + 5 - 5)^2} = \sqrt{(a - 2)^2 + [-a + 5 - (-3)]^2}$$

$$\text{解得: } a = \frac{17}{5}, \quad -a + 5 = \frac{8}{5}$$

所以 E 点的坐标为: $(\frac{17}{5}, \frac{8}{5})$

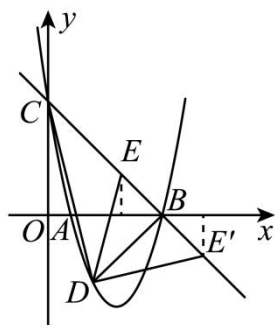
当 E 在 CB 的延长线上时,

$$\text{在 } \triangle BDC \text{ 中, } BD^2 = (5 - 2)^2 + 3^2 = 18, \quad BC^2 = 5^2 + 5^2 = 50, \quad DC^2 = (5 + 3)^2 + 2^2 = 68$$

$$\therefore BD^2 + BC^2 = DC^2$$

$$\therefore BD \perp BC$$

如图延长 EB 至 E' , 取 $BE' = BE$,



则有 $\triangle DEE'$ 为等腰三角形, $DE = DE'$,

$$\therefore \angle DEE' = \angle DE'E$$

$$\text{又 } \because \angle DEB = 2\angle DCB$$

$$\therefore \angle DE'E = 2\angle DCB$$

则 E' 为符合题意的点,

$$\because OC = OB = 5$$

$$\therefore \angle OBC = 45^\circ$$

$$E' \text{ 的横坐标: } 5 + (5 - \frac{17}{5}) = \frac{33}{5}, \text{ 纵坐标为 } -\frac{8}{5};$$

$$\text{综上 } E \text{ 点的坐标为: } (\frac{17}{5}, \frac{8}{5}) \text{ 或 } (\frac{33}{5}, -\frac{8}{5}),$$

$$\text{故答案为: } (\frac{17}{5}, \frac{8}{5}) \text{ 或 } (\frac{33}{5}, -\frac{8}{5})$$

【点睛】 本题考查了二次函数与一次函数综合应用, 熟练掌握一次函数根二次函数的图象和性质, 分情况找到 E 点的位置, 是求解此题的关键.

三、解答题 (在答题卡上解答, 答在本试卷上无效; 解答时要写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤. 共 8 题, 满分 96 分)

$$19. (1) \text{ 计算: } (3.14 - \pi)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 2\cos 60^\circ - |1 - \sqrt{3}| + \sqrt{12}$$

$$(2) \text{ 解不等式组: } \begin{cases} 2x - 6 < 0 & \text{①} \\ \frac{1 - 3x}{2} \leq 5 & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{【答案】 (1) } \sqrt{3} - 1; (2) -3 \leq x < 3$$

【解析】

【分析】 (1) 根据零指数幂, 负整数指数幂, 特殊角的三角函数值, 化简绝对值, 二次根式的性质化简, 进行计算即可求解;

(2) 分别求出每一个不等式的解集, 根据口诀: 同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: (1) } & (3.14 - \pi)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 2\cos 60^\circ - |1 - \sqrt{3}| + \sqrt{12} \\ &= 1 - 4 + 2 \times \frac{1}{2} - (\sqrt{3} - 1) + 2\sqrt{3} \\ &= 1 - 4 + 1 - \sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3} \\ &= \sqrt{3} - 1; \end{aligned}$$

$$(2) \begin{cases} 2x-6 < 0 & ① \\ \frac{1-3x}{2} \leq 5 & ② \end{cases}$$

解不等式①得： $x < 3$,

解不等式②得： $x \geq -3$,

$\therefore$ 不等式组的解集为： $-3 \leq x < 3$

【点睛】 本题考查了实数的混合运算，解一元一次不等式组，正确掌握零指数幂，负整数指数幂，特殊角的三角函数值，化简绝对值，二次根式的性质化简，一元一次不等式解集确定方法是解题的关键.

20. 已知：如图，点 M 在 $\angle AOB$ 的边 OA 上.

求作：射线 MN ，使 $MN \parallel OB$. 且点 N 在 $\angle AOB$ 的平分线上.

作法：①以点 O 为圆心，适当长为半径画弧，分别交射线 OA ， OB 于点 C ， D .

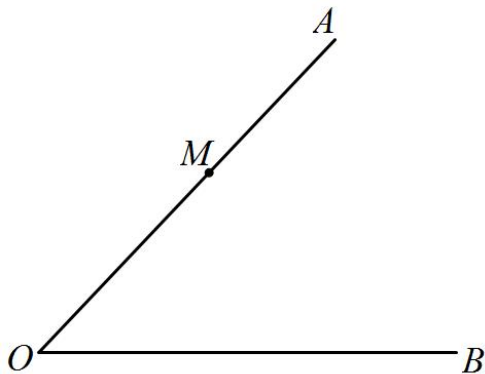
②分别以点 C ， D 为圆心，大于 $\frac{1}{2}CD$ 长为半径画弧，两弧在 $\angle AOB$ 的内部相交于点 P .

③画射线 OP .

④以点 M 为圆心， OM 长为半径画弧，交射线 OP 于点 N .

⑤画射线 MN .

射线 MN 即为所求.



(1) 用尺规作图，依作法补全图形(保留作图痕迹);

(2) 根据以上作图过程，完成下面的证明.

证明： $\because OP$ 平分 $\angle AOB$.

$\therefore \angle AON = \underline{\text{①}}$,

$\because OM = MN$,

$\therefore \angle AON = \underline{\text{②}}$, (③). (括号内填写推理依据)

$\therefore \angle BON = \angle ONM$.

$\therefore MN \parallel OB$. (④). (填写推理依据)

【答案】(1) 见解析 (2) ① $\angle BON$ ，② $\angle MNO$ ，③ 等边对等角；④ 内错角相等，两直线平行

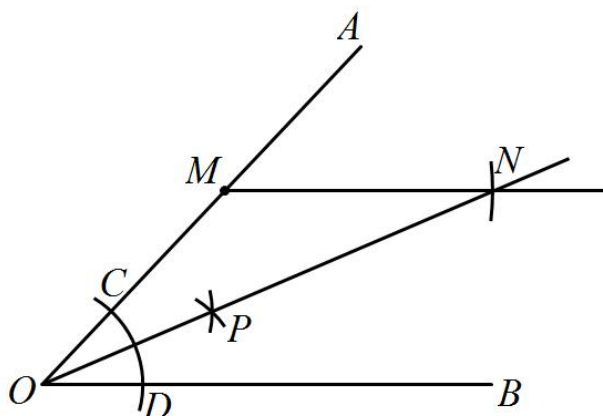
【解析】

【分析】(1) 根据题意用尺规作图，依作法补全图形即可；

(2) 由 OP 平分 $\angle AOB$ 推导 $\angle AON = \angle BON$ ，由 $OM = MN$ 推导 $\angle AON = \angle MNO$ ，从而推出 $\angle BON = \angle ONM$ ，继而利用“内错角相等，两直线平行”判定 $MN \parallel OB$ 。

【小问 1 详解】

根据意义作图如下：射线 MN 即为所求作的射线。



【小问 2 详解】

证明： $\because OP$ 平分 $\angle AOB$ ，

$\therefore \angle AON = \angle BON$ ，

$\because OM = MN$ ，

$\therefore \angle AON = \angle MNO$ ，(等边对等角). (括号内填写推理依据)

$\therefore \angle BON = \angle ONM$.

$\therefore MN \parallel OB$. (内错角相等，两直线平行). (填写推理依据)

故答案为：① $\angle BON$ ，② $\angle MNO$ ，③ 等边对等角；④ 内错角相等，两直线平行。

【点睛】本题考查作尺规作图—作角平分线和相等线段，等边对等角，平行线的判定等知识，根据题意正确画出图形是解题的关键。

21. 某校甲乙两班联合举办了“经典阅读”竞赛，从甲班和乙班各随机抽取 10 名学生，统计这部分学生的竞赛成绩，并对数据（成绩）进行了收集、整理，分析。下面给出了部分信息。

【收集数据】

甲班 10 名学生竞赛成绩：85，78，86，79，72，91，79，71，70，89

乙班 10 名学生竞赛成绩：85，80，77，85，80，73，90，74，75，81

【整理数据】

班级	$70 \leq x < 80$	$80 \leq x < 90$	$90 \leq x < 100$
甲班	6	3	1
乙班	4	5	1

【分析数据】

班级	平均数	中位数	众数	方差
甲班	80	a	b	51.4
乙班	80	80	80, 85	c

【解决问题】根据以上信息，回答下列问题：

- (1) 填空： $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____;
- (2) 请你根据【分析数据】中的信息，判断哪个班成绩比较好，简要说明理由：
- (3) 甲班共有学生 45 人，乙班共有学生 40 人。按竞赛规定，80 分及 80 分以上的学生可以获奖，估计这两个班可以获奖的总人数是多少？

【答案】(1) 79, 79, 27;

(2) 乙，见解析； (3) 42 人。

【解析】

【分析】(1) 根据中位数，众数，方差的定义求解；

(2) 结合平均数，方差代表的数据信息说明；

(3) 样本估计总体，用样本中符合条件的数据占比估计总体，计算符合条件的数据个数。

【小问 1 详解】

解：甲班成绩从低到高排列：70, 71, 72, 78, 79, 79, 85, 86, 89, 91，故中位数 $a = 79$ ，众数 $b = 79$ ；

乙班数据方差

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{1}{10} [(85-80)^2 + (80-80)^2 + (77-80)^2 + (85-80)^2 + (80-80)^2 + (73-80)^2 + (90-80)^2 + (74-80)^2 + (75-80)^2 + (81-80)^2] \\
 &= \frac{1}{10} (25 + 0 + 9 + 25 + 0 + 49 + 100 + 36 + 25 + 1) \\
 &= \frac{1}{10} \times 270 \\
 &= 27
 \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

乙班成绩与甲班平均数相同，中位数、众数高于甲班，方差小于甲班，代表乙班成绩的集中度比甲好，总

体乙班成绩比较好.

【小问 3 详解】

获奖人数: $45 \times \frac{4}{10} + 40 \times \frac{6}{10} = 18 + 24 = 42$ (人).

答: 两个班获奖人数为 42 人.

【点睛】 本题考查数据统计分析, 样本估计总体, 掌握数据统计分析中位数, 众数, 方差的定义是解题的关键.

22. 某集团有限公司生产甲乙两种电子产品共 8 万件, 准备销往东南亚国家和地区. 已知 2 件甲种电子产品与 3 件乙种电子产品的销售额相同: 3 件甲种电子产品比 2 件乙种电子产品的销售多 1500 元.

(1) 求甲种电子产品与乙种电子产品销售单价各多少元?

(2) 若使甲乙两种电子产品的销售总收入不低于 5400 万元, 则至少销售甲种电子产品多少件?

【答案】 (1) 甲种电子产品的销售单价是 900 元, 乙种电子产品的单价为 600 元.

(2) 至少销售甲种电子产品 2 万件.

【解析】

【分析】 (1) 设甲种电子产品的销售单价 x 元, 乙种电子产品的销售单价 y 元, 根据等量关系: ① 2 件甲种电子产品与 3 件乙种电子产品的销售额相同, ② 3 件甲种电子产品比 2 件乙种电子产品的销售多 1500 元, 列出方程组求解即可;

(2) 可设销售甲种电子产品 a 万件, 根据甲、乙两种电子产品的销售总收入不低于 5400 万元, 列出不等式求解即可.

【小问 1 详解】

解: 设甲种电子产品的销售单价是 x 元, 乙种电子产品的单价为 y 元.

根据题意得:
$$\begin{cases} 2x = 3y \\ 3x - 2y = 1500 \end{cases},$$

解得:
$$\begin{cases} x = 900 \\ y = 600 \end{cases};$$

答: 甲种电子产品的销售单价是 900 元, 乙种电子产品的单价为 600 元.

【小问 2 详解】

解: 设销售甲种电子产品 a 万件, 则销售乙种电子产品 $(8-a)$ 万件.

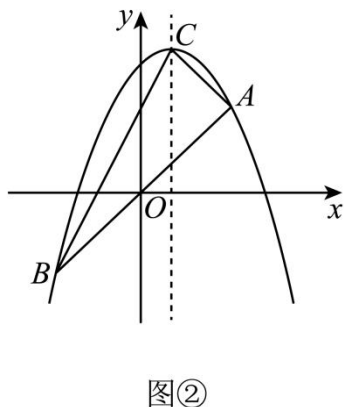
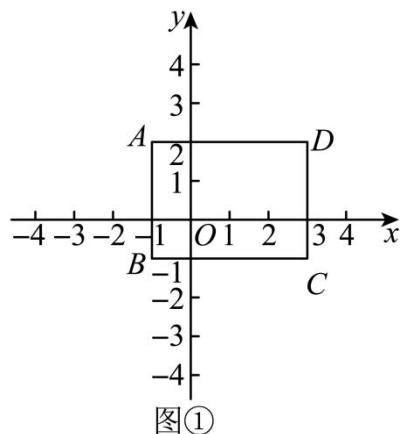
根据题意得: $900a + 600(8-a) \geq 5400$.

解得: $a \geq 2$.

答：至少销售甲种电子产品 2 万件.

【点睛】 本题考查一元一次不等式及二元一次方程组的应用，解决本题的关键是读懂题意，找到符合题意的不等关系及等量关系.

23. 定义：在平面直角坐标系 xOy 中，当点 N 在图形 M 的内部，或在图形 M 上，且点 N 的横坐标和纵坐标相等时，则称点 N 为图形 M 的“梦之点”.



(1) 如图①，矩形 $ABCD$ 的顶点坐标分别是 $A(-1, 2)$ ， $B(-1, -1)$ ， $C(3, -1)$ ， $D(3, 2)$ ，在点 $M_1(1, 1)$ ， $M_2(2, 2)$ ， $M_3(3, 3)$ 中，是矩形 $ABCD$ “梦之点”的是_____；

(2) 点 $G(2, 2)$ 是反比例函数 $y_1 = \frac{k}{x}$ 图象上的一个“梦之点”，则该函数图象上的另一个“梦之点” H 的坐标是_____，直线 GH 的解析式是 $y_2 =$ _____。当 $y_1 > y_2$ 时， x 的取值范围是_____。

(3) 如图②，已知点 A ， B 是抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{9}{2}$ 上的“梦之点”，点 C 是抛物线的顶点，连接 AC ， AB ， BC ，判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由。

【答案】 (1) M_1 ， M_2

(2) $H(-2, -2)$ ， $y_2 = x$ ， $x < -2$ 或 $0 < x < 2$

(3) $\triangle ABC$ 是直角三角形，理由见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据“梦之点”的定义判断这几个点是否在矩形内部或边上即可；

(2) 把 $G(2, 2)$ 代入 $y_1 = \frac{k}{x}$ 求出解析式，再求与 $y = x$ 的交点即为 H ，最后根据函数图象判断当 $y_1 > y_2$ 时， x 的取值范围；

(3) 根据“梦之点”的定义求出点 A ， B 的坐标，再求出顶点 C 的坐标，最后求出 AC ， AB ， BC ，即可判断 $\triangle ABC$ 的形状。

【小问 1 详解】

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 的顶点坐标分别是 $A(-1,2)$, $B(-1,-1)$, $C(3,-1)$, $D(3,2)$,

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ “梦之点” (x,y) 满足 $-1 \leq x \leq 3$, $-1 \leq y \leq 2$,

$\therefore$ 点 $M_1(1,1)$, $M_2(2,2)$ 是矩形 $ABCD$ “梦之点”, 点 $M_3(3,3)$ 不是矩形 $ABCD$ “梦之点”,

故答案为: M_1 , M_2 ;

【小问 2 详解】

$\therefore$ 点 $G(2,2)$ 是反比例函数 $y_1 = \frac{k}{x}$ 图象上的一个“梦之点”,

$\therefore$ 把 $G(2,2)$ 代入 $y_1 = \frac{k}{x}$ 得 $k=4$,

$$\therefore y_1 = \frac{4}{x},$$

$\therefore$ “梦之点”的横坐标和纵坐标相等,

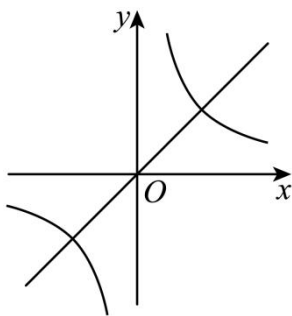
$\therefore$ “梦之点”都在直线 $y=x$ 上,

$$\text{联立} \begin{cases} y_1 = \frac{4}{x} \\ y = x \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases},$$

$\therefore H(-2,-2)$,

$\therefore$ 直线 GH 的解析式是 $y_2 = x$,

函数图象如图:



由图可得, 当 $y_1 > y_2$ 时, x 的取值范围是 $x < -2$ 或 $0 < x < 2$;

故答案为: $H(-2,-2)$, $y_2 = x$, $x < -2$ 或 $0 < x < 2$;

【小问 3 详解】

$\triangle ABC$ 是直角三角形, 理由如下:

$\therefore$ 点 A, B 是抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{9}{2}$ 上的“梦之点”，

$$\therefore \text{联立} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{9}{2} \\ y = x \end{cases}, \text{ 解得} \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases},$$

$\therefore A(3, 3), B(-3, -3),$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 5$$

$\therefore$ 顶点 $C(1, 5),$

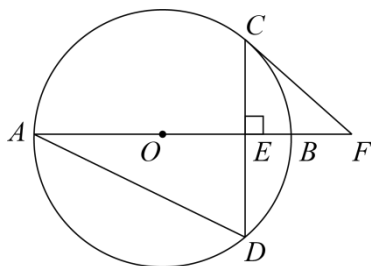
$$\therefore AC^2 = (3-1)^2 + (3-5)^2 = 8, AB^2 = (-3-3)^2 + (-3-3)^2 = 72, BC^2 = (-3-1)^2 + (-3-5)^2 = 80,$$

$$\therefore BC^2 = AC^2 + AB^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

【点睛】本题是函数的综合题，考查了一次函数、反比例函数、二次函数，理解坐标与图形性质，记住两点间的距离公式，正确理解新定义是解决此题的关键.

24. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， C 是 $\odot O$ 上一点过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 E ，交 $\odot O$ 于点 D ，点 F 是 AB 延长线上一点，连接 CF, AD ， $\angle FCD = 2\angle DAF$.



(1) 求证： CF 是 $\odot O$ 切线；

(2) 若 $AF = 10$ ， $\sin F = \frac{2}{3}$ ，求 CD 的长.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$

【解析】

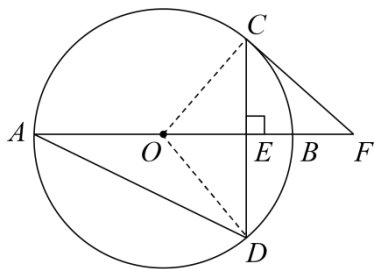
【分析】(1) 根据垂径定理和圆周角定理可推出 $\angle COB = 2\angle DAF$ ，利用已知条件进行等量转换即可求出 $\angle COB = \angle FCD$ ，最后利用 $CD \perp AB$ 可证明 $\angle FCD + \angle OCE = 90^\circ$ ，从而证明 CF 是 $\odot O$ 切线.

(2) 根据互余的两个角相等，利用 $\sin F = \frac{2}{3}$ 可求出 $\frac{CE}{CF} = \frac{OE}{OC} = \frac{2}{3}$ ，设参数表示出 OE 和 OC ，再根据勾股定理用参数表示出 CE 和 EF ，最后利用 $AF = 10$ 即可求出参数的值，从而求出 CE 长度，即可求 CD

的长.

【小问 1 详解】

解：连接 OC ， OD ，如图所示，



$\because CD \perp AB$ ， AB 为 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \widehat{BC} = \widehat{BD},$$

$$\therefore \angle COB = \angle BOD,$$

$$\because \angle BOD = 2\angle DAF,$$

$$\therefore \angle COB = 2\angle DAF,$$

$$\because \angle FCD = 2\angle DAF,$$

$$\therefore \angle COB = \angle FCD,$$

$$\because CD \perp AB,$$

$$\therefore \angle COB + \angle OCE = 90^\circ,$$

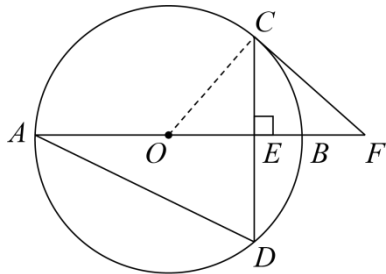
$$\therefore \angle FCD + \angle OCE = 90^\circ,$$

$$\therefore OC \perp CF,$$

$\therefore CF$ 是 $\odot O$ 切线.

【小问 2 详解】

解：连接 OC ，如图所示，



由 (1) 得， $OC \perp CF$ ，

$$\because CE \perp AB,$$

$$\therefore \angle OCF = \angle CEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle F = \angle OCE.$$

$$\therefore \sin F = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{CE}{CF} = \frac{OE}{OC} = \frac{2}{3}.$$

设 $OE = 2x$ 则 $OC = OA = 3x$,

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle OCE \text{ 中, } CE = \sqrt{OC^2 - OE^2} = \sqrt{9x^2 - 4x^2} = \sqrt{5}x,$$

$$\therefore CF = \frac{3\sqrt{5}x}{2}.$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle CEF \text{ 中, } EF = \sqrt{CF^2 - CE^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{5}x}{2}\right)^2 - 5x^2} = \frac{5}{2}x.$$

$$\therefore AF = 10,$$

$$\therefore AF = AO + OE + EF = 3x + 2x + \frac{5}{2}x = 10,$$

$$\therefore x = \frac{4}{3}.$$

$$\therefore CE = \sqrt{5}x = \frac{4\sqrt{5}}{3}.$$

$$\therefore CE \perp AB,$$

$$\therefore CE = ED = \frac{1}{2}CD.$$

$$\therefore CD = \frac{8\sqrt{5}}{3}.$$

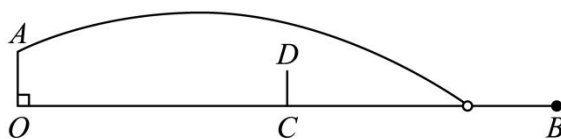
$$\text{故答案为: } \frac{8\sqrt{5}}{3}.$$

【点睛】本题考查了垂径定理，圆周角定理，切线的判定和性质，三角函数和勾股定理，解题的关键在于利用参数表达线段长度.

25. 乒乓球被誉为中国国球. 2023 年的世界乒乓球标赛中，中国队包揽了五个项目的冠军，成绩的取得与平时的刻苦训练和精准的技术分析是分不开的. 如图，是乒乓球台的截面示意图，一位运动员从球台边缘正上方以击球高度 OA 为 28.75 cm 的高度，将乒乓球向正前方击打到对面球台，乒乓球的运行路线近似是抛物线的一部分.



图①

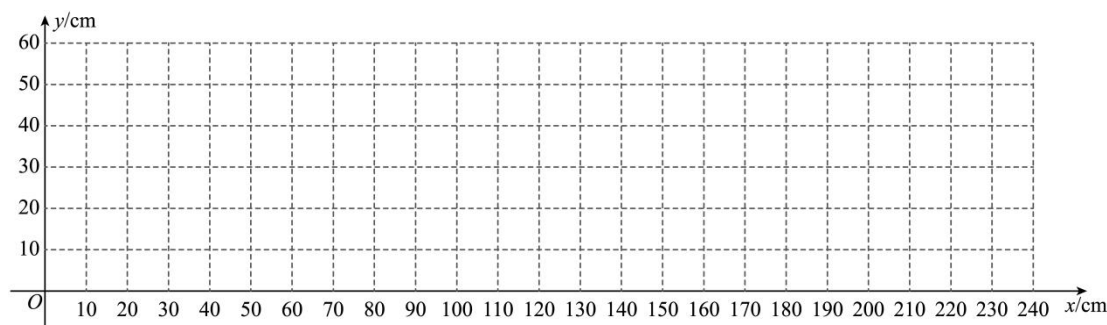


图②

乒乓球到球台的竖直高度记为 y (单位: cm), 乒乓球运行的水平距离记为 x (单位: cm). 测得如下数据:

水平距离 x/cm	0	10	50	90	130	170	230
竖直高度 y/cm	28.75	33	45	49	45	33	0

(1) 在平面直角坐标系 xOy 中, 描出表格中各组数值所对应的点 (x, y) , 并画出表示乒乓球运行轨迹形状的大致图象;



(2) ①当乒乓球到达最高点时, 与球台之间的距离是_____ cm , 当乒乓球落在对面球台上时, 到起始点的水平距离是_____ cm ;

②求满足条件的抛物线解析式;

(3) 技术分析: 如果只上下调整击球高度 OA , 乒乓球的运行轨迹形状不变, 那么为了确保乒乓球既能过网, 又能落在对面球台上, 需要计算出 OA 的取值范围, 以利于有针对性的训练. 如图②. 乒乓球台长 OB 为 274cm , 球网高 CD 为 15.25cm . 现在已经计算出乒乓球恰好过网的击球离度 OA 的值约为 1.27cm . 请你计算出乒乓球恰好落在对面球台边缘点 B 处时, 击球高度 OA 的值 (乒乓球大小忽略不计).

【答案】 (1) 见解析 (2) ① 49 ; 230 ; ② $y = -0.0025(x - 90)^2 + 49$

(3) 乒乓球恰好落在对面球台边缘点 B 处时, 击球高度 OA 的值为 64.39cm

【解析】

【分析】 (1) 根据描点法画出函数图象即可求解;

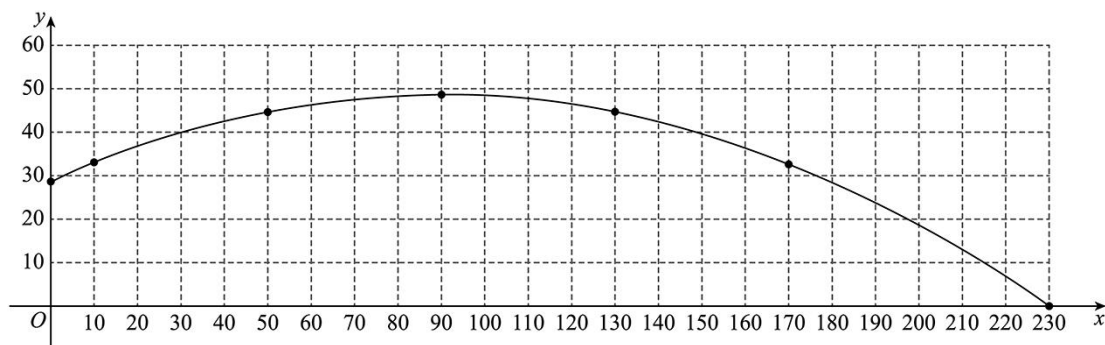
(2) ①根据二次函数图象的对称性求得对称轴以及顶点, 根据表格数据, 可得当 $y = 0$ 时, $x = 230$;

②待定系数法求解析式即可求解;

(3) 根据题意, 设平移后的抛物线的解析式为 $y = -0.0025(x - 90)^2 + 49 + h - 28.75$, 根据题意当 $x = 274$ 时, $y = 0$, 代入进行计算即可求解.

【小问 1 详解】

解: 如图所示,



【小问 2 详解】

①观察表格数据，可知当 $x = 50$ 和 $x = 130$ 时，函数值相等，则对称轴为直线 $x = 90$ ，顶点坐标为 $(90, 49)$ ，又抛物线开口向下，可得最高点时，与球台之间的距离是 49 cm ，当 $y = 0$ 时， $x = 230$ ， $\therefore$ 乒乓球落在对面球台上时，到起始点的水平距离是 230 cm ；故答案为：49；230.

②设抛物线解析式为 $y = a(x - 90)^2 + 49$ ，将 $(230, 0)$ 代入得，

$$0 = a(230 - 90)^2 + 49,$$

解得： $a = -0.0025$ ，

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -0.0025(x - 90)^2 + 49$ ；

【小问 3 详解】

$\because$ 当 $OA = 28.75$ 时，抛物线的解析式为 $y = -0.0025(x - 90)^2 + 49$ ，

设乒乓球恰好落在对面球台边缘点 B 处时，击球高度 OA 的值为 h ，则平移距离为 $h - 28.75\text{ (cm)}$ ，

$\therefore$ 平移后的抛物线的解析式为 $y = -0.0025(x - 90)^2 + 49 + h - 28.75$ ，

依题意，当 $x = 274$ 时， $y = 0$ ，

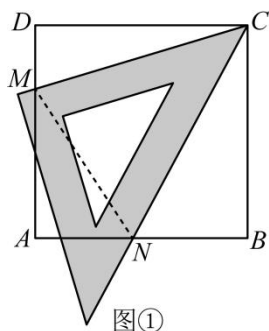
$$\text{即 } -0.0025(274 - 90)^2 + 49 + h - 28.75 = 0,$$

解得： $h = 64.39$.

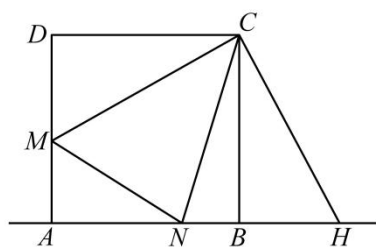
答：乒乓球恰好落在对面球台边缘点 B 处时，击球高度 OA 的值为 64.39cm .

【点睛】 本题考查了二次函数的应用，画二次函数图象，二次函数图象的平移，熟练掌握二次函数图象的性质是解题的关键.

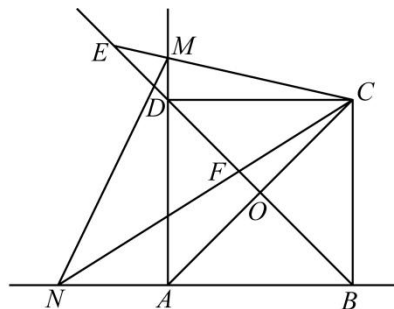
26. 数学兴趣小组探究了以下几何图形. 如图①，把一个含有 45° 角的三角尺放在正方形 $ABCD$ 中，使 45° 角的顶点始终与正方形的顶点 C 重合，绕点 C 旋转三角尺时， 45° 角的两边 CM ， CN 始终与正方形的边 AD ， AB 所在直线分别相交于点 M ， N ，连接 MN ，可得 $\triangle CMN$.



图①



图②



图③

【探究一】如图②，把 $\triangle CDM$ 绕点 C 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle CBH$ ，同时得到点 H 在直线 AB 上. 求证： $\angle CNM = \angle CNH$ ；

【探究二】在图②中，连接 BD ，分别交 CM ， CN 于点 E ， F . 求证： $\triangle CEF \sim \triangle CNM$ ；

【探究三】把三角尺旋转到如图③所示位置，直线 BD 与三角尺 45° 角两边 CM ， CN 分别交于点 E ， F . 连接 AC 交 BD 于点 O ，求 $\frac{EF}{NM}$ 的值.

【答案】[探究一]见解析；[探究二]见解析；[探究三] $\frac{EF}{NM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】[探究一]证明 $\triangle CNM \cong \triangle CNH$ ，即可得证；

[探究二]根据正方形的性质证明 $\angle CEF = \angle FNB$ ，根据三角形内角和得出 $\angle CEF = \angle FNB$ ，加上公共角 $\angle ECF = \angle NCM$ ，进而即可证明

[探究三]先证明 $\triangle ECD \sim \triangle NCA$ ，得出 $\angle CED = \angle CNA$ ， $\frac{EC}{NC} = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，将 $\triangle DMC$ 绕点 C 顺时针旋

转 90° 得到 $\triangle BGC$ ，则点 G 在直线 AB 上. 得出 $\triangle NCG \cong \triangle NCM$ ，根据全等三角形的性质得出 $\angle MNC = \angle GNC$ ，进而可得 $\angle CNM = \angle CEF$ ，证明 $\triangle ECF \sim \triangle NCM$ ，根据相似三角形的性质得出

$\frac{EF}{NM} = \frac{EC}{NC} = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，即可得出结论.

【详解】[探究一]

$\therefore$ 把 $\triangle CDM$ 绕点 C 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle CBH$ ，同时得到点 H 在直线 AB 上，

$\therefore CM = CH, \angle MCH = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle NCH = \angle MCH - \angle MCN = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle MCN = \angle HCN$ ，

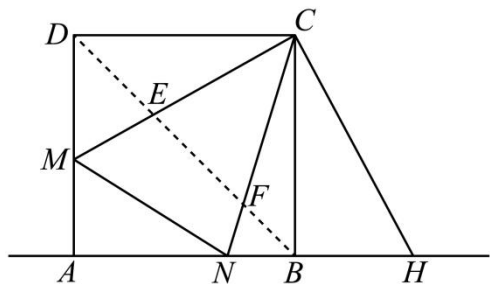
在 $\triangle CNM$ 与 $\triangle CNH$ 中

$$\begin{cases} CM = CH \\ \angle MCN = \angle HCN \\ CN = CN \end{cases}$$

$$\therefore {}_{\Delta}CNM \cong_{\Delta} CNH$$

$$\therefore \angle CNM = \angle CNH$$

[探究二]证明: 如图所示,



图②

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle DBA = 45^\circ,$$

又 $\angle MCN = 45^\circ$,

$$\therefore \angle FBN = \angle FCE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EFC = \angle BFN,$$

$$\therefore \angle CEF = \angle FNB,$$

又 $\because \angle CNM = \angle CNH$,

$$\therefore \angle CEF = \angle CNM \text{ ,}$$

又 $\because$ 公共角 $\angle ECF = \angle NCM$,

$$\therefore \wedge CEF \sim \wedge CNM ;$$

[探究三] 证明: $\because AC, BD$ 是正方形的对角线,

$$\therefore \angle CDE = \angle CDA + \angle EDM = 135^\circ, \quad \angle CAN = 180^\circ - \angle BAC = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle CAN,$$

$$\therefore \angle MCN = \angle DCA = 45^\circ,$$

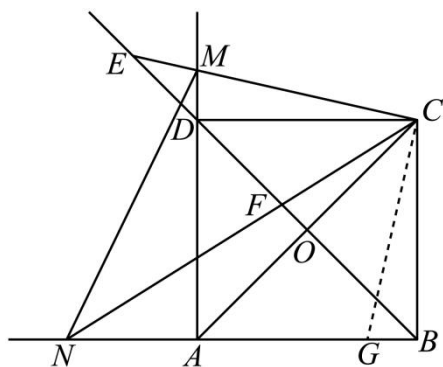
$$\therefore \angle MCN - \angle DCN = \angle DCA - \angle DCN,$$

即 $\angle ECD = \angle NCA$,

$$\therefore \Delta ECD \sim \Delta NCA,$$

$$\therefore \angle CED = \angle CNA, \quad \frac{EC}{NC} = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

如图所示, 将 $\triangle DMC$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle BGC$, 则点 G 在直线 AB 上.



$$\therefore MC = GC, \quad \angle MCG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NCG = \angle NCM = 45^\circ,$$

$$\text{又 } CN = CN,$$

$$\therefore \Delta NCG \cong_{\Delta} NCM \text{ ,}$$

$$\therefore \angle MNC = \angle GNC,$$

$$\therefore \angle CNA = \angle CEF,$$

$$\therefore \angle CNM = \angle CEF,$$

又 $\angle ECF = \angle NCM$,

$$\therefore \Delta ECF \sim \Delta NCM,$$

$$\therefore \frac{EF}{NM} = \frac{EC}{NC} = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{即 } \frac{EF}{NM} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【点睛】本题考查了全等三角形的性质与判定，旋转的性质，正方形的性质，相似三角形的性质与判定，熟练掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键.

