

2023 年云南省初中学业水平考试

数学

(全卷三个大题，共 24 个小题，共 8 页；满分 100 分，考试用时 120 分钟)

注意事项：

1. 本卷为试题卷。考生必须在答题卡上解题作答。答案应书写在答题卡的相应位置上，在试题卷、草稿纸上作答无效。
2. 考试结束后，请将试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题只有一个正确选项，每小题 3 分，共 36 分）

1. 中国是最早使用正负数表示具有相反意义的量的国家。若向东走 60 米记作 +60 米，则向西走 80 米可记作（ ）

- A. -80 米 B. 0 米 C. 80 米 D. 140 米

【答案】A

【解析】

【分析】此题主要用正负数来表示具有意义相反的两种量，根据向东走记为正，则向西走就记为负，直接得出结论即可。

【详解】解：∵ 向东走 60 米记作 +60 米，

∴ 向西走 80 米可记作 -80 米，

故选 A.

【点睛】此题主要考查正负数的意义，正数与负数表示意义相反的两种量，看清规定哪一个为正，则和它意义相反的就为负是解题的关键。

2. 云南省矿产资源极为丰富，被誉为“有色金属王国”。锂资源方面，滇中地区被中国科学院地球化学研究所探明拥有氧化锂资源达 340000 吨。340000 用科学记数法可以表示为（ ）

- A. 340×10^4 B. 34×10^5 C. 3.4×10^5 D. 0.34×10^6

【答案】C

【解析】

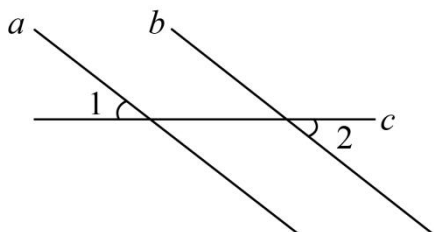
【分析】根据科学记数法的记数方法，340000 写成 $a \times 10^n$ 其中 $0 < |a| \leq 1$ ，故得到答案。

【详解】解：340000 = 3.4×10^5 .

故答案为：C.

【点睛】本题考查了科学记数法的定义，准确确定 a 和 n 的值是本题的解题关键。

3. 如图，直线 c 与直线 a 、 b 都相交。若 $a \parallel b$, $\angle 1 = 35^\circ$ ，则 $\angle 2 =$ （ ）

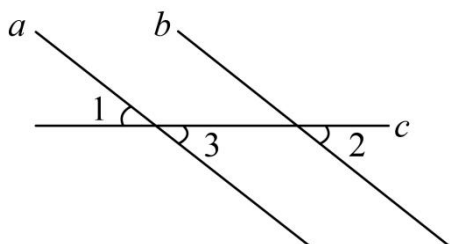
A. 145° B. 65° C. 55° D. 35°

【答案】D

【解析】

【分析】根据平行线的性质，对顶角相等，即可求解.

【详解】解：如图所示，



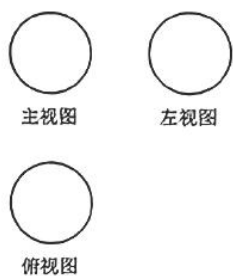
$$\because a \parallel b, \angle 1 = \angle 3 = 35^\circ$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3 = 35^\circ,$$

故选：D.

【点睛】本题考查了对顶角相等，平行线的性质，熟练掌握平行线的性质是解题的关键.

4. 某班同学用几个几何体组合成一个装饰品美化校园. 其中一个几何体的三视图（其中主视图也称正视图，左视图也称侧视图）如图所示，这个几何体是（ ）



A. 球

B. 圆柱

C. 长方体

D. 圆锥

【答案】A

【解析】

【分析】根据球体三视图的特点确定结果.

【详解】解：根据球体三视图的特点：球体的三视图都是大小相等的圆，确定该几何体为球.

故选：A.

【点睛】本题考查了几何体的三视图，熟悉各类几何体的三视图是解决本题的关键.

5. 下列计算正确的是 ()

A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

B. $(3a)^2 = 6a^2$

C. $a^6 \div a^3 = a^2$

D. $3a^2 - a^2 = 2a^2$

【答案】D

【解析】

【分析】利用同底数幂的乘法和除法、幂的乘方、合并同类项法则解出答案.

【详解】解: $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$, 故 A 错误;

$(3a)^2 = 3^2 a^2 = 9a^2$, 故 B 错误;

$a^6 \div a^3 = a^{6-3} = a^3$, 故 C 错误;

$3a^2 - a^2 = (3-1)a^2 = 2a^2$, 故 D 正确.

故本题选: D.

【点睛】本题考查了同底数幂的乘法和除法、幂的乘方、合并同类项法则, 对运算法则的熟练掌握并运用是解题的关键.

6. 为了解某班学生 2023 年 5 月 27 日参加体育锻炼的情况, 从该班学生中随机抽取 5 名同学进行调查. 经统计, 他们这天的体育锻炼时间 (单位: 分钟) 分别为 65, 60, 75, 60, 80. 这组数据的众数为 ()

A. 65

B. 60

C. 75

D. 80

【答案】B

【解析】

【分析】根据众数的定义求解即可.

【详解】解: 在 65, 60, 75, 60, 80 中, 出现次数最多的是 60,

$\therefore$ 这组数据的众数是 60,

故选: B

【点睛】本题考查了众数, 众数是指一组数据中出现次数最多的数据, 掌握众数的定义是解题的关键.

7. 中华文明, 源远流长: 中华汉字, 寓意深广. 下列四个选项中, 是轴对称图形的为 ()

A.

B.

C.

D.

【答案】C

【解析】

【分析】根据轴对称图形的定义: 如果一个图形沿着一条直线对折后两部分完全重合, 这样的图形叫做轴对称图形, 这条直线叫做对称轴; 据此可求解问题.

【详解】解：由题意得：A、B、D选项都不是轴对称图形，符合轴对称图形的只有C选项；

故选C.

【点睛】本题主要考查轴对称图形，熟练掌握轴对称图形的定义是解题的关键.

8. 若点 $A(1,3)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 图象上一点，则常数 k 的值为 ()

A. 3

B. -3

C. $\frac{3}{2}$

D. $-\frac{3}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】将点 $A(1,3)$ 代入反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ ，即可求解.

【详解】解：∵点 $A(1,3)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 图象上一点，

∴ $k = 1 \times 3 = 3$ ，

故选：A.

【点睛】本题考查了反比例函数的性质，熟练掌握反比例函数的性质是解题的关键.

9. 按一定规律排列的单项式： $a, \sqrt{2}a^2, \sqrt{3}a^3, \sqrt{4}a^4, \sqrt{5}a^5, \dots$ ，第 n 个单项式是 ()

A. $\sqrt{n}$

B. $\sqrt{n-1}a^{n-1}$

C. $\sqrt{na^n}$

D. $\sqrt{na^{n-1}}$

【答案】C

【解析】

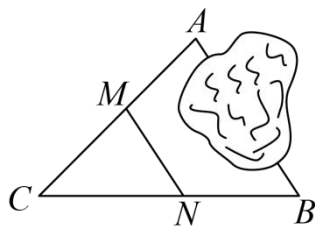
【分析】根据单项式的规律可得，系数为 $\sqrt{n}$ ，字母为 a ，指数为 1 开始的自然数，据此即可求解.

【详解】解：按一定规律排列的单项式： $a, \sqrt{2}a^2, \sqrt{3}a^3, \sqrt{4}a^4, \sqrt{5}a^5, \dots$ ，第 n 个单项式是 $\sqrt{na^n}$ ，

故选：C.

【点睛】本题考查了单项式规律题，找到单项式的变化规律是解题的关键.

10. 如图，A、B 两点被池塘隔开，A、B、C 三点不共线. 设 AC、BC 的中点分别为 M、N. 若 $MN = 3$ 米，则 $AB =$ ()



A. 4 米

B. 6 米

C. 8 米

D. 10 米

【答案】B

【解析】

【分析】根据三角形中位线定理计算即可.

【详解】解： $\because AC$ 、 BC 的中点分别为 M 、 N ,

$\therefore MN$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore AB = 2MN = 6(\text{米})$,

故选：B.

【点睛】本题考查的是三角形中位线定理，掌握三角形的中位线平行于第三边，且等于第三边的一半是解题的关键.

11. 阅读，正如一束阳光. 孩子们无论在哪里，都可以感受到阳光的照耀，都可以通过阅读触及更广阔的世界. 某区教育体育局向全区中小学生推出“童心读书会”的分享活动. 甲、乙两同学分别从距离活动地点800米和400米的两地同时出发，参加分享活动. 甲同学的速度是乙同学的速度1.2倍，乙同学比甲同学提前4分钟到达活动地点. 若设乙同学的速度是 x 米/分，则下列方程正确的是（ ）

A. $\frac{x}{800} - \frac{1.2x}{400} = 4$ B. $\frac{1.2x}{800} - \frac{x}{400} = 4$ C. $\frac{400}{1.2x} - \frac{800}{x} = 4$ D. $\frac{800}{1.2x} - \frac{400}{x} = 4$

【答案】D

【解析】

【分析】设乙同学的速度是 x 米/分，根据乙同学比甲同学提前4分钟到达活动地点，列出方程即可.

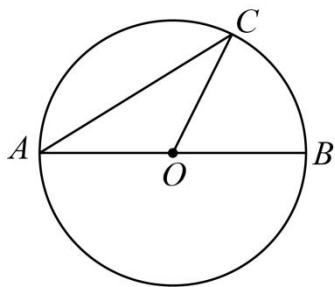
【详解】解：设乙同学的速度是 x 米/分，可得：

$$\frac{800}{1.2x} - \frac{400}{x} = 4$$

故选：D.

【点睛】本题考查分式方程的应用，分析题意，找到合适的等量关系是解决问题的关键.

12. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， C 是 $\odot O$ 上一点. 若 $\angle BOC = 66^\circ$ ，则 $\angle A =$ （ ）



- A. 66° B. 33° C. 24° D. 30°

【答案】B

【解析】

【分析】根据圆周角定理即可求解.

【详解】解：∵ $\widehat{BC} = \widehat{BC}$ ， $\angle BOC = 66^\circ$ ，

$$\therefore \angle A = \frac{1}{2} \angle BOC = 33^\circ,$$

故选：B.

【点睛】本题考查了圆周角定理，熟练掌握圆周角定理是解题的关键.

二、填空题（本大题共4小题，每小题2分，共8分）

13. 函数 $y = \frac{1}{x-10}$ 的自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \neq 10$

【解析】

【分析】要使 $\frac{1}{x-10}$ 有意义，则分母不为0，得出结果.

【详解】解：要使 $\frac{1}{x-10}$ 有意义得到 $x-10 \neq 0$ ，得 $x \neq 10$.

故答案为： $x \neq 10$.

【点睛】本题考查了函数自变量取值范围，分式有意义的条件，理解分母不为零是解决问题的关键.

14. 五边形的内角和是_____度.

【答案】 540

【解析】

【分析】根据 n 边形内角和为 $(n-2) \times 180^\circ$ 求解即可.

【详解】五边形的内角和是 $(5-2) \times 180^\circ = 540^\circ$.

故答案为： 540.

【点睛】本题考查求多边形的内角和. 掌握 n 边形内角和为 $(n-2) \times 180^\circ$ 是解题关键.

15. 分解因式： $m^2 - 4 =$ _____.

【答案】 $(m+2)(m-2)$

【解析】

【分析】直接根据平方差公式进行因式分解即可.

【详解】 $m^2 - 4 = (m+2)(m-2)$,

故填 $(m+2)(m-2)$

【点睛】本题考查利用平方差公式进行因式分解，解题关键在于熟练掌握平方差公式.

16. 数学活动课上，某同学制作了一顶圆锥形纸帽. 若圆锥的底面圆的半径为 1 分米，母线长为 4 分米，则该圆锥的高为_____分米.

【答案】 $\sqrt{15}$

【解析】

【分析】 根据勾股定理得，圆锥的高²=母线长²－底面圆的半径²得到结果.

【详解】 解： 由圆锥的轴截面可知：

圆锥的高²=母线长²－底面圆的半径²

圆锥的高 $= \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$ ，

故答案为 $\sqrt{15}$.

【点睛】 本题考查了圆锥，勾股定理，其中对圆锥的高，母线长，底面圆的半径之间的关系的理解是解决本题的关键.

三、解答题（本大题共 8 小题，共 56 分）

17. 计算： $|-1| + (-2)^2 - (\pi - 1)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \tan 45^\circ$.

【答案】 6

【解析】

【分析】 根据绝对值的性质、零指数幂的性质、负指数幂的性质和特殊角的三角函数值分别化简计算即可得出答案.

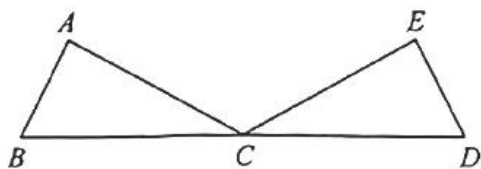
【详解】 解： $|-1| + (-2)^2 - (\pi - 1)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \tan 45^\circ$

$= 1 + 4 - 1 + 3 - 1$

$= 6$.

【点睛】 本题考查了实数的运算，熟练掌握绝对值的性质、零指数幂的性质、负指数幂的性质和特殊角的三角函数值是解题的关键.

18. 如图， C 是 BD 的中点， $AB = ED$, $AC = EC$. 求证： $\triangle ABC \cong \triangle EDC$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】根据 C 是 BD 的中点，得到 $BC = CD$ ，再利用 SSS 证明两个三角形全等.

【详解】证明：∵ C 是 BD 的中点，

$$\therefore BC = CD,$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EDC$ 中，

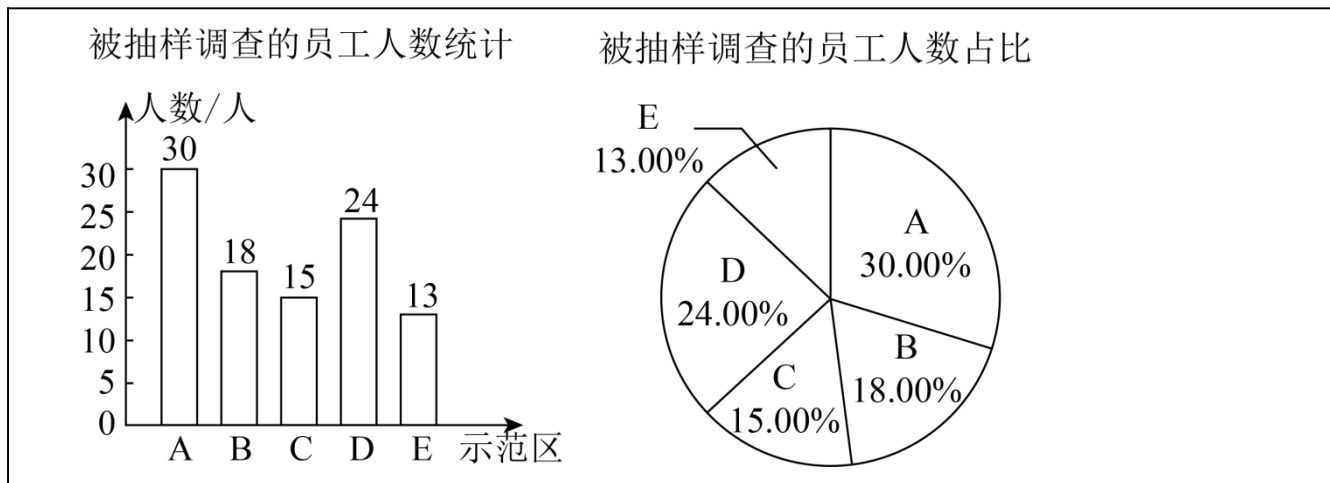
$$\begin{cases} BC = CD \\ AB = ED, \\ AC = EC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EDC (SSS)$$

【点睛】本题考查了线段中点，三角形全等的判定，其中对三角形判定条件的确定是解决本题的关键.

19.

调查主题	某公司员工的旅游需求
调查人员	某中学数学兴趣小组
调查方法	抽样调查
背景介绍	
某公司计划组织员工前往 5 个国家全域旅游示范区（以下简称示范区）中的 1 个自费旅游，这 5 个示范区为： A. 保山市腾冲市； B. 昆明市石林彝族自治县； C. 红河哈尼族彝族自治州弥勒市； D. 大理白族自治州大理市； E. 丽江市古城区. 某中学数学兴趣小组针对该公司员工的意向目的地开展抽样调查，并为该公司出具了调查报告（注：每位被抽样调查的员工选择且只选择 1 个意向前往的示范区）.	
报告内容	



请阅读以上材料，解决下列问题（说明：以上仅展示部分报告内容）。

- (1) 求本次被抽样调查的员工人数；
- (2) 该公司总的员工数量为 900 人，请你估计该公司意向前往保山市腾冲市的员工人数。

【答案】(1) 100 人

(2) 270 人

【解析】

【分析】(1) 根据保山市腾冲市的员工人数除以所占百分比即可求出本次被抽样调查的员工人数；

(2) 用该公司总的员工数乘以样本中保山市腾冲市的员工人数除以所占百分比即可估计出该公司意向前往保山市腾冲市的员工人数。

【小问 1 详解】

本次被抽样调查的员工人数为： $30 \div 30.00\% = 100$ （人），

所以，本次被抽样调查的员工人数为 100 人；

【小问 2 详解】

$900 \times 30.00\% = 270$ （人），

答：估计该公司意向前往保山市腾冲市的员工人数为 270 人。

【点睛】本题考查扇形统计图及相关计算。熟练掌握用样本估计总体是解答本题的关键。

20. 甲、乙两名同学准备参加种植蔬菜的劳动实践活动，各自随机选择种植辣椒、种植茄子、种植西红柿三种中的一种。记种植辣椒为 A，种植茄子为 B，种植西红柿为 C，假设这两名同学选择种植哪种蔬菜不受任何因素影响，且每一种被选到的可能性相等。记甲同学的选择为 x ，乙同学的选择为 y 。

- (1) 请用列表法或画树状图法中的一种方法，求 (x, y) 所有可能出现的结果总数；
- (2) 求甲、乙两名同学选择种植同一种蔬菜的概率 P 。

【答案】(1) 9 (2) $\frac{1}{3}$

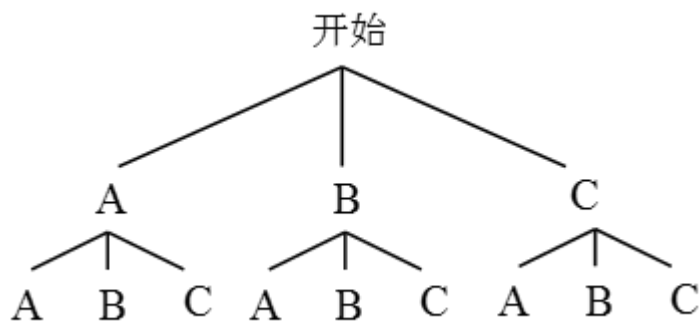
【解析】

【分析】(1) 根据题意列出树状图，即可得到答案；

(2) 根据 (1) 列出的情况，找到甲、乙两名同学选择种植同一种蔬菜的情况，得出概率.

【小问 1 详解】

解：由题意得：



共有 9 种情况，分别是：(A,A)、(A,B)、(A,C)、(B,A)、(B,B)、(B,C)、(C,A)、(C,B)、(C,C)。

【小问 2 详解】

解：由 (1) 得

其中甲、乙两名同学选择种植同一种蔬菜的情况有 (A,A)、(B,B)、(C,C)，共 3 种，

$$P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

∴ 甲、乙两名同学选择种植同一种蔬菜的概率为 $\frac{1}{3}$

【点睛】本题考查了树状图法求概率的问题，解题的关键是画出树状图。

21. 蓝天白云下，青山绿水间，支一顶帐篷，邀亲朋好友，听蝉鸣，闻清风，话家常，好不惬意。某景区为响应文化和旅游部《关于推动露营旅游休闲健康有序发展的指导意见》精神，需要购买 A、B 两种型号的帐篷。若购买 A 种型号帐篷 2 顶和 B 种型号帐篷 4 顶，则需 5200 元；若购买 A 种型号帐篷 3 顶和 B 种型号帐篷 1 顶，则需 2800 元。

(1) 求每顶 A 种型号帐篷和每顶 B 种型号帐篷的价格；

(2) 若该景区需要购买 A、B 两种型号的帐篷共 20 顶（两种型号的帐篷均需购买），购买 A 种型号帐篷数量不超过购买 B 种型号帐篷数量的 $\frac{1}{3}$ ，为使购买帐篷的总费用最低，应购买 A 种型号帐篷和 B 种型号帐篷各多少顶？购买帐篷的总费用最低为多少元？

【答案】(1) 每顶 A 种型号帐篷的价格为 600 元，每顶 B 种型号帐篷的价格为 1000 元

(2) 当 A 种型号帐篷为 5 顶时，B 种型号帐篷为 15 顶时，总费用最低，为 18000 元。

【解析】

【分析】(1) 根据题意中的等量关系列出二元一次方程组，解出方程组后得到答案；

(2) 根据购买 A 种型号帐篷数量不超过购买 B 种型号帐篷数量的 $\frac{1}{3}$ ，列出一元一次不等式，得出 A 种型号帐篷数量范围，再根据一次函数的性质，取 A 种型号帐篷数量的最大值时总费用最少，从而得出答案.

【小问 1 详解】

解：设每顶 A 种型号帐篷的价格为 x 元，每顶 B 种型号帐篷的价格为 y 元.

根据题意列方程组为：
$$\begin{cases} 2x + 4y = 5200 \\ 3x + y = 2800 \end{cases}$$
，解得
$$\begin{cases} x = 600 \\ y = 1000 \end{cases}$$
，

答：每顶 A 种型号帐篷的价格为 600 元，每顶 B 种型号帐篷的价格为 1000 元.

【小问 2 详解】

解：设 A 种型号帐篷购买 m 顶，总费用为 w 元，则 B 种型号帐篷为 $(20-m)$ 顶，

由题意得 $w = 600m + 1000(20-m) = -400m + 20000$ ，

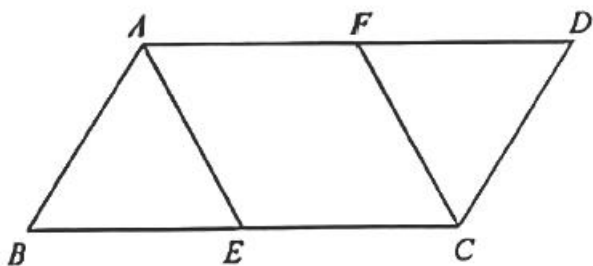
其中 $m \leq \frac{1}{3}(20-m)$ ，得 $m \leq 5$ ，

故当 A 种型号帐篷为 5 顶时，总费用最低，总费用为 $w = 600 \times 5 + 1000 \times (20-5) = 18000$ ，

答：当 A 种型号帐篷为 5 顶时，B 种型号帐篷为 15 顶时，总费用最低，为 18000 元.

【点睛】本题考查了二元一次方程组应用，一元一次不等式应用及一次函数的应用，找出准确的等量关系及不等关系是解题的关键.

22. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中， AE 、 CF 分别是 $\angle BAD$ 、 $\angle BCD$ 的平分线，且 E 、 F 分别在边 BC 、 AD 上， $AE = AF$.



(1) 求证：四边形 $AECF$ 是菱形；

(2) 若 $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\triangle ABE$ 的面积等于 $4\sqrt{3}$ ，求平行线 AB 与 DC 间的距离.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 先证 $AD \parallel BC$ ，再证 $AE \parallel FC$ ，从而四边形 $AECF$ 是平行四边形，又 $AE = AF$ ，于是四边形 $AECF$ 是菱形；

(2) 连接 AC ，先求得 $\angle BAE = \angle DAE = \angle ABC = 60^\circ$ ，再证 $AC \perp AB$ ，

$\angle ACB = 90^\circ - \angle ABC = 30^\circ = \angle EAC$ ，于是有 $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AB}{AC}$ ，得 $AB = \frac{\sqrt{3}}{3} AC$ ，再证 $AE = BE = CE$ ，

从而根据面积公式即可求得 $AC = 4\sqrt{3}$ 。

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $\angle BAD = \angle BCD$ ，

$\therefore \angle BEA = \angle DAE$ ，

$\because AE$ 、 CF 分别是 $\angle BAD$ 、 $\angle BCD$ 的平分线，

$\therefore \angle BAE = \angle DAE = \frac{1}{2} \angle BAD$ ， $\angle BCF = \frac{1}{2} \angle BCD$ ，

$\therefore \angle DAE = \angle BCF = \angle BEA$ ，

$\therefore AE \parallel FC$ ，

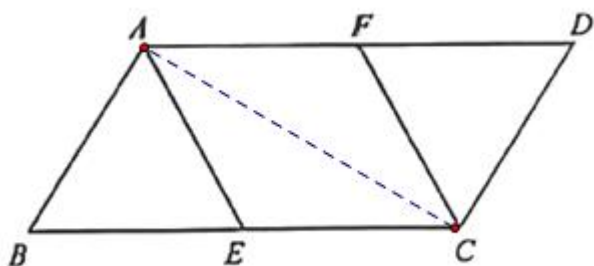
$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形，

$\because AE = AF$ ，

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形；

【小问 2 详解】

解：连接 AC ，



$\because AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle BAD = 180^\circ - \angle ABC = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle BAE = \angle DAE = \angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形，

$$\therefore \angle EAC = \frac{1}{2} \angle DAE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BAE + \angle EAC = 90^\circ,$$

$$\therefore AC \perp AB, \angle ACB = 90^\circ - \angle ABC = 30^\circ = \angle EAC,$$

$$\therefore AE = CE, \tan 30^\circ = \tan \angle ACB = \frac{AB}{AC} \text{ 即 } \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore AB = \frac{\sqrt{3}}{3} AC,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle ABC,$$

$$\therefore AE = BE = CE,$$

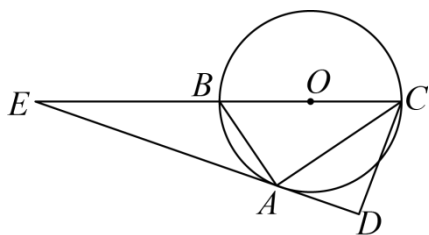
$$\therefore \triangle ABE \text{ 的面积等于 } 4\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB = \frac{1}{2} AC \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} AC = \frac{\sqrt{3}}{6} AC^2 = 8\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{平行线 } AB \text{ 与 } DC \text{ 间的距离 } AC = 4\sqrt{3}.$$

【点睛】本题考查了平行四边形的判定及性质，菱形的判定，角平分线的定义，等腰三角形的判定，三角函数的应用以及平行线间的距离，熟练掌握平行四边形的判定及性质，菱形的判定，角平分线的定义，等腰三角形的判定，三角函数的应用以及平行线间的距离等知识是解题的关键。

23. 如图， BC 是 $\odot O$ 的直径， A 是 $\odot O$ 上异于 B 、 C 的点。 $\odot O$ 外的点 E 在射线 CB 上，直线 EA 与 CD 垂直，垂足为 D ，且 $DA \cdot AC = DC \cdot AB$ 。设 $\triangle ABE$ 的面积为 S_1 ， $\triangle ACD$ 的面积为 S_2 。



(1) 判断直线 EA 与 $\odot O$ 的位置关系，并证明你的结论；

(2) 若 $BC = BE$, $S_2 = mS_1$ ，求常数 m 的值。

【答案】(1) EA 与 $\odot O$ 相切，理由见解析

(2) $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】(1) EA 与 $\odot O$ 相切，理由如下：连接 OA ，先证 $\triangle BAC \sim \triangle ADC$ 得 $\angle ABO = \angle DAC$ ，又证 $\angle ABO = \angle BAO = \angle DAC$ ，进而有 $\angle OAD = \angle OAC + \angle DAC = 90^\circ$ ，于是即可得 EA 与 $\odot O$ 相切；

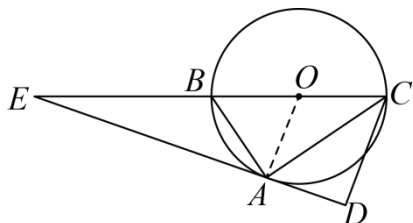
(2) 先求得 $\frac{S_{\triangle EAC}}{S_{\triangle ABE}} = 2$, 再证 $\triangle EAB \sim \triangle ECA$, 得 $\frac{S_{\triangle EAC}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{AC^2}{AB^2} = 2$, 从而有 $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{3}{2}$, 又 $\triangle BAC \sim \triangle ADC$,

即可得解.

【小问 1 详解】

解: EA 与 $\odot O$ 相切, 理由如下:

连接 OA ,



$\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径, 直线 EA 与 CD 垂直,

$\therefore \angle BAC = \angle ADC = 90^\circ$,

$\because DA \cdot AC = DC \cdot AB$,

$\therefore \frac{DA}{AB} = \frac{DC}{AC}$,

$\therefore \triangle BAC \sim \triangle ADC$

$\therefore \angle ABO = \angle DAC$,

$\because OA = OB$,

$\therefore \angle ABO = \angle BAO = \angle DAC$,

$\therefore \angle BAC = \angle BAO + \angle OAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle OAD = \angle OAC + \angle DAC = 90^\circ$,

$\therefore OA \perp DE$,

$\therefore EA$ 与 $\odot O$ 相切;

【小问 2 详解】

解: $\because BC = BE$,

$\therefore S_{\triangle EAC} = 2S_{\triangle ABE} = 2S_1, S_{\triangle EAC} = S_{\triangle ABC} = S_1$,

$\therefore \frac{S_{\triangle EAC}}{S_{\triangle ABE}} = 2$,

$\therefore OA \perp DE$,

$\therefore \angle OAB + \angle BAE = \angle OAE = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 90^\circ, \angle OBA = \angle OBA$,

$$\therefore \angle OBA + \angle ECA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle ECA,$$

$$\therefore \angle E = \angle E,$$

$$\therefore \triangle EAB \sim \triangle ECA,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle EAC}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{AC^2}{AB^2} = 2,$$

$$\therefore \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{又} \because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \triangle BAC \sim \triangle ADC,$$

$$\therefore m = \frac{S_2}{S_1} = \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{2}{3}.$$

【点睛】 本题考查了直径所对的圆周角是直角，垂线的性质，相似三角形的判定及性质，切线的判定，勾股定理，熟练掌握直径所对的圆周角是直角，垂线的性质，相似三角形的判定及性质，切线的判定以及勾股定理等知识是解题的关键.

24. 数和形是数学研究客观物体的两个方面，数（代数）侧重研究物体数量方面，具有精确性、形（几何）侧重研究物体形的方面，具有直观性. 数和形相互联系，可用数来反映空间形式，也可用形来说明数量关系. 数形结合就是把两者结合起来考虑问题，充分利用代数、几何各自的优势，数形互化，共同解决问题. 同学们，请你结合所学的数学解决下列问题.

在平面直角坐标系中，若点的横坐标、纵坐标都为整数，则称这样的点为整点. 设函数

$$y = (4a + 2)x^2 + (9 - 6a)x - 4a + 4 \quad (\text{实数 } a \text{ 为常数}) \text{ 的图象为图象 } T.$$

(1) 求证：无论 a 取什么实数，图象 T 与 x 轴总有公共点；

(2) 是否存在整数 a ，使图象 T 与 x 轴的公共点中有整点？若存在，求所有整数 a 的值；若不存在，请说明理由.

【答案】 (1) 见解析 (2) $a = 0$ 或 $a = -1$ 或 $a = 1$ 或 $a = -2$

【解析】

【分析】(1) 分 $a = -\frac{1}{2}$ 与 $a \neq -\frac{1}{2}$ 两种情况讨论论证即可；

(2) 当 $a = -\frac{1}{2}$ 时，不符合题意，当 $a \neq -\frac{1}{2}$ 时，对于函数 $y = (4a+2)x^2 + (9-6a)x - 4a + 4$ ，令 $y = 0$ ，得 $(4a+2)x^2 + (9-6a)x - 4a + 4 = 0$ ，从而有 $x = \frac{4a-4}{2a+1}$ 或 $x = -\frac{1}{2}$ ，根据整数 a ，使图象 T 与 x 轴的公共点中有整点，即 x 为整数，从而有 $2a+1=1$ 或 $2a+1=-1$ 或 $2a+1=2$ 或 $2a+1=-2$ 或 $2a+1=3$ 或 $2a+1=-3$ 或 $2a+1=6$ 或 $2a+1=-6$ ，解之即可。

【小问 1 详解】

解：当 $a = -\frac{1}{2}$ 时， $4a+2=0$ ，函数 $y = (4a+2)x^2 + (9-6a)x - 4a + 4$ 为一次函数 $y = 12x + 6$ ，此时，令 $y = 0$ ，则 $12x + 6 = 0$ ，解得 $x = -\frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 一次函数 $y = 12x + 6$ 与 x 轴的交点为 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ；

当 $a \neq -\frac{1}{2}$ 时， $4a+2 \neq 0$ ，函数 $y = (4a+2)x^2 + (9-6a)x - 4a + 4$ 为二次函数，

$$\therefore y = (4a+2)x^2 + (9-6a)x - 4a + 4,$$

$$\therefore \Delta = (9-6a)^2 - 4(4a+2)(-4a+4)$$

$$= 81 - 108a + 36a^2 + 64a^2 - 32a - 32$$

$$= 100a^2 - 140a + 49$$

$$= (10a-7)^2 \geq 0,$$

$\therefore$ 当 $a \neq -\frac{1}{2}$ 时， $y = (4a+2)x^2 + (9-6a)x - 4a + 4$ 与 x 轴总有交点，

$\therefore$ 无论 a 取什么实数，图象 T 与 x 轴总有公共点；

【小问 2 详解】

解：当 $a = -\frac{1}{2}$ 时，不符合题意，

当 $a \neq -\frac{1}{2}$ 时，对于函数 $y = (4a+2)x^2 + (9-6a)x - 4a + 4$ ，令 $y = 0$ ，则

$$(4a+2)x^2 + (9-6a)x - 4a + 4 = 0,$$

$$\therefore [(2a+1)x - (4a-4)](2x+1) = 0,$$

$$\therefore (2a+1)x - (4a-4) = 0 \text{ 或 } 2x+1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{4a-4}{2a+1} \text{ 或 } x = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore x = 2 - \frac{6}{2a+1}, \text{ 整数 } a, \text{ 使图象 } T \text{ 与 } x \text{ 轴的公共点中有整点, 即 } x \text{ 为整数,}$$

$$\therefore 2a+1=1 \text{ 或 } 2a+1=-1 \text{ 或 } 2a+1=2 \text{ 或 } 2a+1=-2 \text{ 或 } 2a+1=3 \text{ 或 } 2a+1=-3 \text{ 或 } 2a+1=6 \text{ 或 } 2a+1=-6,$$

$$\text{解得 } a=0 \text{ 或 } a=-1 \text{ 或 } a=\frac{1}{2} \text{ (舍去) 或 } a=-\frac{3}{2} \text{ (舍去) 或 } a=1 \text{ 或 } a=-2 \text{ 或 } a=\frac{5}{2} \text{ (舍去) 或 } a=-\frac{7}{2} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore a=0 \text{ 或 } a=-1 \text{ 或 } a=1 \text{ 或 } a=-2.$$

【点睛】 本题主要考查了一次函数的性质，二次函数与一元二次方程之间的关系以及二次函数的性质，熟练掌握一次函数的性质，二次函数与一元二次方程之间的关系，二次函数的性质以及数形相结合的思想是解题的关键.

