

机密★启用前

2023 年初中学业水平考试试卷

数学

注意事项:

1. 本试卷共 6 页, 满分 120 分. 考试时间为 120 分钟.
2. 答题前, 考生务必先将自己的考生号、姓名、座位号等信息填写在试卷和答题卡的指定位置. 请认真核对条形码上的相关信息后, 将条形码粘贴在答题卡的指定位置.
3. 答题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
4. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题: 本大题共有 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 每小题只有一个正确选项, 请将答题卡上对应题目的答案标号涂黑.

1. 下列各式计算结果为 a^5 的是 ()

- A. $(a^3)^2$ B. $a^{10} \div a^2$ C. $a^4 \cdot a$ D. $(-1)^{-1} a^5$

【答案】C

【解析】

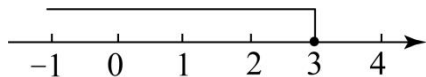
【分析】根据同底数幂的乘除法及幂的乘方运算法则即可判断.

【详解】解: A、 $(a^3)^2 = a^6$, 不符合题意;B、 $a^{10} \div a^2 = a^8$, 不符合题意;C、 $a^4 \cdot a = a^5$, 符合题意;D、 $(-1)^{-1} a^5 = -a^5$, 不符合题意;

故选: C.

【点睛】题目主要考查同底数幂的乘除法及幂的乘方运算法则, 熟练掌握运算法则是解题关键.

2. 关于 x 的一元一次不等式 $x-1 \leq m$ 的解集在数轴上的表示如图所示, 则 m 的值为 ()



- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

【答案】B

【解析】

【分析】先求出不等式的解集, 然后对比数轴求解即可.

【详解】解： $x-1 \leq m$ 解得 $x \leq m+1$ ，

由数轴得： $m+1=3$ ，

解得： $m=2$ ，

故选： B.

【点睛】题目主要考查求不等式的解集及参数，熟练掌握求不等式解集的方法是解题关键.

3. 定义新运算“ $\otimes$ ”，规定： $a \otimes b = a^2 - |b|$ ，则 $(-2) \otimes (-1)$ 的运算结果为 ()

A. -5

B. -3

C. 5

D. 3

【答案】 D

【解析】

【分析】根据新定义的运算求解即可.

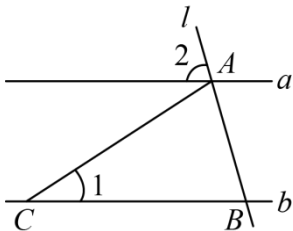
【详解】解： $\because a \otimes b = a^2 - |b|$ ，

$$\therefore (-2) \otimes (-1) = (-2)^2 - |-1| = 4 - 1 = 3,$$

故选： D.

【点睛】题目主要考查新定义的运算，理解题意中的运算法则是解题关键.

4. 如图，直线 $a \parallel b$ ，直线 l 与直线 a, b 分别相交于点 A, B ，点 C 在直线 b 上，且 $CA = CB$ ．若 $\angle 1 = 32^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为 ()



A. 32°

B. 58°

C. 74°

D. 75°

【答案】 C

【解析】

【分析】由 $CA = CB$ ， $\angle 1 = 32^\circ$ ，可得 $\angle CBA = \angle CAB = \frac{180^\circ - \angle 1}{2} = 74^\circ$ ，由 $a \parallel b$ ，可得 $\angle 2 = \angle CBA$ ，进而可得 $\angle 2$ 的度数.

【详解】解： $\because CA = CB$ ， $\angle 1 = 32^\circ$ ，

$$\therefore \angle CBA = \angle CAB = \frac{180^\circ - \angle 1}{2} = 74^\circ,$$

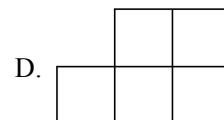
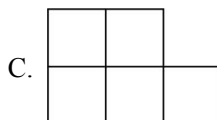
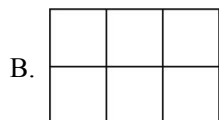
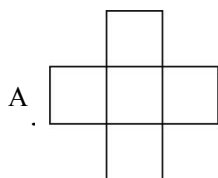
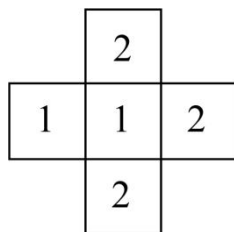
$\because a \parallel b$ ，

$$\therefore \angle 2 = \angle CBA = 74^\circ,$$

故选：C.

【点睛】本题考查了等边对等角，三角形的内角和定理，平行线的性质。解题的关键在于明确角度之间的数量关系。

5. 几个大小相同的小正方体搭成几何体的俯视图如图所示，图中小正方形中数字表示对应位置小正方体的个数，该几何体的主视图是（ ）



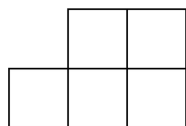
【答案】D

【解析】

【分析】根据各层小正方体的个数，然后得出三视图中主视图的形状，即可得出答案。

【详解】解：根据俯视图可知，这个几何体中：主视图有三列：左边一列1个，中间一列2个，右边一列2个，

所以该几何体的主视图是



故选：D.

【点睛】此题主要考查了学生对三视图掌握程度和灵活运用能力，同时也体现了对空间想象能力方面的考查，熟练掌握三视图的判断方法是解题关键。

6. 从1, 2, 3这三个数中随机抽取两个不同的数，分别记作 m 和 n 。若点A的坐标记作 (m, n) ，则点A在

双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 上的概率是（ ）

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{5}{6}$

【答案】A

【解析】

【分析】先求出点 A 的坐标的所有情况的个数，然后求出其中在双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 上的坐标的个数，根据随机事件概率的计算方法，即可得到答案.

【详解】解：从 1, 2, 3 这三个数中随机抽取两个不同的数，点 A 的坐标共有 6 种情况：(1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)，并且它们出现的可能性相等.

点 A 坐标在双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 上有 2 种情况：(2,3), (3,2).

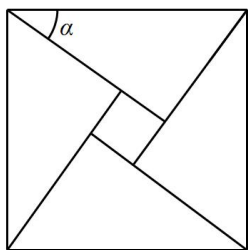
所以，这个事件的概率为 $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

故选：A.

【点睛】本题主要考查随机事件的概率，关键是掌握随机事件概率的计算方法：如果在一次试验中，有 n 种可能的结果，并且它们发生的可能性都相等，事件 A 包含其中的 m 种结果，那么事件 A 发生的概率

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

7. 如图是源于我国汉代数学家赵爽的弦图，它是由四个全等直角三角形与一个小正方形拼成的大正方形. 若小正方形的面积为 1，大正方形的面积为 25，直角三角形中较小的锐角为 α ，则 $\cos \alpha$ 的值为 ()



A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】首先根据两个正方形的面积分别求出两个正方形的边长，然后结合题意进一步设直角三角形短的直角边为 a ，则较长的直角边为 $a+1$ ，再接着利用勾股定理得到关于 a 的方程，据此进一步求出直角三角形各个直角边的边长，最后求出 $\cos \alpha$ 的值即可.

【详解】 $\because$ 小正方形的面积为 1，大正方形的面积为 25，

$\therefore$ 小正方形的边长为 1，大正方形的边长为 5，

设直角三角形短的直角边为 a ，则较长的直角边为 $a+1$ ，其中 $a > 0$ ，

$$\therefore a^2 + (a+1)^2 = 5^2, \text{ 其中 } a > 0,$$

解得： $a = 3$ ， $a+1 = 4$ ，

$$\therefore \cos \alpha = \frac{4}{5},$$

故选：D

【点睛】本题主要考查了勾股定理与一元二次方程及三角函数的综合运用，熟练掌握相关概念是解题关键.

8. 在平面直角坐标系中，将正比例函数 $y = -2x$ 的图象向右平移 3 个单位长度得到一次函数

$y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象，则该一次函数的解析式为 ()

A. $y = -2x + 3$

B. $y = -2x + 6$

C. $y = -2x - 3$

D. $y = -2x - 6$

【答案】B

【解析】

【分析】根据一次函数的平移规律求解即可.

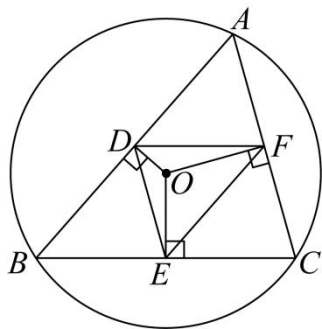
【详解】解：正比例函数 $y = -2x$ 的图象向右平移 3 个单位长度得：

$$y = -2(x - 3) = -2x + 6,$$

故选：B.

【点睛】题目主要考查一次函数的平移，熟练掌握平移规律是解题关键.

9. 如图， $\odot O$ 是锐角三角形 ABC 的外接圆， $OD \perp AB, OE \perp BC, OF \perp AC$ ，垂足分别为 D, E, F ，连接 DE, EF, FD 。若 $DE + DF = 6.5$ ， $\triangle ABC$ 的周长为 21，则 EF 的长为 ()



A. 8

B. 4

C. 3.5

D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】根据三角形外接圆的性质得出点 D, E, F 分别是 AB, BC, AC 的中点，再由中位线的性质及三角形的周长求解即可.

【详解】解： $\because \odot O$ 是锐角三角形 ABC 的外接圆， $OD \perp AB, OE \perp BC, OF \perp AC$ ，

$\therefore$ 点 D, E, F 分别是 AB, BC, AC 的中点，

$$\therefore DF = \frac{1}{2}BC, DE = \frac{1}{2}AC, EF = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore DE + DF = 6.5, \triangle ABC \text{ 的周长为 } 21,$$

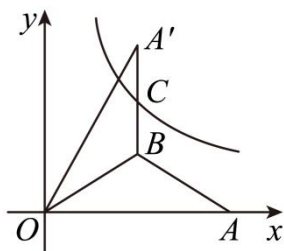
$$\therefore CB + CA + AB = 21 \text{ 即 } 2DF + 2DE + 2EF = 21,$$

$$\therefore EF = 4,$$

故选：B.

【点睛】题目主要考查三角形外接圆的性质及中位线的性质，理解题意，熟练掌握三角形外接圆的性质是解题关键.

10. 如图，在平面直角坐标系中， $\triangle OAB$ 三个顶点的坐标分别为 $O(0,0)$, $A(2\sqrt{3},0)$, $B(\sqrt{3},1)$, $\triangle OA'B$ 与 $\triangle OAB$ 关于直线 OB 对称，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 的图象与 $A'B$ 交于点 C . 若 $A'C = BC$, 则 k 的值为 ()



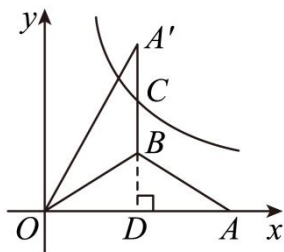
- A. $2\sqrt{3}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】过点 B 作 $BD \perp x$ 轴，根据题意得出 $BD = 1$, $OD = \sqrt{3}$ ，再由特殊角的三角函数及等腰三角形的判定和性质得出 $OB = AB = 2$, $\angle BOA = \angle BAO = 30^\circ$ ，利用各角之间的关系 $\angle OBA' + \angle OBD = 180^\circ$ ，确定 A' , B , D 三点共线，结合图形确定 $C(\sqrt{3}, 2)$ ，然后代入反比例函数解析式即可.

【详解】解：如图所示，过点 B 作 $BD \perp x$ 轴，



$$\therefore O(0,0), A(2\sqrt{3},0), B(\sqrt{3},1),$$

$$\therefore BD = 1, OD = \sqrt{3},$$

$$\therefore AD = OD = \sqrt{3}, \quad \tan \angle BOA = \frac{BD}{OD} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore OB = AB = \sqrt{OD^2 + BD^2} = 2, \quad \angle BOA = \angle BAO = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle OBD = \angle ABD = 60^\circ, \quad \angle OBA = 120^\circ,$$

$\therefore \triangle OA'B$ 与 $\triangle OAB$ 关于直线 OB 对称,

$$\therefore \angle OBA' = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle OBA' + \angle OBD = 180^\circ,$$

$\therefore A', B, D$ 三点共线,

$$\therefore A'B = AB = 2,$$

$$\therefore A'C = BC,$$

$$\therefore BC = 1,$$

$$\therefore CD = 2,$$

$$\therefore C(\sqrt{3}, 2),$$

将其代入 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 得: $k = 2\sqrt{3}$,

故选: A.

【点睛】题目主要考查等腰三角形的判定和性质, 特殊角的三角函数及反比例函数的确定, 理解题意, 综合运用这些知识点是解题关键.

二、填空题: 本大题共有 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分. 请将答案填在答题卡上对应的横线上.

11. 若 a, b 为两个连续整数, 且 $a < \sqrt{3} < b$, 则 $a + b =$ _____.

【答案】3

【解析】

【分析】根据夹逼法求解即可.

【详解】解: $\because 1 < 3 < 2^2$, 即 $1^2 < (\sqrt{3})^2 < 2^2$,

$$\therefore 1 < \sqrt{3} < 2,$$

$$\therefore a = 1, b = 2,$$

$$\therefore a + b = 3.$$

故答案为：3.

【点睛】题目主要考查无理数的估算，熟练掌握估算方法是解题关键.

12. 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 - 2x - 8 = 0$ 的两个实数根，则 $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】由一元二次方程的根与系数的关系得， $x_1 + x_2 = 2$ ， $x_1 x_2 = -8$ ，然后代入求解即可.

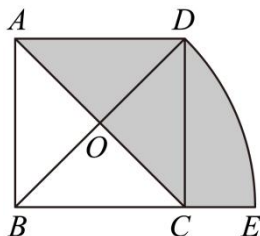
【详解】解：由一元二次方程的根与系数的关系得， $x_1 + x_2 = 2$ ， $x_1 x_2 = -8$ ，

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{1}{4},$$

故答案为： $-\frac{1}{4}$.

【点睛】本题考查了一元二次方程的根与系数的关系，代数式求值. 解题的关键在于熟练掌握：一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个实数根 x_1, x_2 满足 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

13. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，对角线 AC, BD 相交于点 O ，以点 B 为圆心，对角线 BD 的长为半径画弧，交 BC 的延长线于点 E ，则图中阴影部分的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 π

【解析】

【分析】根据正方形的性质得出阴影部分的面积为扇形 BED 的面积，然后由勾股定理得出 $BD = 2\sqrt{2}$ ，再由扇形的面积公式求解即可.

【详解】解：正方形 $ABCD$ ，

$$\therefore AO = CO, BO = DO, AD = CD, \angle DBE = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COB (SSS),$$

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 2，

$$\therefore BD = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{阴影部分的面积为扇形 } BED \text{ 的面积, 即 } \frac{45 \times \pi \times (2\sqrt{2})^2}{360} = \pi,$$

故答案为: π .

【点睛】题目主要考查正方形的性质及扇形的面积公式, 理解题意, 将阴影部分面积进行转化是解题关键.

14. 已知二次函数 $y = -ax^2 + 2ax + 3 (a > 0)$, 若点 $P(m, 3)$ 在该函数的图象上, 且 $m \neq 0$, 则 m 的值为 _____.

【答案】2

【解析】

【分析】将点 $P(m, 3)$ 代入函数解析式求解即可.

【详解】解: 点 $P(m, 3)$ 在 $y = -ax^2 + 2ax + 3$ 上,

$$\therefore 3 = -am^2 + 2am + 3,$$

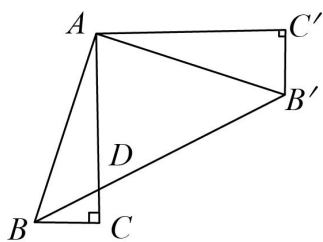
$$-am(m-2) = 0,$$

解得: $m = 2, m = 0$ (舍去)

故答案为: 2.

【点睛】题目主要考查二次函数图象上的点的特点, 理解题意正确求解是解题关键.

15. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 3, BC = 1$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针方向旋转 90° , 得到 $\triangle AB'C'$. 连接 BB' , 交 AC 于点 D , 则 $\frac{AD}{DC}$ 的值为 _____.



【答案】5

【解析】

【分析】过点 D 作 $DF \perp AB$ 于点 F , 利用勾股定理求得 $AB = \sqrt{10}$, 根据旋转的性质可证 $\triangle ABB'$ 、 $\triangle DFB$ 是等腰直角三角形, 可得 $DF = BF$, 再由 $S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times DF \times AB$, 得 $AD = \sqrt{10}DF$, 证明

$\triangle AFD \sim \triangle ACB$ ，可得 $\frac{DF}{BC} = \frac{AF}{AC}$ ，即 $AF = 3DF$ ，再由 $AF = \sqrt{10} - DF$ ，求得 $DF = \frac{\sqrt{10}}{4}$ ，从而求得

$$AD = \frac{5}{2}, \quad CD = \frac{1}{2}, \quad \text{即可求解.}$$

【详解】解：过点 D 作 $DF \perp AB$ 于点 F ，

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \quad AC = 3, \quad BC = 1,$$

$$\therefore AB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

$\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle AB'C'$ ，

$$\therefore AB = AB' = \sqrt{10}, \quad \angle BAB' = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABB'$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore \angle ABB' = 45^\circ,$$

又 $\because DF \perp AB$ ，

$$\therefore \angle FDB = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle DFB$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore DF = BF,$$

$$\because S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times DF \times AB, \quad \text{即 } AD = \sqrt{10}DF,$$

$$\because \angle C = \angle AFD = 90^\circ, \quad \angle CAB = \angle FAD,$$

$$\therefore \triangle AFD \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{DF}{BC} = \frac{AF}{AC}, \quad \text{即 } AF = 3DF,$$

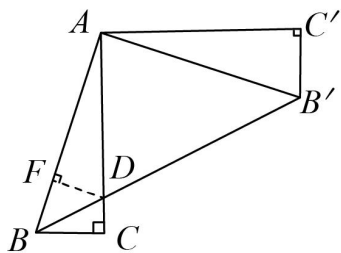
$$\text{又 } \because AF = \sqrt{10} - DF,$$

$$\therefore DF = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$\therefore AD = \sqrt{10} \times \frac{\sqrt{10}}{4} = \frac{5}{2}, \quad CD = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} = 5,$$

故答案为：5.



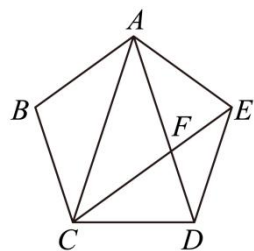
【点睛】本题考查旋转的性质、等腰三角形的判定与性质、相似三角形的判

定与性质、三角形的面积，熟练掌握相关知识是解题的关键.

16. 如图， AC, AD, CE 是正五边形 $ABCDE$ 的对角线， AD 与 CE 相交于点 F . 下列结论:

- ① CF 平分 $\angle ACD$; ② $AF = 2DF$; ③ 四边形 $ABCF$ 是菱形; ④ $AB^2 = AD \cdot EF$

其中正确的结论是_____. (填写所有正确结论的序号)



【答案】①③④

【解析】

【分析】根据正五边形的性质得出各角及各边之间的关系，然后由各角之间的关系及相似三角形的判定和性质，菱形的判定依次证明即可.

【详解】解：① $\because$ 正五边形 $ABCDE$,

$$\therefore \angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEA = \frac{180^\circ \times (5-3)}{5} = 108^\circ, \quad AB = BC = CD = DE = AE,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BCA = \angle DAE = \angle ADE = \angle DCE = \angle CED = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE = 108^\circ - \angle BCA - \angle DCE = 36^\circ = \angle DCE,$$

$\therefore CF$ 平分 $\angle ACD$; 正确;

$$\textcircled{2} \because \angle ACE = \angle DEC = 36^\circ, \quad \angle DFE = \angle AFC,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle ACF,$$

$$\therefore \frac{DF}{AF} = \frac{DE}{AC},$$

$$\because DE = AB, 2AB > AC,$$

$$\therefore \frac{DF}{AF} \neq \frac{1}{2},$$

即 $AF \neq 2DF$ ，故②错误；

③： $\because \angle BAC = \angle ACE$ ， $\angle ABC + \angle BAD = 108^\circ + 36^\circ + 36^\circ = 180^\circ$ ，

$\therefore BC \parallel AD$ ， $AB \parallel CE$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCF$ 是平行四边形，

$\therefore AB = BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCF$ 是菱形；正确；

④： $\because \angle CED = \angle DAE = 36^\circ$ ， $\angle EDF = \angle ADE$ ，

$\therefore \triangle DEF \sim \triangle DAE$ ，

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{EF}{AE}，$$

$\therefore ED \cdot AE = AD \cdot EF$ ，即 $AB^2 = AD \cdot EF$ ，正确；

故答案为：①③④。

【点睛】题目主要考查正多边形的性质及相似三角形、菱形的判定和性质，熟练掌握运用这些知识点是解题关键。

三、解答题：本大题共有 7 小题，共 72 分。请将必要的文字说明、计算过程或推理过程写在答题卡的对应位置。

17. (1) 先化简，再求值： $(a+2b)^2 + (a+2b)(a-2b)$ ，其中 $a = -1, b = \frac{1}{4}$ 。

(2) 解方程： $\frac{3}{x-1} = 5 + \frac{3x}{1-x}$ 。

【答案】(1) $2a^2 + 4ab$ ，1；(2) $x = 4$

【解析】

【分析】(1) 首先利用完全平方公式和平方差公式计算，然后合并同类项，最后代入求解即可；

(2) 根据解分式方程的一般步骤进行求解即可。

【详解】解：(1) 原式 $= a^2 + 4ab + 4b^2 + a^2 - 4b^2$

$$= 2a^2 + 4ab。$$

当 $a = -1, b = \frac{1}{4}$ 时，

$$\text{原式} = 2 \times (-1)^2 + 4 \times (-1) \times \frac{1}{4} = 1。$$

$$(2) \frac{3}{x-1} = 5 + \frac{3x}{1-x}$$

方程两边乘 $(x-1)$ ，得 $3 = 5(x-1) - 3x$ 。

解得 $x = 4$ 。

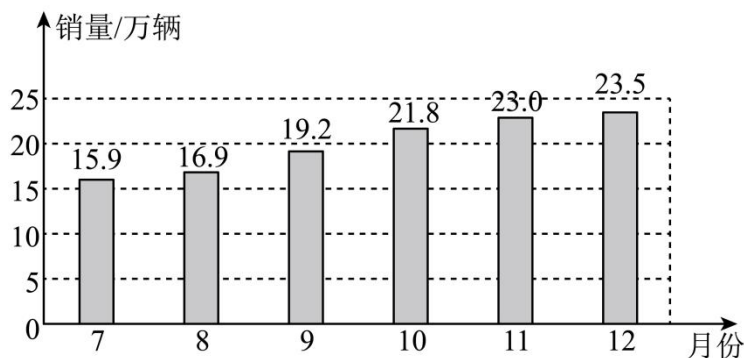
检验：将 $x = 4$ 代入 $x-1 = 4-1 = 3 \neq 0$ ，

$\therefore x = 4$ 是原方程的根。

【点睛】此题考查了整式的乘法混合运算以及化简求值，以及解分式方程，熟练掌握运算法则是解本题的关键。

18. 在推进碳达峰、碳中和进程中，我国新能源汽车产销两旺，连续 8 年保持全球第一。图为我国某自主品牌车企 2022 年下半年新能源汽车的月销量统计图。

2022年下半年月销量统计图



请根据所给信息，解答下列问题：

- (1) 通过计算判断该车企 2022 年下半年的月均销量是否超过 20 万辆；
- (2) 通过分析数据说明该车企 2022 年下半年月销量的特点（写出一条即可），并提出一条增加月销量的合理化建议。

【答案】(1) 该车企 2022 年下半年的月均销量超过 20 万辆

(2) 2022 年下半年月销量的特点：月销量呈递增趋势；12 月的销量最大；有三个月的销量超过了 20 万辆；中位数为 20.5 万辆；月均销量超过 20 万辆等

建议：充分了解客户需求，及时处理客户反馈，提供优质的售后服务

【解析】

【分析】(1) 根据平均数的定义求解即可；

(2) 利用条形统计图中的数据进行阐述即可。

【小问 1 详解】

$$\text{解：} \bar{x} = \frac{15.9 + 16.9 + 19.2 + 21.8 + 23.0 + 23.5}{6} = 20.05 \text{ (万辆),}$$

$$\therefore 20.05 > 20,$$

∴该车企 2022 年下半年的月均销量超过 20 万辆.

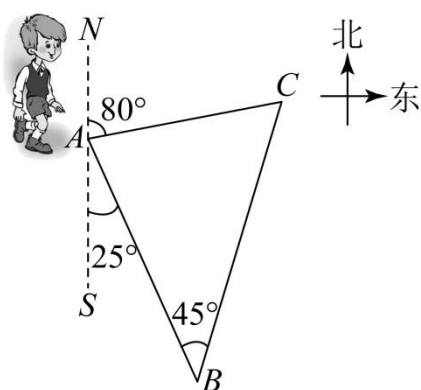
【小问 2 详解】

2022 年下半年月销量的特点：月销量呈递增趋势；12 月的销量最大；有三个月的销量超过了 20 万辆；中位数为 20.5 万辆；月均销量超过 20 万辆等.

建议：充分了解客户需求，及时处理客户反馈，提供优质的售后服务.

【点睛】本题考查平均数及中位数等统计知识，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答.

19. 为了增强学生体质、锤炼学生意志，某校组织一次定向越野拉练活动. 如图， A 点为出发点，途中设置两个检查点，分别为 B 点和 C 点，行进路线为 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$. B 点在 A 点的南偏东 25° 方向 $3\sqrt{2}\text{km}$ 处， C 点在 A 点的北偏东 80° 方向，行进路线 AB 和 BC 所在直线的夹角 $\angle ABC$ 为 45° .



- (1) 求行进路线 BC 和 CA 所在直线的夹角 $\angle BCA$ 的度数；
- (2) 求检查点 B 和 C 之间的距离 (结果保留根号).

【答案】(1) 行进路线 BC 和 CA 所在直线的夹角为 60°

(2) 检查点 B 和 C 之间的距离为 $(3 + \sqrt{3})\text{km}$

【解析】

【分析】(1) 根据题意得， $\angle NAC = 80^\circ$, $\angle SAB = 25^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$, $AB = 3\sqrt{2}$, 再由各角之间的关系求解即可；

(2) 过点 A 作 $AD \perp BC$, 垂足为 D , 由等角对等边得出 $AD = BD$, 再由正弦函数及正切函数求解即可.

【小问 1 详解】

解：如图，根据题意得， $\angle NAC = 80^\circ$, $\angle SAB = 25^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$, $AB = 3\sqrt{2}$,

$$\therefore \angle NAS = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB = 180^\circ - \angle NAC - \angle SAB = 180^\circ - 80^\circ - 25^\circ = 75^\circ.$$

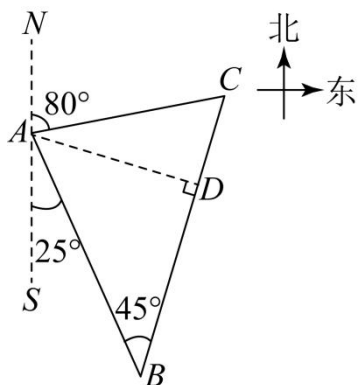
在 $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180^\circ$,

$$\therefore \angle BCA = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ.$$

答：行进路线 BC 和 CA 所在直线的夹角为 60° .

【小问 2 详解】

过点 A 作 $AD \perp BC$, 垂足为 D .



$$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ ,$$

$$\because \angle ABD = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ABD = 45^\circ .$$

$$\therefore AD = BD ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中,

$$\because \sin \angle ABD = \frac{AD}{AB} ,$$

$$\therefore AD = 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3(\text{km}) .$$

$$\therefore BD = AD = 3(\text{km}) ,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ACD \text{ 中, } \because \tan \angle BCA = \frac{AD}{CD} ,$$

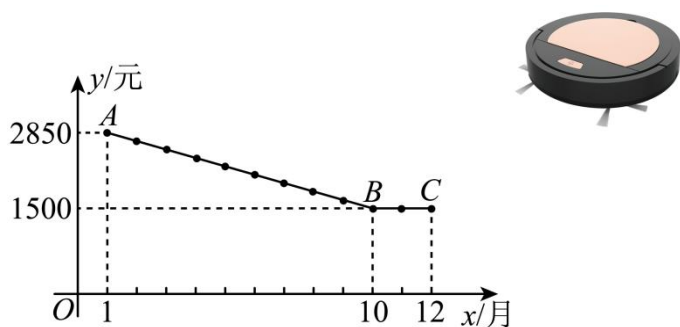
$$\therefore CD = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}(\text{km}) ,$$

$$\therefore BC = BD + CD = (3 + \sqrt{3})\text{km} .$$

答：检查点 B 和 C 之间的距离为 $(3 + \sqrt{3})\text{km}$.

【点睛】题目主要考查解三角形的应用，理解题意，作出相应辅助线求解是解题关键.

20. 随着科技的发展，扫地机器人已广泛应用于生活中，某公司推出一款新型扫地机器人，经统计该产品 2022 年每个月的销售情况发现，每台的销售价格随销售月份的变化而变化、设该产品 2022 年第 x (x 为整数) 个月每台的销售价格为 y (单位：元)， y 与 x 的函数关系如图所示 (图中 ABC 为一折线).



(1) 当 $1 \leq x \leq 10$ 时, 求每台的销售价格 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 设该产品 2022 年第 x 个月的销售数量为 m (单位: 万台), m 与 x 的关系可以用 $m = \frac{1}{10}x + 1$ 来描述, 求哪个月的销售收入最多, 最多为多少万元? (销售收入 = 每台的销售价格 $\times$ 销售数量)

【答案】(1) $y = -150x + 3000$

(2) 第 5 个月的销售收入最多, 最多为 3375 万元

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法即可求解;

(2) 根据销售收入 = 每台的销售价格 $\times$ 销售数量求得销售收入为 w 万元与销售月份 x 之间的函数关系, 再利用函数的性质即可求解.

【小问 1 详解】

解: 当 $1 \leq x \leq 10$ 时, 设每台的销售价格 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = kx + b (k \neq 0)$.

$\because$ 图象过 $A(1, 2850), B(10, 1500)$ 两点,

$$\therefore \begin{cases} k + b = 2850, \\ 10k + b = 1500. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = -150, \\ b = 3000. \end{cases}$$

$\therefore$ 当 $1 \leq x \leq 10$ 时, 每台的销售价格 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = -150x + 3000$.

【小问 2 详解】

设销售收入为 w 万元,

$$\textcircled{1} \text{ 当 } 1 \leq x \leq 10 \text{ 时, } w = (-150x + 3000) \left(\frac{1}{10}x + 1 \right) = -15(x - 5)^2 + 3375,$$

$\because -15 < 0$, 当 $x = 5$ 时, $w_{\text{最大}} = 3375$ (万元).

$$\textcircled{2} \text{ 当 } 10 < x \leq 12 \text{ 时, } w = 1500 \left(\frac{1}{10}x + 1 \right) = 150x + 1500,$$

$\because 150 > 0$,

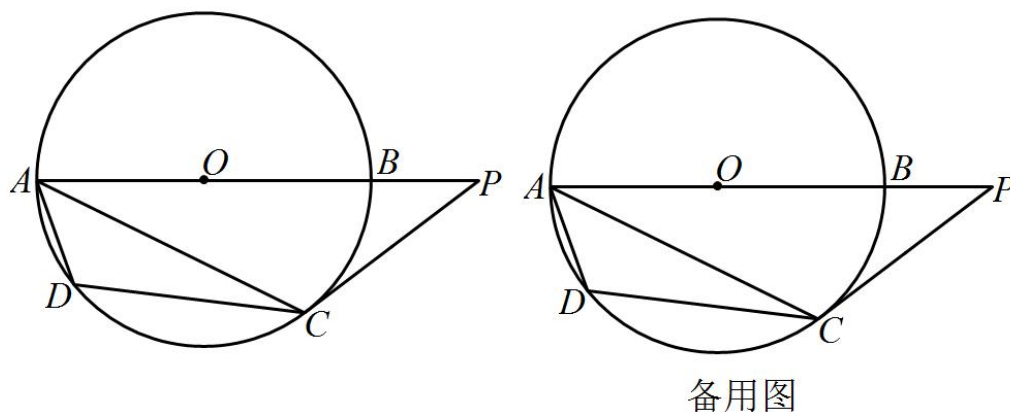
$\therefore w$ 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x=12$ 时, $w_{\text{最大}}=3300$ (万元).

$\therefore 3375 > 3300$, $\therefore$ 第 5 个月的销售收入最多, 最多为 3375 万元.

【点睛】 本题考查了待定系数法求一次函数的解析式、二次函数在销售问题中的应用, 理清题中的数量关系并熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

21. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AC 是弦, D 是 $\widehat{AC}$ 上一点, P 是 AB 延长线上一点, 连接 AD, DC, CP .



(1) 求证: $\angle ADC - \angle BAC = 90^\circ$; (请用两种证法解答)

(2) 若 $\angle ACP = \angle ADC$, $\odot O$ 的半径为 3, $CP=4$, 求 AP 的长.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 8

【解析】

【分析】 (1) 证法一: 连接 BD , 得到 $\angle ADB = 90^\circ$, 因为 $\angle BAC = \angle BDC$, 所以 $\angle ADC - \angle BAC = 90^\circ$; 证法二: 连接 BC , 可得 $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$, 则 $\angle ABC = 180^\circ - \angle ADC$, 根据 $\angle ACB = 90^\circ$, 可得 $\angle BAC + \angle ABC = 90^\circ$, 即可得到结果;

(2) 连接 OC , 根据角度间的关系可以证得 $\triangle OCP$ 为直角三角形, 根据勾股定理可得边 OP 的长, 进而求得结果.

【小问 1 详解】

证法一: 如图, 连接 BD ,

$$\because \widehat{BC} = \widehat{BC},$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BAC,$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

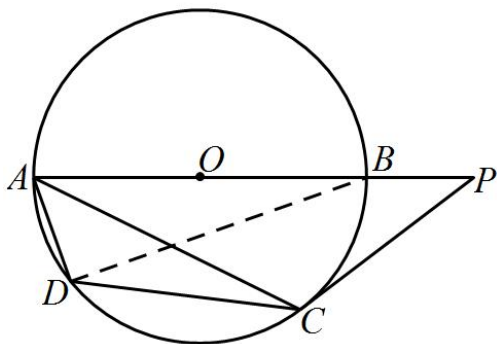
$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ADB + \angle BDC$$

$$\because \angle BAC = \angle BDC,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ + \angle BAC,$$

$$\therefore \angle ADC - \angle BAC = 90^\circ,$$



证法二：如图，连接 BC ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，

$$\therefore \angle ADC + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle ADC,$$

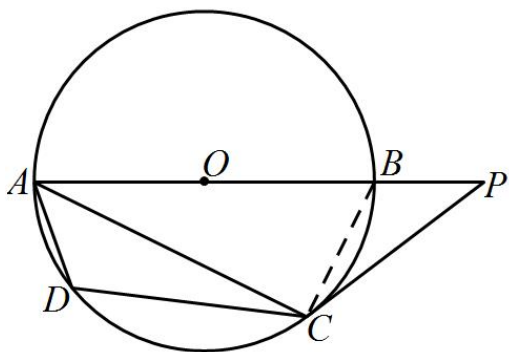
$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + 180^\circ - \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC - \angle BAC = 90^\circ,$$



【小问 2 详解】

解：如图，连接 OC ，

$$\because \angle ACP = \angle ADC, \quad \angle ADC - \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACP - \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\because OA = OC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACO,$$

$$\therefore \angle ACP - \angle ACO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OCP = 90^\circ.$$

$\because \odot O$ 的半径为 3,

$\therefore AO = OC = 3,$

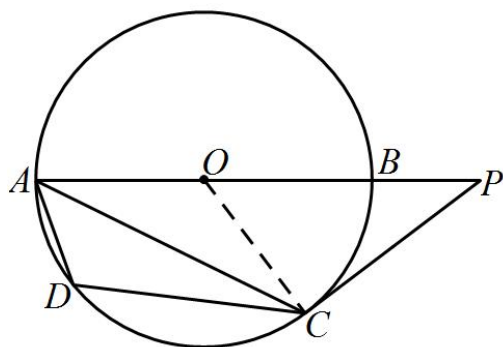
在 $\text{Rt}\triangle OCP$ 中, $OP^2 = OC^2 + CP^2,$

$\because CP = 4,$

$\therefore OP^2 = 3^2 + 4^2 = 25,$

$\therefore OP = 5,$

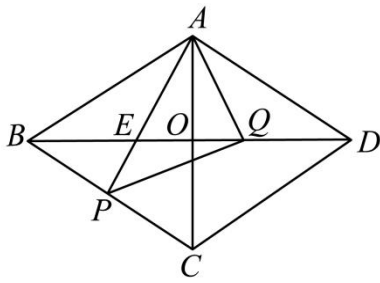
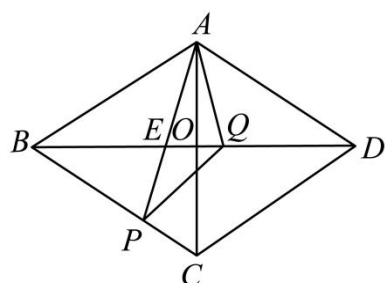
$\therefore AP = AO + OP = 8,$



【点睛】本题考查了圆周角定理，直径所对的圆周角为直角，

勾股定理，找到角度之间的关系是解题的关键.

22. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC, BD 相交于点 O ，点 P, Q 分别是边 BC ，线段 OD 上的点，连接 AP, QP, AP 与 OB 相交于点 E 。



(1) 如图 1，连接 QA 。当 $QA = QP$ 时，试判断点 Q 是否在线段 PC 的垂直平分线上，并说明理由；

(2) 如图 2，若 $\angle APB = 90^\circ$ ，且 $\angle BAP = \angle ADB$ ，

①求证： $AE = 2EP$ ；

②当 $OQ = OE$ 时，设 $EP = a$ ，求 PQ 的长（用含 a 的代数式表示）。

【答案】(1) 点 Q 在线段 PC 的垂直平分线上

(2) ①证明见解析，② $PQ = \sqrt{7}a$

【解析】

【分析】(1) 根据菱形的性质及垂直平分线的判定证明即可；

(2) ① 根据菱形的性质得出 $AB = BC = CD = DA$ ，再由各角之间的关系得出 $\angle BAP = \angle ABD = \angle CBD = 30^\circ$ ，由含 30° 度角的直角三角形的性质求解即可；③ 连接 QC ，利用等边三角形的判定和性质得出 $AE = 2a, AP = 3a$ ，再由正切函数及全等三角形的判定和性质及勾股定理求解即可。

【小问 1 详解】

解：如图，点 Q 在线段 PC 的垂直平分线上。

理由如下：连接 QC 。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC, BD 相交于点 O ，

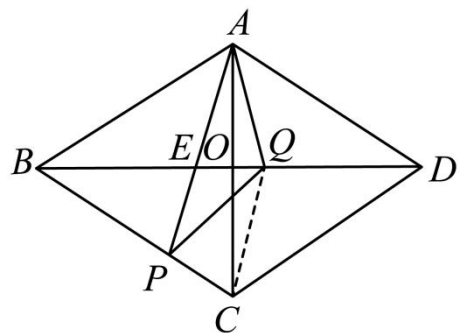
$\therefore BD \perp AC, OA = OC$

$\therefore QA = QC$ 。

$\because QA = QP$ ，

$\therefore QC = QP$ ，

$\therefore$ 点 Q 在线段 PC 的垂直平分线上。



【小问 2 详解】

① 证明：如图， $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB = BC = CD = DA$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle ADB, \angle CBD = \angle CDB$ ，

$\because BD \perp AC$ ，

$\therefore \angle ADO = \angle CDO$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \angle ADO$ 。

$\because \angle BAP = \angle ADB$ ，

$\therefore \angle BAP = \angle ABD = \angle CBD$ 。

$\therefore AE = BE$ ，

$\because \angle APB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAP + \angle ABP = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAP = \angle ABD = \angle CBD = 30^\circ.$$

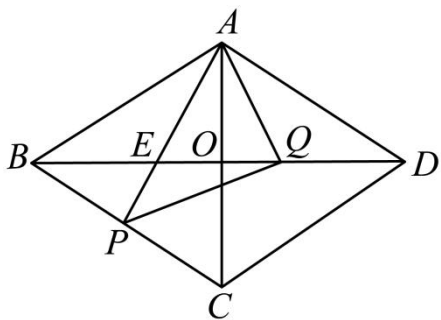
在 $\text{Rt}\triangle BPE$ 中, $\because \angle EPB = 90^\circ, \angle PBE = 30^\circ,$

$$\therefore EP = \frac{1}{2}BE.$$

$$\because AE = BE.$$

$$\therefore EP = \frac{1}{2}AE,$$

$$\therefore AE = 2EP;$$



②如图, 连接 QC .

$$\because AB = BC, \angle ABC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形.

$$\because \angle APB = 90^\circ,$$

$$\therefore BP = CP, EP = a,$$

$$\therefore AE = 2a, AP = 3a$$

在 $\text{Rt}\triangle APB$ 中, $\angle APB = 90^\circ,$

$$\because \tan \angle ABP = \frac{AP}{BP} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore BP = \sqrt{3}a.$$

$$\therefore CP = BP = \sqrt{3}a$$

$$\because AO = CO, \angle AOE = \angle COQ, OE = OQ,$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COQ,$$

$$\therefore AE = CQ = 2a, \angle EAO = \angle QCO.$$

$$\therefore AE \parallel CQ,$$

$$\because \angle APB = 90^\circ,$$

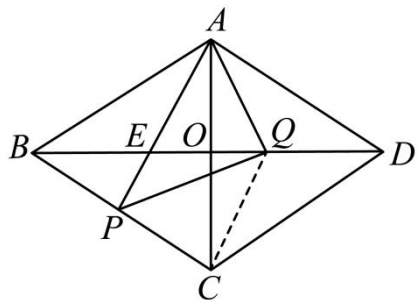
$$\therefore \angle QCP = 90^\circ.$$

在 $\text{Rt}\triangle PCQ$ 中, $\angle QCP = 90^\circ$,

由勾股定理得 $PQ^2 = PC^2 + CQ^2$,

$$\therefore PQ^2 = (\sqrt{3}a)^2 + (2a)^2 = 7a^2$$

$$\therefore PQ = \sqrt{7}a.$$

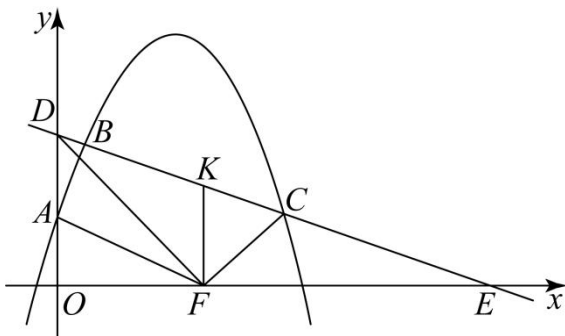


【点睛】题目主要考查菱形的性质，全等三角形的判定和性质，线段垂

直平分线的判定和性质及解直角三角形，理解题意，综合运用这些知识点是解题关键.

23. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = -x^2 + 3x + 1$ 交 y 轴于点 A ，直线 $y = -\frac{1}{3}x + 2$ 交抛物线于 B, C

两点（点 B 在点 C 的左侧），交 y 轴于点 D ，交 x 轴于点 E 。



(1) 求点 D, E, C 的坐标;

(2) F 是线段 OE 上一点 ($OF < EF$)，连接 AF, DF, CF ，且 $AF^2 + EF^2 = 21$ 。

①求证: $\triangle DFC$ 是直角三角形;

② $\angle DFC$ 的平分线 FK 交线段 DC 于点 K , P 是直线 BC 上方抛物线上一动点，当 $3 \tan \angle PFK = 1$ 时，求点 P 的坐标.

【答案】(1) $C(3, 1)$, $D(0, 2)$, $E(6, 0)$

(2) ①证明见解析, ②点 P 的坐标为 $(1, 3)$ 或 $(\sqrt{7}, 3\sqrt{7} - 6)$

【解析】

【分析】(1) 根据一次函数与坐标轴的交点及一次函数与二次函数的交点求解即可；

(2) ①设 $F(m, 0)$, 然后利用勾股定理求解, $m = 2$, 过点 C 作 $CG \perp x$ 轴, 垂足为 G . 再由等腰三角形及各角之间的关系即可证明; ②根据题意得出 $\tan \angle PFK = \frac{1}{3}$, 设点 P 的坐标为 $(t, -t^2 + 3t + 1)$, 根据题意得 $\frac{1}{3} < t < 3$. 分两种情况分析: (i) 当点 P 在直线 KF 的左侧抛物线上时, $\tan \angle P_1FK = \frac{1}{3}, \frac{1}{3} < t < 2$. (ii) 当点 P 在直线 KF 的右侧抛物线上时, $\tan \angle P_2FK = \frac{1}{3}, 2 < t < 3$. 求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 直线 $y = -\frac{1}{3}x + 2$ 交 y 轴于点 D , 交 x 轴于点 E ,

当 $x = 0$ 时, $y = 2$,

$\therefore D(0, 2)$,

当 $y = 0$ 时, $x = 6$,

$\therefore E(6, 0)$.

$\because$ 直线 $y = -\frac{1}{3}x + 2$ 交抛物线于 B, C 两点,

$\therefore -x^2 + 3x + 1 = -\frac{1}{3}x + 2$,

$\therefore 3x^2 - 10x + 3 = 0$, 解得 $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 3$.

$\because$ 点 B 在点 C 的左侧,

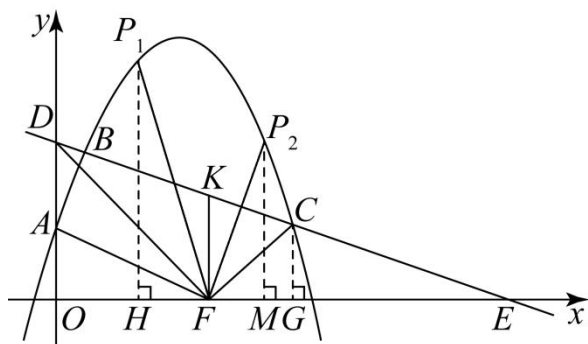
$\therefore$ 点 C 的横坐标为 3,

当 $x = 3$ 时, $y = 1$.

$\therefore C(3, 1)$;

【小问 2 详解】

如图,



①抛物线 $y = -x^2 + 3x + 1$ 交 y 轴于点 A ,

当 $x = 0$ 时, $y = 1$,

$\therefore A(0, 1)$,

$\therefore OA = 1$,

在 $\text{Rt}\triangle AOF$ 中, $\angle AOF = 90^\circ$,

由勾股定理得 $AF^2 = OA^2 + OF^2$,

设 $F(m, 0)$,

$\therefore OF = m$,

$\therefore AF^2 = 1 + m^2$,

$\because E(6, 0)$,

$\therefore OE = 6$,

$\therefore EF = OE - OF = 6 - m$,

$\because AF^2 + EF^2 = 21$,

$\therefore 1 + m^2 + (6 - m)^2 = 21$,

$\therefore m_1 = 2, m_2 = 4$,

$\because OF < EF$,

$\therefore m = 2$,

$\therefore OF = 2$,

$\therefore F(2, 0)$.

$\because D(0, 2)$,

$$\therefore OD = 2,$$

$$\therefore OD = OF.$$

$\therefore \triangle DOF$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle OFD = 45^\circ.$$

过点 C 作 $CG \perp x$ 轴, 垂足为 G .

$$\because C(3,1),$$

$$\therefore CG = 1, OG = 3,$$

$$\because GF = OG - OF = 1,$$

$$\therefore CG = GF,$$

$\therefore \triangle CGF$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle GFC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DFC = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle DFC$ 是直角三角形.

$$\textcircled{2} \because FK \text{ 平分 } \angle DFC, \angle DFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DFK = \angle CFK = 45^\circ$$

$$\therefore \angle OFK = \angle OFD + \angle DFK = 90^\circ,$$

$$\therefore FK \parallel y \text{ 轴}.$$

$$\because 3 \tan \angle PFK = 1,$$

$$\therefore \tan \angle PFK = \frac{1}{3}.$$

设点 P 的坐标为 $(t, -t^2 + 3t + 1)$, 根据题意得 $\frac{1}{3} < t < 3$.

$$(i) \text{ 当点 } P \text{ 在直线 } KF \text{ 的左侧抛物线上时, } \tan \angle P_1FK = \frac{1}{3}, \frac{1}{3} < t < 2.$$

过点 P_1 作 $P_1H \perp x$ 轴, 垂足为 H .

$$\therefore P_1H \parallel KF, \angle HP_1F = \angle P_1FK,$$

$$\therefore \tan \angle HP_1F = \frac{1}{3}.$$

$$\because HF = OF - OH,$$

$$\therefore HF = 2 - t,$$

在 $\text{Rt}\triangle P_1HF$ 中,

$$\therefore \tan \angle HP_1F = \frac{HF}{P_1H} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore P_1H = 3HF,$$

$$\therefore P_1H = -t^2 + 3t + 1,$$

$$\therefore -t^2 + 3t + 1 = 3(2 - t),$$

$$\therefore t^2 - 6t + 5 = 0,$$

$$\therefore t_1 = 1, t_2 = 5 \text{ (舍去)}.$$

$$\text{当 } t = 1 \text{ 时, } -t^2 + 3t + 1 = 3,$$

$$\therefore P_1(1, 3)$$

(ii) 当点 P 在直线 KF 的右侧抛物线上时, $\tan \angle P_2FK = \frac{1}{3}, 2 < t < 3$.

过点 P_2 作 $P_2M \perp x$ 轴, 垂足为 M .

$$\therefore P_2M \parallel KF,$$

$$\therefore \angle MP_2F = \angle P_2FK,$$

$$\therefore \tan \angle MP_2F = \frac{1}{3},$$

$$\therefore MF = OM - OF,$$

$$\therefore MF = t - 2$$

在 $\text{Rt}\triangle P_2MF$ 中,

$$\therefore \tan \angle MP_2F = \frac{MF}{P_2M} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore P_2M = 3MF,$$

$$\therefore P_2M = -t^2 + 3t + 1,$$

$$\therefore -t^2 + 3t + 1 = 3(t - 2),$$

$$\therefore t^2 = 7,$$

$$\therefore t_3 = \sqrt{7}, t_4 = -\sqrt{7} \text{ (舍去)}.$$

$$\text{当 } t = \sqrt{7} \text{ 时, } -t^2 + 3t + 1 = 3\sqrt{7} - 6,$$

$$\therefore P_2(\sqrt{7}, 3\sqrt{7} - 6)$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (1, 3) \text{ 或 } (\sqrt{7}, 3\sqrt{7} - 6).$$

【点睛】 题目主要考查一次函数与二次函数综合问题，特殊三角形问题及解三角形，理解题意，作出相应辅助线，综合运用这些知识点是解题关键.

