

2023 年上海市初中学业水平考试

考生注意：

1. 本场考试时间 100 分钟，试卷共 4 页，满分 150 分，答题纸共 2 页。
2. 作答前，在答题纸指定位置填写姓名、报名号、座位号。将核对后的条形码贴在答题纸指定位置。
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位。在试卷上的作答一律不得分。
4. 选择题和作图题用 2B 铅笔作答，其余题型用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答。

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，共 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题卡的相应位置上】

1. 下列运算正确的是（ ）

A. $a^5 \div a^2 = a^3$ B. $a^3 + a^3 = a^6$ C. $(a^3)^2 = a^5$ D. $\sqrt{a^2} = a$

【答案】A

【解析】

【分析】根据同底数幂的除法，合并同类项，幂的乘方，二次根式的化简等计算即可。

【详解】解：A、 $a^5 \div a^2 = a^3$ ，故正确，符合题意；

B、 $a^3 + a^3 = 2a^3$ ，故错误，不符合题意；

C、 $(a^3)^2 = a^6$ ，故错误，不符合题意；

D、 $\sqrt{a^2} = |a|$ ，故错误，不符合题意；

故选：A.

【点睛】本题考查了同底数幂的除法，合并同类项，幂的乘方，二次根式的化简，熟练掌握幂的运算法则是解题的关键。

2. 在分式方程 $\frac{2x-1}{x^2} + \frac{x^2}{2x-1} = 5$ 中，设 $\frac{2x-1}{x^2} = y$ ，可得到关于 y 的整式方程为（ ）

A. $y^2 + 5y + 5 = 0$ B. $y^2 - 5y + 5 = 0$ C. $y^2 + 5y + 1 = 0$ D. $y^2 - 5y + 1 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】设 $\frac{2x-1}{x^2} = y$ ，则原方程可变形为 $y + \frac{1}{y} = 5$ ，再化为整式方程即可得出答案。

【详解】解：设 $\frac{2x-1}{x^2} = y$ ，则原方程可变形为 $y + \frac{1}{y} = 5$ ，

即 $y^2 - 5y + 1 = 0$ ；

故选：D.

【点睛】本题考查了利用换元法解方程，正确变形是关键，注意最后要化为整式方程.

3. 下列函数中，函数值 y 随 x 的增大而减小的是（ ）

- A. $y = 6x$ B. $y = -6x$ C. $y = \frac{6}{x}$ D. $y = -\frac{6}{x}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据一次函数和反比例函数的性质，逐项分析即可得到答案.

【详解】解：A、 $y = 6x$ ， $k = 6 > 0$ ， y 随 x 的增大而增大，不符合题意；

B、 $y = -6x$ ， $k = -6 < 0$ ， y 随 x 的增大而减小，符合题意；

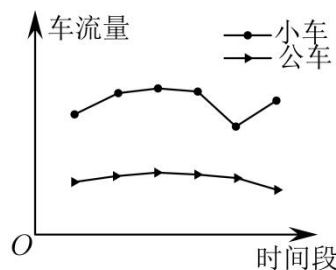
C、 $y = \frac{6}{x}$ ， $k = 6 > 0$ ，在每个象限内， y 随 x 的增大而减小，不符合题意；

D、 $y = -\frac{6}{x}$ ， $k = -6 < 0$ ，在每个象限内， y 随 x 的增大而增大，不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题主要考查了一次函数、反比例函数的性质，熟练掌握函数的性质，是解题的关键.

4. 如图所示，为了调查不同时间段的车流量，某学校的兴趣小组统计了不同时间段的车流量，下图是各时间段的小车与公车的车流量，则下列说法正确的是（ ）



- A. 小车的车流量与公车的车流量稳定； B. 小车的车流量的平均数较大；
C. 小车与公车车流量在同一时间段达到最小值； D. 小车与公车车流量的变化趋势相同.

【答案】B

【解析】

【分析】根据折线统计图逐项判断即可得.

【详解】解：A、小车的车流量不稳定，公车的车流量较为稳定，则此项错误，不符合题意；

B、小车的车流量的平均数较大，则此项正确，符合题意；

C、小车车流量达到最小值的时间段早于公车车流量，则此项错误，不符合题意；

D、小车车流量的变化趋势是先增加、再减小、又增加；大车车流量的变化趋势是先增加、再减小，则此项错误，不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查了折线统计图，读懂折线统计图是解题关键.

5. 在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC, AB = CD$. 下列说法能使四边形 $ABCD$ 为矩形的是 ()

- A. $AB \parallel CD$ B. $AD = BC$ C. $\angle A = \angle B$ D. $\angle A = \angle D$

【答案】C

【解析】

【分析】结合平行四边形的判定和性质及矩形的判定逐一分析即可.

【详解】A: $\because AB \parallel CD, AD \parallel BC, AB = CD$

$\therefore ABCD$ 为平行四边形而非矩形

故 A 不符合题意

B: $\because AD = BC, AD \parallel BC, AB = CD$

$\therefore ABCD$ 为平行四边形而非矩形

故 B 不符合题意

C: $\because AD \parallel BC$

$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ$

$\because \angle A = \angle B$

$\therefore \angle A = \angle B = 90^\circ$

$\because AB = CD$

$\therefore AB \parallel CD$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形

故 C 符合题意

D: $\because AD \parallel BC$

$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ$

$\because \angle A = \angle D$

$\therefore \angle D + \angle B = 180^\circ$

$\therefore ABCD$ 不是平行四边形也不是矩形

故 D 不符合题意

故选：C .

【点睛】 本题主要考查平行线的性质，平行四边形的判定和性质及矩形的判定等知识，熟练掌握以上知识并灵活运用是解题的关键.

6. 已知在梯形 $ABCD$ 中，连接 AC ， BD ，且 $AC \perp BD$ ，设 $AB = a, CD = b$. 下列两个说法：

$$\textcircled{1} AC = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b); \textcircled{2} AD = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

则下列说法正确的是 ()

A. ①正确②错误

B. ①错误②正确

C. ①②均正确

D. ①②均错误

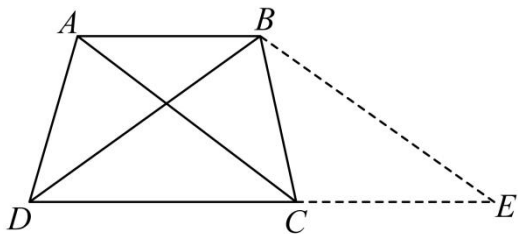
【答案】 D

【解析】

【分析】 根据已知及结论，作出图形，进而可知当梯形 $ABCD$ 为等腰梯形，即 $AD = BC$ ， $AB \parallel CD$ 时，

$$\textcircled{1} AC = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b); \textcircled{2} AD = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2}, \text{ 其余情况得不出这样的结论，从而得到答案.}$$

【详解】 解：过 B 作 $BE \parallel CA$ ，交 BC 延长线于 E ，如图所示：



若梯形 $ABCD$ 为等腰梯形，即 $AD = BC$ ， $AB \parallel CD$ 时，

$\therefore$ 四边形 $ACEB$ 是平行四边形，

$$\therefore CE = AB, AC = BE,$$

$$\because AB \parallel DC,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle CBA,$$

$$\because AD = BC,$$

$$\therefore \triangle DAB \cong \triangle CBA (\text{SAS})$$

$$\therefore AC = BD, \text{ 即 } BD = BE,$$

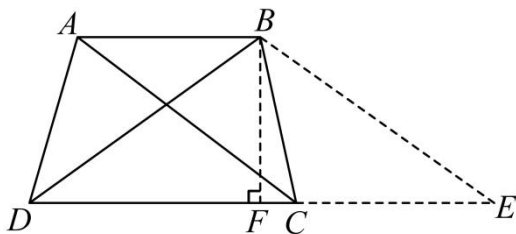
$$\text{又} \because AC \perp BD,$$

$\therefore BE \perp BD$,

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中, $BD = BE$, $AB = a, CD = b$, 则 $DE = DC + CE = b + a$,

$$\therefore AC = BE = \frac{DE}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} DE = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b), \text{ 此时①正确;}$$

过 B 作 $BF \perp DE$ 于 F , 如图所示:



在 $\text{Rt}\triangle BFC$ 中, $BD = BE$, $AB = a, CD = b$, $DE = b + a$, 则 $BF = FE = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2}(a+b)$,

$$FC = FE - CE = \frac{1}{2}(a+b) - a = \frac{1}{2}(b-a),$$

$$\therefore BC = \sqrt{BF^2 + FC^2} = \sqrt{\left[\frac{(a+b)}{2}\right]^2 + \left[\frac{(b-a)}{2}\right]^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ 此时②正确;}$$

而题中, 梯形 $ABCD$ 是否为等腰梯形, 并未确定; 梯形 $ABCD$ 是 $AB \parallel CD$ 还是 $AD \parallel BC$, 并未确定,

$\therefore$ 无法保证①②正确,

故选: D.

【点睛】 本题考查梯形中求线段长, 涉及梯形性质、平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定性质、勾股定理、等腰直角三角形的判定与性质等知识, 熟练掌握相关几何判定与性质是解决问题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 共 48 分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 分解因式: $x^2 - 9 =$ _____.

【答案】 $(x+3)(x-3)$

【解析】

【详解】 解: $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$,

故答案为: $(x+3)(x-3)$.

8. 化简: $\frac{2}{1-x} - \frac{2x}{1-x}$ 的结果为_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】根据同分母分式的减法计算法则解答即可.

【详解】解： $\frac{2}{1-x} - \frac{2x}{1-x} = \frac{2-2x}{1-x} = \frac{2(1-x)}{1-x} = 2$;

故答案为：2.

【点睛】本题考查了同分母分式减法计算，熟练掌握运算法则是解题关键.

9. 已知关于 x 的方程 $\sqrt{x-14} = 2$ ，则 $x =$ _____

【答案】18

【解析】

【分析】根据二次根式的性质，等式两边平方，解方程即可.

【详解】解：根据题意得， $x-14 \geq 0$ ，即 $x \geq 14$ ，

$$\sqrt{x-14} = 2,$$

等式两边分别平方， $x-14=4$

移项， $x=18$ ，符合题意，

故答案为：18.

【点睛】本题主要考查二次根式与方程的综合，掌握含二次根式的方程的解法是解题的关键.

10. 函数 $f(x) = \frac{1}{x-23}$ 的定义域为_____.

【答案】 $x \neq 23$

【解析】

【分析】根据分式有意义的条件可进行求解.

【详解】解：由 $f(x) = \frac{1}{x-23}$ 可知： $x-23 \neq 0$ ，

$\therefore x \neq 23$ ；

故答案为 $x \neq 23$.

【点睛】本题主要考查函数及分式有意义的条件，熟练掌握函数的概念及分式有意义的条件是解题的关键.

11. 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 6x + 1 = 0$ 没有实数根，那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a > 9$

【解析】

【分析】根据一元二次方程根的判别式可进行求解.

【详解】解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 6x + 1 = 0$ 没有实数根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4a < 0,$$

解得： $a > 9$ ；

故答案为： $a > 9$.

【点睛】 本题主要考查一元二次方程根的判别式，熟练掌握一元二次方程根的判别式是解题的关键.

12. 在不透明的盒子中装有一个黑球，两个白球，三个红球，四个绿球，这十个球除颜色外完全相同. 那么从中随机摸出一个球是绿球的概率为_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】 根据简单事件的概率公式计算即可得.

【详解】 解： 因为在不透明的盒子中， 总共有 10 个球， 其中有四个绿球， 并且这十个球除颜色外， 完全相同，

所以从中随机摸出一个球是绿球的概率为 $P = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ ，

故答案为： $\frac{2}{5}$.

【点睛】 本题考查了求概率， 熟练掌握概率公式是解题关键.

13. 如果一个正多边形的中心角是 20° ， 那么这个正多边形的边数为_____.

【答案】 18

【解析】

【分析】 根据正 n 边形的中心角的度数为 $360^\circ \div n$ 进行计算即可得到答案.

【详解】 根据正 n 边形的中心角的度数为 $360^\circ \div n$ ，

则 $n = 360 \div 20 = 18$ ，

故这个正多边形的边数为 18，

故答案为： 18.

【点睛】 本题考查的是正多边形内角和中心角的知识， 掌握中心角的计算公式是解题的关键.

14. 一个二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点在 y 轴正半轴上， 且其对称轴左侧的部分是上升的， 那么这个二次函数的解析式可以是_____.

【答案】 $y = -x^2 + 1$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 根据二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点在 y 轴正半轴上， 且其对称轴左侧的部分是上升的， 可确定

$a < 0$ ，对称轴 $x = -\frac{b}{2a} = 0$ ， $c > 0$ ，从而确定答案.

【详解】解：∵二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴左侧的部分是上升的，

∴抛物线开口向上，即 $a < 0$ ，

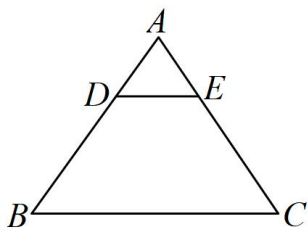
∵二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点在 y 轴正半轴上，

∴ $-\frac{b}{2a} = 0$ ，即 $b = 0$ ， $c > 0$ ，

∴二次函数的解析式可以是 $y = -x^2 + 1$ （答案不唯一）.

【点睛】本题考查二次函数的性质，能根据增减性和二次函数图象与 y 轴的交点确定系数的正负是解题的关键.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 在边 AB, AC 上， $2AD = BD, DE \parallel BC$ ，联结 DE ，设向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，那么用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{DE} =$ _____.



【答案】 $\frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$

【解析】

【分析】先根据向量的减法可得 $\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$ ，再根据相似三角形的判定可得 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，根据相似三角形的性质可得 $DE = \frac{1}{3}BC$ ，由此即可得.

【详解】解：∵向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，

∴ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ ，

∵ $2AD = BD$ ，

∴ $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$ ，

∵ $DE \parallel BC$ ，

∴ $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，

∴ $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$ ，

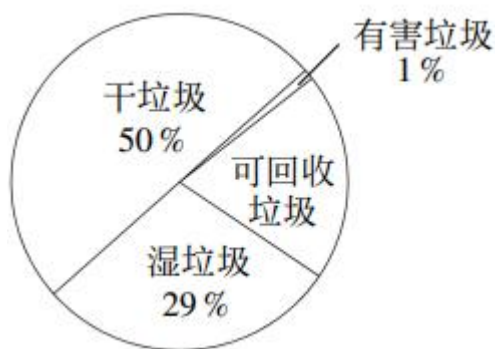
$$\therefore DE = \frac{1}{3}BC,$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a},$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}.$$

【点睛】本题考查了向量的运算、相似三角形的判定与性质，熟练掌握向量的运算是解题关键.

16. 垃圾分类 (Refuse sorting), 是指按照垃圾的不同成分、属性、利用价值以及对环境的影响, 并根据不同处置方式的要求, 分成属性不同的若干种类. 某市试点区域的垃圾收集情况如扇形统计图所示, 已知可回收垃圾共收集 60 吨, 且全市人口约为试点区域人口的 10 倍, 那么估计全市可收集的干垃圾总量为 _____.



【答案】1500 吨

【解析】

【分析】由题意易得试点区域的垃圾收集总量为 300 吨, 然后问题可求解.

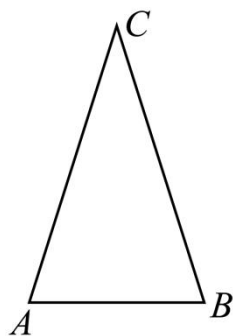
【详解】解: 由扇形统计图可得试点区域的垃圾收集总量为 $60 \div (1 - 50\% - 1\% - 29\%) = 300$ (吨),

$\therefore$ 全市可收集的干垃圾总量为 $300 \times 50\% \times 10 = 1500$ (吨);

故答案为 1500 吨.

【点睛】本题主要考查扇形统计图, 熟练掌握扇形统计图是解题的关键.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 35^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕着点 A 旋转 α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$), 旋转后的点 B 落在 BC 上, 点 B 的对应点为 D , 连接 AD , AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线, 则 $\alpha =$ _____.



【答案】 $\left(\frac{110}{3}\right)^\circ$

【解析】

【分析】如图， $AB = AD$ ， $\angle BAD = \alpha$ ，根据角平分线的定义可得 $\angle CAD = \angle BAD = \alpha$ ，根据三角形的外角性质可得 $\angle ADB = 35^\circ + \alpha$ ，即得 $\angle B = \angle ADB = 35^\circ + \alpha$ ，然后根据三角形的内角和定理求解即可．

【详解】解：如图，根据题意可得： $AB = AD$ ， $\angle BAD = \alpha$ ，

$\therefore AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线，

$\therefore \angle CAD = \angle BAD = \alpha$ ，

$\therefore \angle ADB = \angle C + \angle CAD = 35^\circ + \alpha$ ， $AB = AD$ ，

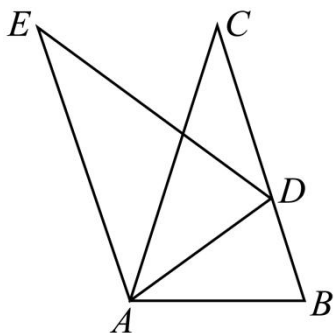
$\therefore \angle B = \angle ADB = 35^\circ + \alpha$ ，

则在 $\triangle ABC$ 中， $\therefore \angle C + \angle CAB + \angle B = 180^\circ$ ，

$\therefore 35^\circ + 2\alpha + 35^\circ + \alpha = 180^\circ$ ，

解得： $\alpha = \left(\frac{110}{3}\right)^\circ$ ；

故答案为： $\left(\frac{110}{3}\right)^\circ$



【点睛】本题考查了旋转的性质、等腰三角形的性质、三角形的外角性质以及

三角形的内角和等知识，熟练掌握相关图形的性质是解题的关键．

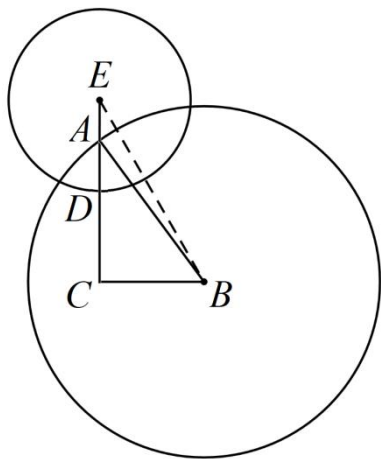
18. 在 $\triangle ABC$ 中 $AB = 7$, $BC = 3$, $\angle C = 90^\circ$ ，点 D 在边 AC 上，点 E 在 CA 延长线上，且 $CD = DE$ ，如果 $\odot B$ 过点 A ， $\odot E$ 过点 D ，若 $\odot B$ 与 $\odot E$ 有公共点，那么 $\odot E$ 半径 r 的取值范围是_____．

【答案】 $\sqrt{10} < r \leq 2\sqrt{10}$

【解析】

【分析】先画出图形，连接 BE ，利用勾股定理可得 $BE = \sqrt{9 + 4r^2}$ ， $AC = 2\sqrt{10}$ ，从而可得 $\sqrt{10} < r \leq 2\sqrt{10}$ ，再根据 $\odot B$ 与 $\odot E$ 有公共点可得一个关于 r 的不等式组，然后利用二次函数的性质求解即可得．

【详解】解：由题意画出图形如下：连接 BE ，



$\because \odot B$ 过点 A ，且 $AB = 7$ ，

$\therefore \odot B$ 的半径为 7，

$\because \odot E$ 过点 D ，它的半径为 r ，且 $CD = DE$ ，

$\therefore CE = CD + DE = 2r$ ，

$\because BC = 3, \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{9 + 4r^2}$ ， $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 2\sqrt{10}$ ，

$\because D$ 在边 AC 上，点 E 在 CA 延长线上，

$$\therefore \begin{cases} CD \leq AC \\ CE > AC \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} r \leq 2\sqrt{10} \\ 2r > 2\sqrt{10} \end{cases},$$

$\therefore \sqrt{10} < r \leq 2\sqrt{10}$ ，

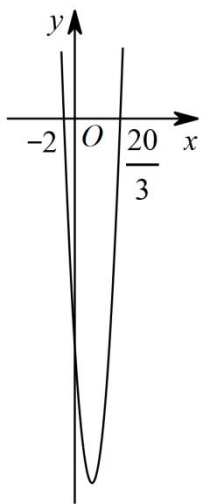
$\because \odot B$ 与 $\odot E$ 有公共点，

$$\therefore AB - DE \leq BE \leq AB + DE, \text{ 即 } \begin{cases} \sqrt{9 + 4r^2} \leq 7 + r \text{ ①} \\ 7 - r \leq \sqrt{9 + 4r^2} \text{ ②} \end{cases},$$

不等式①可化为 $3r^2 - 14r - 40 \leq 0$ ，

解方程 $3r^2 - 14r - 40 = 0$ 得： $r = -2$ 或 $r = \frac{20}{3}$ ，

画出函数 $y = 3r^2 - 14r - 40$ 的大致图象如下：



由函数图象可知，当 $y \leq 0$ 时， $-2 \leq r \leq \frac{20}{3}$ ，

即不等式①的解集为 $-2 \leq r \leq \frac{20}{3}$ ，

同理可得：不等式②的解集为 $r \geq 2$ 或 $r \leq -\frac{20}{3}$ ，

则不等式组的解集为 $2 \leq r \leq \frac{20}{3}$ ，

又 $\because \sqrt{10} < r \leq 2\sqrt{10}$ ，

半径 r 的取值范围是 $\sqrt{10} < r \leq 2\sqrt{10}$ ，

故答案为： $\sqrt{10} < r \leq 2\sqrt{10}$ 。

【点睛】本题考查了勾股定理、圆与圆的位置关系、二次函数与不等式，根据圆与圆的位置关系正确建立不等式组是解题关键。

三、解答题：（本大题共 7 题，共 78 分）

19. 计算： $\sqrt[3]{8} + \frac{1}{2+\sqrt{5}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + |\sqrt{5}-3|$

【答案】 -6

【解析】

【分析】根据立方根、负整数指数幂及二次根式的运算可进行求解。

【详解】解：原式 $= 2 + \sqrt{5} - 2 - 9 + 3 - \sqrt{5}$

$= -6$ 。

【点睛】本题主要考查立方根、负整数指数幂及二次根式的运算，熟练掌握立方根、负整数指数幂及二次

根式的运算是解题的关键.

20. 解不等式组
$$\begin{cases} 3x > x+6 \\ \frac{1}{2}x < -x+5 \end{cases}$$

【答案】 $3 < x < \frac{10}{3}$

【解析】

【分析】 先分别求出两个不等式的解集，再找出它们的公共部分即为不等式组的解集.

【详解】 解：
$$\begin{cases} 3x > x+6 \text{ ①} \\ \frac{1}{2}x < -x+5 \text{ ②} \end{cases},$$

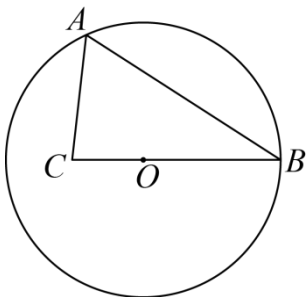
解不等式①得： $x > 3$,

解不等式②得： $x < \frac{10}{3}$,

则不等式组的解集为 $3 < x < \frac{10}{3}$.

【点睛】 本题考查了解一元一次不等式组，熟练掌握不等式组的解法是解题关键.

21. 如图，在 $\odot O$ 中，弦 AB 的长为 8，点 C 在 BO 延长线上，且 $\cos \angle ABC = \frac{4}{5}$, $OC = \frac{1}{2}OB$.



(1) 求 $\odot O$ 的半径;

(2) 求 $\angle BAC$ 的正切值.

【答案】 (1) 5 (2) $\frac{9}{4}$

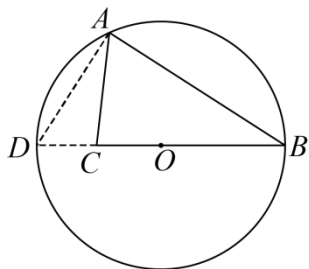
【解析】

【分析】 (1) 延长 BC ，交 $\odot O$ 于点 D ，连接 AD ，先根据圆周角定理可得 $\angle BAD = 90^\circ$ ，再解直角三角形可得 $BD = 10$ ，由此即可得；

(2) 过点 C 作 $CE \perp AB$ 于点 E ，先解直角三角形可得 $BE = 6$ ，从而可得 $AE = 2$ ，再利用勾股定理可得 $CE = \frac{9}{2}$ ，然后根据正切的定义即可得.

【小问 1 详解】

解：如图，延长 BC ，交 $\odot O$ 于点 D ，连接 AD ，



由圆周角定理得： $\angle BAD = 90^\circ$ ，

$\because$ 弦 AB 的长为 8，且 $\cos \angle ABC = \frac{4}{5}$ ，

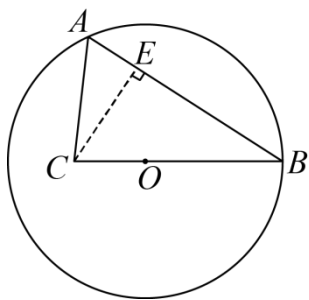
$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{8}{BD} = \frac{4}{5},$$

解得 $BD = 10$ ，

$\therefore \odot O$ 的半径为 $\frac{1}{2}BD = 5$ 。

【小问 2 详解】

解：如图，过点 C 作 $CE \perp AB$ 于点 E ，



$\because \odot O$ 的半径为 5，

$$\therefore OB = 5,$$

$$\because OC = \frac{1}{2}OB,$$

$$\therefore BC = \frac{3}{2}OB = \frac{15}{2},$$

$$\because \cos \angle ABC = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{4}{5}, \text{ 即 } \frac{BE}{\frac{15}{2}} = \frac{4}{5},$$

解得 $BE = 6$ ，

$$\therefore AE = AB - BE = 2, \quad CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \frac{9}{2},$$

则 $\angle BAC$ 的正切值为 $\frac{CE}{AE} = \frac{\frac{9}{2}}{2} = \frac{9}{4}$.

【点睛】本题考查了圆周角定理、解直角三角形、勾股定理等知识点，熟练掌握解直角三角形的方法是解题关键.

22. “中国石化”推出促销活动，一张加油卡的面值是 1000 元，打九折出售. 使用这张加油卡加油，每一升油，油的单价降低 0.30 元. 假设这张加油卡的面值能够一次性全部用完.

(1) 他实际花了多少钱购买会员卡？

(2) 减价后每升油的单价为 y 元/升，原价为 x 元/升，求 y 关于 x 的函数解析式（不用写出定义域）

(3) 油的原价是 7.30 元/升，求优惠后油的单价比原价便宜多少元？

【答案】(1) 900 (2) $y = 0.9x - 0.27$

(3) 1.00

【解析】

【分析】(1) 根据 1000×0.9 ，计算求解即可；

(2) 由题意知， $y = 0.9(x - 0.30)$ ，整理求解即可；

(3) 当 $x = 7.30$ ，则 $y = 6.30$ ，根据优惠后油的单价比原价便宜 $(x - y)$ 元，计算求解即可.

【小问 1 详解】

解：由题意知， $1000 \times 0.9 = 900$ （元），

答：实际花了 900 元购买会员卡；

【小问 2 详解】

解：由题意知， $y = 0.9(x - 0.30)$ ，整理得 $y = 0.9x - 0.27$ ，

$\therefore y$ 关于 x 的函数解析式为 $y = 0.9x - 0.27$ ；

【小问 3 详解】

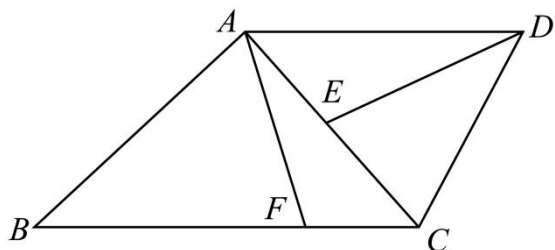
解：当 $x = 7.30$ ，则 $y = 6.30$ ，

$\therefore 7.30 - 6.30 = 1.00$ ，

$\therefore$ 优惠后油的单价比原价便宜 1.00 元.

【点睛】本题考查了有理数乘法应用，一次函数解析式，一次函数的应用. 解题的关键在于理解题意，正确的列出算式和一次函数解析式.

23. 如图，在梯形 $ABCD$ 中 $AD \parallel BC$ ，点 F, E 分别在线段 BC, AC 上，且 $\angle FAC = \angle ADE$ ， $AC = AD$



(1) 求证: $DE = AF$

(2) 若 $\angle ABC = \angle CDE$, 求证: $AF^2 = BF \cdot CE$

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 先根据平行线的性质可得 $\angle DAE = \angle ACF$, 再根据三角形全等的判定可得 $\triangle DAE \cong \triangle ACF$, 然后根据全等三角形的性质即可得证;

(2) 先根据全等三角形的性质可得 $\angle AFC = \angle DEA$, 从而可得 $\angle AFB = \angle CED$, 再根据相似三角形的判定可得 $\triangle ABF \sim \triangle CDE$, 然后根据相似三角形的性质即可得证.

【小问 1 详解】

证明: $\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle DAE = \angle ACF$,

在 $\triangle DAE$ 和 $\triangle ACF$ 中,
$$\begin{cases} \angle DAE = \angle ACF \\ AD = CA \\ \angle ADE = \angle CAF \end{cases},$$

$\therefore \triangle DAE \cong \triangle ACF$ (ASA),

$\therefore DE = AF$.

【小问 2 详解】

证明: $\because \triangle DAE \cong \triangle ACF$,

$\therefore \angle AFC = \angle DEA$,

$\therefore 180^\circ - \angle AFC = 180^\circ - \angle DEA$, 即 $\angle AFB = \angle CED$,

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CDE$ 中,
$$\begin{cases} \angle AFB = \angle CED \\ \angle ABF = \angle CDE \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABF \sim \triangle CDE$,

$\therefore \frac{AF}{CE} = \frac{BF}{DE}$,

由 (1) 已证: $DE = AF$,

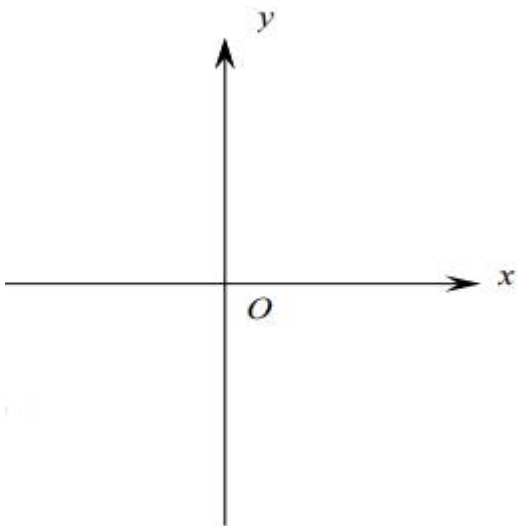
$$\therefore \frac{AF}{CE} = \frac{BF}{AF},$$

$$\therefore AF^2 = BF \cdot CE.$$

【点睛】本题考查了三角形全等的判定与性质、相似三角形的判定与性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $y = \frac{3}{4}x + 6$ 与 x 轴交于点 A ， y 轴交于点 B ，点 C 在线段 AB 上，

以点 C 为顶点的抛物线 $M: y = ax^2 + bx + c$ 经过点 B .



(1) 求点 A ， B 的坐标；

(2) 求 b ， c 的值；

(3) 平移抛物线 M 至 N ，点 C ， B 分别平移至点 P ， D ，联结 CD ，且 $CD \parallel x$ 轴，如果点 P 在 x 轴上，且新抛物线过点 B ，求抛物线 N 的函数解析式.

【答案】(1) $A(-8, 0)$ ， $B(0, 6)$

(2) $b = \frac{3}{2}$ ， $c = 6$

(3) $y = \frac{3}{16}(x - 4\sqrt{2})^2$ 或 $y = \frac{3}{16}(x + 4\sqrt{2})^2$

【解析】

【分析】(1) 根据题意，分别将 $x = 0$ ， $y = 0$ 代入直线 $y = \frac{3}{4}x + 6$ 即可求得；

(2) 设 $C\left(m, \frac{3}{4}m + 6\right)$ ，得到抛物线的顶点式为 $y = a(x - m)^2 + \frac{3}{4}m + 6$ ，将 $B(0, 6)$ 代入可求得 $m = -\frac{3}{4a}$ ，

进而可得到抛物线解析式为 $y = ax^2 + \frac{3}{2}x + 6$ ，即可求得 b ， c ；

(3) 根据题意, 设 $P(p, 0)$, $C\left(m, \frac{3}{4}m + 6\right)$, 根据平移的性质可得点 B , 点 C 向下平移的距离相同, 即

列式求得 $m = -4$, $a = \frac{3}{16}$, 然后得到抛物线 N 解析式为: $y = \frac{3}{16}(x - p)^2$, 将 $B(0, 6)$ 代入可得 $p = \pm 4\sqrt{2}$,

即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 直线 $y = \frac{3}{4}x + 6$ 与 x 轴交于点 A , y 轴交于点 B ,

当 $x = 0$ 时, 代入得: $y = 6$, 故 $B(0, 6)$,

当 $y = 0$ 时, 代入得: $x = -8$, 故 $A(-8, 0)$,

【小问 2 详解】

设 $C\left(m, \frac{3}{4}m + 6\right)$,

则可设抛物线的解析式为: $y = a(x - m)^2 + \frac{3}{4}m + 6$,

$\because$ 抛物线 M 经过点 B ,

将 $B(0, 6)$ 代入得: $am^2 + \frac{3}{4}m + 6 = 6$,

$\because m \neq 0$,

$\therefore am = -\frac{3}{4}$,

即 $m = -\frac{3}{4a}$,

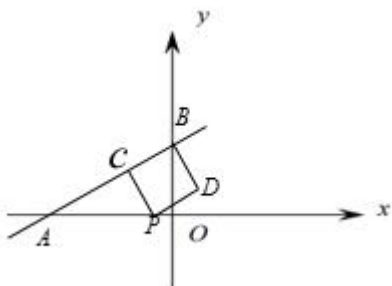
$\therefore$ 将 $m = -\frac{3}{4a}$ 代入 $y = a(x - m)^2 + \frac{3}{4}m + 6$,

整理得: $y = ax^2 + \frac{3}{2}x + 6$,

故 $b = \frac{3}{2}$, $c = 6$;

【小问 3 详解】

如图:



$\because CD \parallel x$ 轴, 点 P 在 x 轴上,

$\therefore$ 设 $P(p, 0)$, $C\left(m, \frac{3}{4}m + 6\right)$,

$\therefore$ 点 C , B 分别平移至点 P , D ,

$\therefore$ 点 B , 点 C 向下平移的距离相同,

$\therefore \frac{3}{4}m + 6 = 6 - \left(\frac{3}{4}m + 6\right)$,

解得: $m = -4$,

由 (2) 知 $m = -\frac{3}{4a}$,

$\therefore a = \frac{3}{16}$,

$\therefore$ 抛物线 N 的函数解析式为: $y = \frac{3}{16}(x - p)^2$,

将 $B(0, 6)$ 代入可得: $p = \pm 4\sqrt{2}$,

$\therefore$ 抛物线 N 的函数解析式为: $y = \frac{3}{16}(x - 4\sqrt{2})^2$ 或 $y = \frac{3}{16}(x + 4\sqrt{2})^2$.

【点睛】本题考查了求一次函数与坐标轴的交点坐标, 求抛物线的解析式, 平移的性质, 二次函数的图象和性质等, 解题的关键是根据的平移性质求出 m 和 a 的值.

25. 如图 (1) 所示, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, O 在边 AB 上, 点 F 为边 OB 中点, 为以 O 为圆心, BO 为半径的圆分别交 CB , AC 于点 D , E , 联结 EF 交 OD 于点 G .

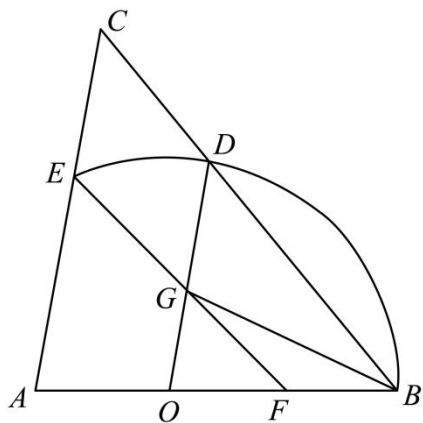


图 (1)

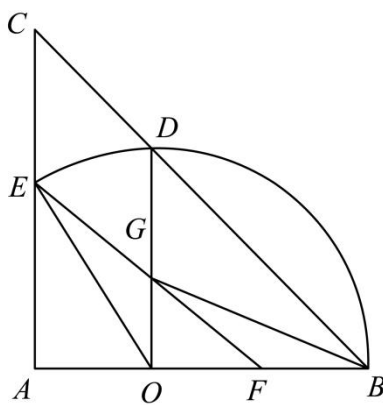


图 (2)

(1) 如果 $OG = DG$, 求证: 四边形 $CEGD$ 为平行四边形;

(2) 如图 (2) 所示, 联结 OE , 如果 $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle OFE = \angle DOE$, $AO = 4$, 求边 OB 的长;

(3) 联结 BG ，如果 $\triangle OBG$ 是以 OB 为腰的等腰三角形，且 $AO = OF$ ，求 $\frac{OG}{OD}$ 的值.

【答案】(1) 见解析 (2) $1 + \sqrt{33}$

(3) $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据等边对等角得出 $\angle B = \angle C$ ， $\angle ODB = \angle B$ ，等量代换得出 $\angle C = \angle ODB$ ，则 $OD \parallel AC$ ，根据 F 是 OB 的中点， $OG = DG$ ，则 FG 是 $\triangle OBD$ 的中位线，则 $FG \parallel BC$ ，即可得证；

(2) 设 $\angle OFE = \angle DOE = \alpha$ ， $OF = FB = a$ ，则 $OE = OB = 2a$ ，由 (1) 可得 $OD \parallel AC$ 则 $\angle AEO = \angle DOE = \alpha$ ，等量代换得出 $\angle OFE = \angle AEO = \alpha$ ，进而证明 $\triangle AEO \sim \triangle AFE$ ，得出 $AE^2 = AO \cdot AF$ ，在 $\text{Rt}\triangle AEO$ 中， $AE^2 = EO^2 - AO^2$ ，则 $EO^2 - AO^2 = AO \times AF$ ，解方程即可求解；

(3) $\triangle OBG$ 是以 OB 为腰的等腰三角形，分为①当 $OG = OB$ 时，②当 $BG = OB$ 时，证明 $\triangle BGO \sim \triangle BPA$ ，得出 $\frac{OG}{AP} = \frac{2}{3}$ ，设 $OG = 2k$ ， $AP = 3k$ ，根据 $OG \parallel AE$ ，得出 $\triangle FOG \sim \triangle FAE$ ，可得 $AE = 2OG = 4k$ ， $PE = AE - AP = k$ ，连接 OE 交 PG 于点 Q ，证明 $\triangle PQE \sim \triangle QGO$ 在 PQE 与 $\triangle BQO$ 中， $PQ = \frac{1}{3}a$ ，

$BQ = BG + QG = 2a + \frac{2}{3}a = \frac{8}{3}a$ ，得出 $\frac{PQ}{OQ} = \frac{QE}{BQ} = \frac{1}{4}$ ，可得 $\triangle PQE \sim \triangle OQB$ ，根据相似三角形的性质得出 $a = 2k$ ，进而即可求解.

【小问 1 详解】

证明： $\because AC = AB$

$\therefore \angle ABC = \angle C$

$\because OD = OB$

$\therefore \angle ODB = \angle ABC$ ，

$\therefore \angle C = \angle ODB$

$\therefore OD \parallel AC$ ，

$\because F$ 是 OB 的中点， $OG = DG$ ，

$\therefore FG$ 是 $\triangle OBD$ 的中位线，

$\therefore FG \parallel BC$ ，即 $GE \parallel CD$ ，

$\therefore$ 四边形 $CEDG$ 是平行四边形；

【小问 2 详解】

解： $\because \angle OFE = \angle DOE$ ， $AO = 4$ ，点 F 边 OB 中点，

设 $\angle OFE = \angle DOE = \alpha$ ， $OF = FB = a$ ，则 $OE = OB = 2a$

由 (1) 可得 $OD \parallel AC$

$$\therefore \angle AEO = \angle DOE = \alpha,$$

$$\therefore \angle OFE = \angle AEO = \alpha,$$

又 $\because \angle A = \angle A$

$$\therefore \triangle AEO \sim \triangle AFE,$$

$$\therefore \frac{AE}{AF} = \frac{AO}{AE}$$

$$\text{即 } AE^2 = AO \cdot AF,$$

$$\because \angle A = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle AEO$ 中， $AE^2 = EO^2 - AO^2$ ，

$$\therefore EO^2 - AO^2 = AO \times AF,$$

$$\therefore (2a)^2 - 4^2 = 4 \times (4 + a)$$

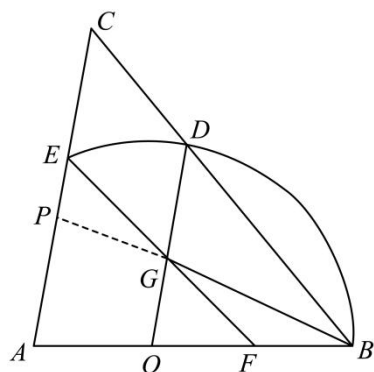
$$\text{解得: } a = \frac{1 + \sqrt{33}}{2} \text{ 或 } a = \frac{1 - \sqrt{33}}{2} \text{ (舍去)}$$

$$\therefore OB = 2a = 1 + \sqrt{33};$$

【小问 3 详解】

解：①当 $OG = OB$ 时，点 G 与点 D 重合，舍去；

②当 $BG = OB$ 时，如图所示，延长 BG 交 AC 于点 P ，



$\because$ 点 F 是 OB 的中点， $AO = OF$ ，

$$\therefore AO = OF = FB,$$

设 $AO = OF = FB = a$ ，

$$\therefore OG \parallel AC$$

$$\therefore \triangle BGO \sim \triangle BPA,$$

$$\therefore \frac{OG}{AP} = \frac{OB}{AB} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3},$$

设 $OG = 2k, AP = 3k$,

$$\therefore OG \parallel AE$$

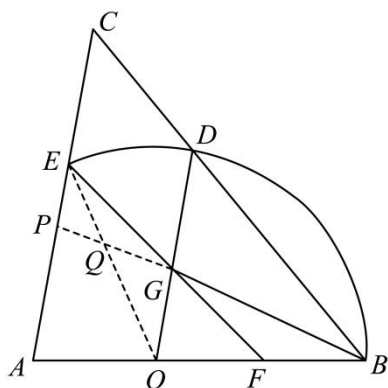
$$\therefore \triangle FOG \sim \triangle FAE,$$

$$\therefore \frac{OG}{AE} = \frac{OF}{AF} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AE = 2OG = 4k,$$

$$\therefore PE = AE - AP = k,$$

连接 OE 交 PG 于点 Q ,



$$\therefore OG \parallel PE,$$

$$\therefore \triangle QPE \sim \triangle QGO$$

$$\therefore \frac{GO}{PE} = \frac{QG}{PQ} = \frac{OQ}{EQ} = \frac{2k}{k} = 2,$$

$$\therefore PQ = \frac{1}{3}a, QG = \frac{2}{3}a, EQ = \frac{2}{3}a, OQ = \frac{4}{3}a$$

在 $\triangle PQE$ 与 $\triangle BQO$ 中, $PQ = \frac{1}{3}a$, $BQ = BG + QG = 2a + \frac{2}{3}a = \frac{8}{3}a$,

$$\therefore \frac{PQ}{OQ} = \frac{QE}{BQ} = \frac{1}{4},$$

又 $\angle PQE = \angle BQO$,

$$\therefore \triangle PQE \sim \triangle OQB,$$

$$\therefore \frac{PE}{OB} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \frac{k}{2a} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore a = 2k,$$

$$\because OD = OB = 2a, OG = 2k,$$

$$\therefore \frac{OG}{OD} = \frac{2k}{2a} = \frac{k}{a} = \frac{1}{2}.$$

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质，三角形中位线的性质，相似三角形的性质与判定，勾股定理，等腰三角形的定义，圆的性质，熟练掌握相似三角形的性质与判定，第三问中，证明 $\triangle PQE \sim \triangle OQB$ 是解题的关键.

