

2022 年辽宁省鞍山市中考数学试卷

一、选择题（下列各题的备选答案中，只有一个是正确的，每题 3 分，共 24 分）

1. 2022 的相反数是（ ）

A. $\frac{1}{2022}$

B. $-\frac{1}{2022}$

C. -2022

D. 2022

【答案】C

【解析】

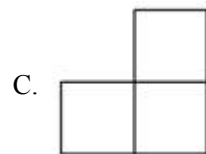
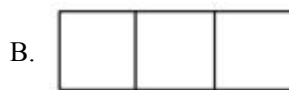
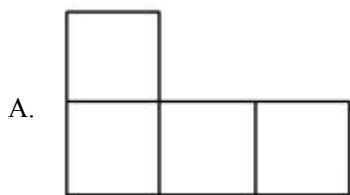
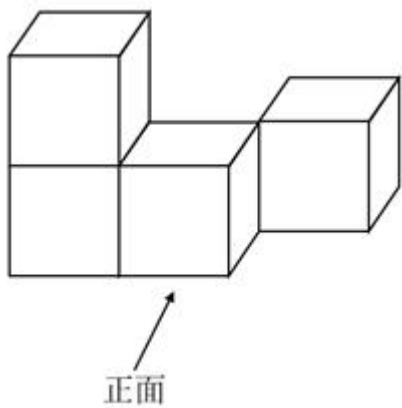
【分析】根据相反数的定义求解即可，只有符号不同的两个数互为相反数.

【详解】解：2022 的相反数是-2022.

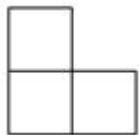
故选：C.

【点睛】本题考查了相反数的定义，掌握相反数的定义是解题的关键.

2. 如图所示的几何体是由 4 个大小相同的小正方体搭成的，它的左视图是（ ）



D.



【答案】C

【解析】

【分析】找到几何体从左面看所得到的图形即可.

【详解】解：从左面可看，底层是两个小正方形，上层右边是一个小正方形.

故选: C.

【点睛】 本题考查了三视图的知识, 左视图是从物体的左面看得到的视图.

3. 下列运算正确的是 ()

A. $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{10}$

B. $a^3 \cdot a^4 = a^{12}$

C. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

D. $(-2ab^2)^3 = -8a^3b^6$

【答案】 D

【解析】

【分析】 利用二次根式的加法的法则, 完全平方公式, 同底数幂的乘法的法则, 积的乘方和幂的乘方运算法则对各项进行运算即可.

【详解】 解: A、 $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, 故 A 不符合题意;

B、 $a^3 \cdot a^4 = a^7$, 故 B 不符合题意;

C、 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, 故 C 不符合题意;

D、 $(-2ab^2)^3 = -8a^3b^6$, 故 D 符合题意;

故选: D.

【点睛】 本题主要考查二次根式的加减法, 积的乘方和幂的乘方, 同底数幂的乘法, 完全平方公式, 解答的关键是对相应的运算法则的掌握.

4. 为了解居民用水情况, 小丽在自家居住的小区随机抽查了 10 户家庭月用水量, 统计如下表:

月用水量/ m^3	7	8	9	10
户数	2	3	4	1

则这 10 户家庭的月用水量的众数和中位数分别是 ()

A. 8, 7.5

B. 8, 8.5

C. 9, 8.5

D. 9, 7.5

【答案】 C

【解析】

【分析】 找中位数要把数据按从小到大 (或从大到小) 的顺序排列, 位于最中间的一个数 (或两个数的平均数) 为中位数; 众数是一组数据中出现次数最多的数据, 注意众数可以不止一个.

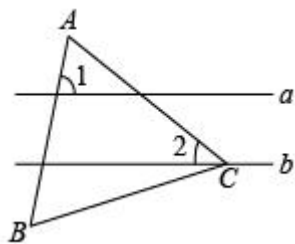
【详解】 解: 表中数据为从小到大排列, 数据 9 出现了 4 次最多为众数,

在第 5 位、第 6 位是 8 和 9, 其平均数 8.5 为中位数, 所以本题这组数据的中位数是 8.5, 众数是 9.

故选: C.

【点睛】本题主要考查了众数和中位数的知识，一组数据中出现次数最多的数据叫做众数，将一组数据从小到大（或从大到小）依次排列，把中间数据（或中间两数据的平均数）叫做中位数.

5. 如图，直线 $a \parallel b$ ，等边三角形 ABC 的顶点 C 在直线 b 上， $\angle 2 = 40^\circ$ ，则 $\angle 1$ 的度数为（ ）



A. 80°

B. 70°

C. 60°

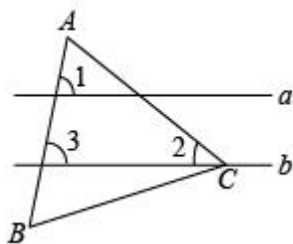
D. 50°

【答案】A

【解析】

【分析】先根据等边三角形的性质得到 $\angle A = 60^\circ$ ，再根据三角形内角和定理计算出 $\angle 3 = 80^\circ$ ，然后根据平行线的性质得到 $\angle 1$ 的度数.

【详解】解： $\because \triangle ABC$ 为等边三角形，



$$\therefore \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle 3 + \angle 2 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ,$$

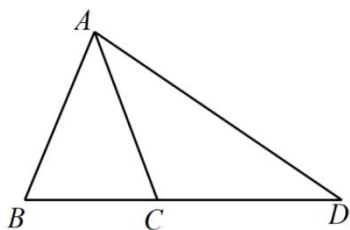
$$\therefore a \parallel b,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3 = 80^\circ.$$

故选：A.

【点睛】本题考查了等边三角形的性质：等边三角形的三个内角都相等，且都等于 60° 。也考查了平行线的性质.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 24^\circ$ ，延长 BC 到点 D ，使 $CD = AC$ ，连接 AD ，则 $\angle D$ 的度数（ ）

A. 39° B. 40° C. 49° D. 51°

【答案】A

【解析】

【分析】利用等边对等角求得 $\angle B = \angle ACB = 78^\circ$ ，然后利用三角形的内角和求得答案即可.【详解】解: $\because AB = AC$, $\angle BAC = 24^\circ$,

$$\therefore \angle B = \angle ACB = 78^\circ.$$

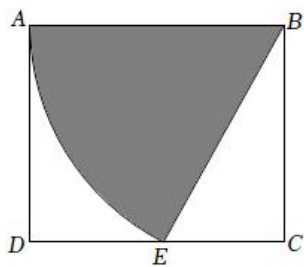
$$\because CD = AC, \angle ACB = 78^\circ, \angle ACB = \angle D + \angle CAD,$$

$$\therefore \angle D = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle ACB = 39^\circ.$$

故选: A.

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质, 三角形内角和定理, 解题的关键是了解“等边对等角”的性质, 难度不大.

7. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$, 以点 B 为圆心, BA 长为半径画弧, 交 CD 于点 E , 连接 BE , 则扇形 BAE 的面积为 ()

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{3\pi}{5}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】解直角三角形求出 $\angle CBE = 30^\circ$, 推出 $\angle ABE = 60^\circ$, 再利用扇形的面积公式求解.【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle ABC = \angle C = 90^\circ,$$

$$\because BA = BE = 2, BC = \sqrt{3},$$

$$\therefore \cos \angle CBE = \frac{CB}{BE} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle CBE = 30^\circ,$$

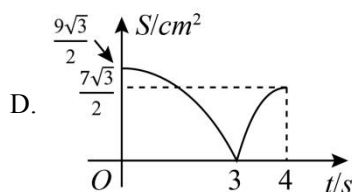
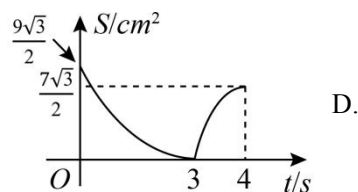
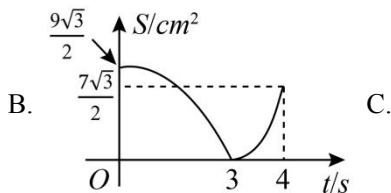
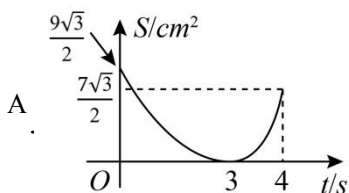
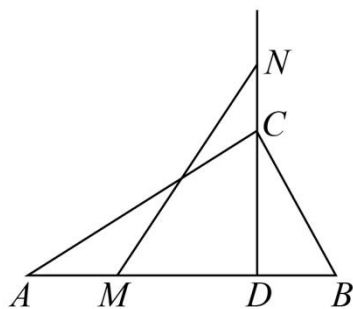
$$\therefore \angle ABE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore S_{\text{扇形}BAE} = \frac{60 \cdot \pi \cdot 2^2}{360} = \frac{2\pi}{3},$$

故选: C.

【点睛】本题考查扇形的面积, 三角函数、矩形的性质等知识, 解题的关键是求出 $\angle CBE$ 的度数.

8. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $AB = 4\sqrt{3}\text{cm}$, $CD \perp AB$, 垂足为点 D , 动点 M 从点 A 出发沿 AB 方向以 $\sqrt{3}\text{cm/s}$ 的速度匀速运动到点 B , 同时动点 N 从点 C 出发沿射线 DC 方向以 1cm/s 的速度匀速运动. 当点 M 停止运动时, 点 N 也随之停止, 连接 MN , 设运动时间为 $t\text{s}$, $\triangle MND$ 的面积为 $S\text{cm}^2$, 则下列图象能大致反映 S 与 t 之间函数关系的是 ()



【答案】B

【解析】

【分析】分别求出 M 在 AD 和在 BD 上时 $\triangle MND$ 的面积为 S 关于 t 的解析式即可判断.

【详解】解: $\because \angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $AB = 4\sqrt{3}$,

$$\therefore \angle B = 60^\circ, \quad BC = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{3}, \quad AC = \sqrt{3}BC = 6,$$

$\because CD \perp AB,$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AC = 3, \quad AD = \sqrt{3}CD = 3\sqrt{3}, \quad BD = \frac{1}{2}BC = \sqrt{3},$$

$\therefore$ 当 M 在 AD 上时, $0 \leq t \leq 3,$

$$MD = AM - AD = 3\sqrt{3} - \sqrt{3}t, \quad DN = DC + CN = 3 + t,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}MD \cdot DN = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} - \sqrt{3}t)(3 + t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 + \frac{9\sqrt{3}}{2},$$

当 M 在 BD 上时, $3 < t \leq 4,$

$$MD = AD - AM = \sqrt{3}t - 3\sqrt{3},$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}MD \cdot DN = \frac{1}{2}(\sqrt{3}t - 3\sqrt{3})(3 + t) = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - \frac{9\sqrt{3}}{2},$$

故选: B.

【点睛】本题考查了动点问题的函数图象, 函数图象是典型的数形结合, 图象应用信息广泛, 通过看图获取信息, 不仅可以解决生活中的实际问题, 还可以提高分析问题、解决问题的能力.

二、填空题 (每小题 3 分, 共 24 分)

9. 教育部 2022 年 5 月 17 日召开第二场“教育这十年”“1+1”系列新闻发布会, 会上介绍我国已建成世界最大规模高等教育体系, 在学总人数超过 44300000 人. 将数据 44300000 用科学记数法表示为_____.

【答案】 4.43×10^7

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时, n 是正整数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负整数.

【详解】解: $44300000 = 4.43 \times 10^7$.

故答案为: 4.43×10^7 .

【点睛】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

10. 一个不透明的口袋中装有 5 个红球和 m 个黄球, 这些球除颜色外都相同, 某同学进行了如下试验: 从袋中随机摸出 1 个球记下它的颜色后, 放回摇匀, 为一次摸球试验. 根据记录在下表中的摸球试验数据, 可以估计出 m 的值为_____.

摸球的总次数 a	100	500	1000	2000	...
摸出红球的次数 b	19	101	199	400	...
摸出红球的频率 $\frac{b}{a}$	0.190	0.202	0.199	0.200	...

【答案】 20

【解析】

【分析】利用大量重复试验时，事件发生的频率在某个固定位置左右摆动，并且摆动的幅度越来越小，根据这个频率稳定性定理，可以用频率的集中趋势来估计概率，这个固定的近似值就是这个事件的概率求解即可.

【详解】解： $\because$ 通过大量重复试验后发现，摸到红球的频率稳定于 0.2,

$$\therefore \frac{5}{5+m} = 0.2,$$

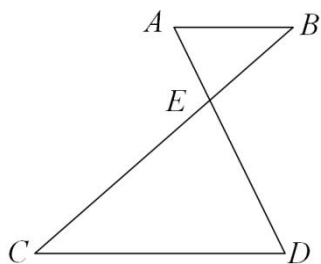
解得： $m = 20$.

经检验 $m = 20$ 是原方程的解,

故答案为： 20.

【点睛】此题主要考查了利用频率估计概率和解分式方程，本题利用了用大量试验得到的频率可以估计事件的概率. 关键是根据摸出红球的频率得到相应的等量关系.

11. 如图， $AB \parallel CD$ ， AD ， BC 相交于点 E ，若 $AE:DE = 1:2$ ， $AB = 2.5$ ，则 CD 的长为_____.



【答案】 5

【解析】

【分析】由平行线的性质求出 $\angle B = \angle C$ ， $\angle A = \angle D$ ，得 $\triangle EAB \sim \triangle EDC$ ，再由相似三角形的性质求出线段 CD 即可.

【详解】解： $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle B = \angle C, \quad \angle A = \angle D,$$

$$\therefore \triangle EAB \sim \triangle EDC,$$

$$\therefore AB:CD=AE:DE=1:2,$$

$$\text{又} \because AB=2.5,$$

$$\therefore CD=5.$$

故答案为: 5.

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定与性质, 解题的关键是熟练掌握相似三角形的判定与性质.

12. 某加工厂接到一笔订单, 甲、乙车间同时加工, 已知乙车间每天加工的产品数量是甲车间每天加工的产品数量的 1.5 倍, 甲车间加工 4000 件比乙车间加工 4200 件多用 3 天. 设甲车间每天加工 x 件产品, 根据题意可列方程为_____.

【答案】 $\frac{4000}{x} - \frac{4200}{1.5x} = 3$

【解析】

【分析】根据题意可得出乙车间每天加工 $1.5x$ 件产品, 再根据甲车间加工 4000 件比乙车间加工 4200 件多用 3 天, 即可得出关于 x 的分式方程, 此题得解.

【详解】解: $\because$ 甲车间每天加工 x 件产品, 乙车间每天加工的产品数量是甲车间每天加工的产品数量的 1.5 倍,

$\therefore$ 乙车间每天加工 $1.5x$ 件产品,

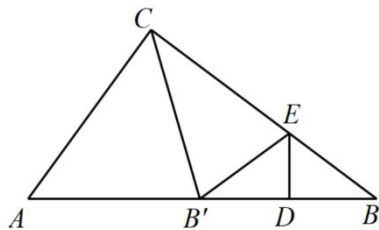
又 $\because$ 甲车间加工 4000 件比乙车间加工 4200 件多用 3 天,

$$\therefore \frac{4000}{x} - \frac{4200}{1.5x} = 3.$$

故答案为: $\frac{4000}{x} - \frac{4200}{1.5x} = 3.$

【点睛】本题考查了由实际问题抽象出分式方程, 找准等量关系, 正确列出分式方程是解题的关键.

13. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=6$, $BC=8$, 点 D , E 分别在 AB , BC 上, 将 $\triangle BDE$ 沿直线 DE 翻折, 点 B 的对应点 B' 恰好落在 AB 上, 连接 CB' , 若 $CB'=BB'$, 则 AD 的长为_____.



【答案】 7.5

【解析】

【分析】在 $Rt\triangle ABC$ 中, 利用勾股定理求出 AB 的长, 然后根据 $CB'=BB'$ 得出 $AB'=BB'=\frac{1}{2}AB$, 再根据折叠的性质可得 $BD=B'D=\frac{1}{2}BB'$. 根据 $AD=AB'+B'D$ 求得 AD 的长.

【详解】解：在 $Rt\triangle ABC$ 中，

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2},$$

$$\because AC = 6, \quad BC = 8,$$

$$\therefore AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

$$\because CB' = BB',$$

$$\therefore \angle B = \angle BCB',$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = \angle ACB' + \angle BCB' = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle A = \angle ACB'.$$

$$\therefore AB' = CB'.$$

$$\therefore AB' = BB' = \frac{1}{2}AB = 5.$$

$\therefore$ 将 $\triangle BDE$ 沿直线 DE 翻折，点 B 的对应点 B' 恰好落在 AB 上，

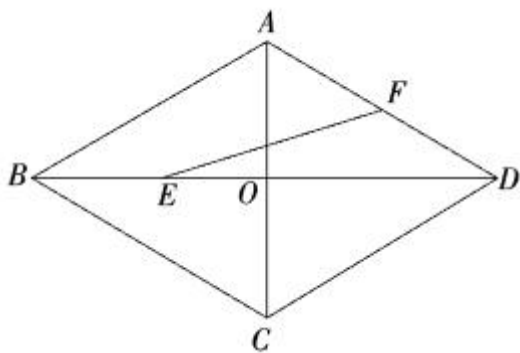
$$\therefore B'D = BD = \frac{1}{2}BB' = 2.5.$$

$$\therefore AD = AB' + B'D = 5 + 2.5 = 7.5.$$

故答案为：7.5.

【点睛】本题考查了直角三角形的性质、勾股定理，解题的关键是在直角三角形中根据 $CB' = BB'$ 通过推理论证得到 CB' 是斜边上的中线.

14. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 2， $\angle ABC = 60^\circ$ ，对角线 AC 与 BD 交于点 O ， E 为 OB 中点， F 为 AD 中点，连接 EF ，则 EF 的长为_____.

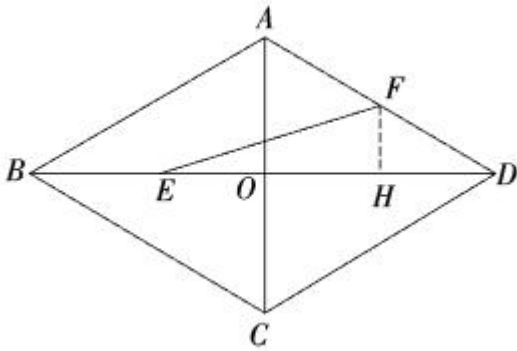


【答案】 $\frac{\sqrt{13}}{2}$

【解析】

【分析】由菱形的性质可得 $AB = AD = 2$, $\angle ABD = 30^\circ$, $AC \perp BD$, $BO = DO$, 由三角形中位线定理得 $FH = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}$, $FH \parallel AO$, 然后求出 OE 、 OH , 由勾股定理可求解.

【详解】解: 如图, 取 OD 的中点 H , 连接 FH ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore AB = AD = 2$, $\angle ABD = 30^\circ$, $AC \perp BD$, $BO = DO$,

$\therefore AO = \frac{1}{2}AB = 1$, $BO = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} = DO$,

$\because$ 点 H 是 OD 的中点, 点 F 是 AD 的中点,

$\therefore FH = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}$, $FH \parallel AO$,

$\therefore FH \perp BD$,

$\because$ 点 E 是 BO 的中点, 点 H 是 OD 的中点,

$\therefore OE = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

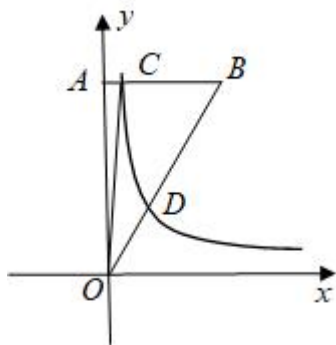
$\therefore EH = \sqrt{3}$,

$\therefore EF = \sqrt{EH^2 + FH^2} = \sqrt{3 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$,

故答案为: $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

【点睛】本题主要考查了菱形的性质, 三角形中位线定理, 勾股定理, 掌握菱形的性质是解题的关键.

15. 如图, 在平面直角坐标系中, O 是坐标原点. 在 $Rt \triangle OAB$ 中, $\angle OAB = 90^\circ$, 边 OA 在 y 轴上, 点 D 是边 OB 上一点, 且 $OD:DB = 1:2$, 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象经过点 D 交 AB 于点 C , 连接 OC . 若 $S_{\triangle OBC} = 4$, 则 k 的值为_____.



【答案】1

【解析】

【分析】设 $D(m, \frac{k}{m})$ ，由 $OD:DB=1:2$ ，得出 $B(3m, \frac{3k}{m})$ ，根据三角形的面积公式以及反比例函数系数 k 的几何意义得到 $\frac{1}{2} \times 3m \cdot \frac{3k}{m} - \frac{1}{2}k = 4$ ，解得 $k=1$ 。

【详解】解：∵反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象经过点 D ， $\angle OAB = 90^\circ$ ，

$$\therefore D(m, \frac{k}{m}),$$

$$\because OD:DB=1:2,$$

$$\therefore B(3m, \frac{3k}{m}),$$

$$\therefore AB=3m, OA=\frac{3k}{m},$$

$$\therefore \text{反比例函数 } y = \frac{k}{x} (x > 0) \text{ 的图象经过点 } D \text{ 交 } AB \text{ 于点 } C, \angle OAB = 90^\circ,$$

$$\therefore S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}k,$$

$$\because S_{\triangle OBC} = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} - S_{\triangle AOC} = 4, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times 3m \cdot \frac{3k}{m} - \frac{1}{2}k = 4,$$

解得 $k=1$ ，

故答案为：1。

【点睛】本题考查的是反比例函数系数 k 的几何意义、反比例函数图象上点的坐标特征，三角形的面积，掌握反比例函数的性质、正确表示出 B 的坐标是解题的关键。

16. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 为 AB 的中点， CE ， BD 交于点 H ， $DF \perp CE$ 于点 F ， FM 平分 $\angle DFE$ ，分别交 AD ， BD 于点 M ， G ，延长 MF 交 BC 于点 N ，连接 BF 。下列结论：① $\tan \angle CDF = \frac{1}{2}$ ；

② $S_{\triangle EBH} : S_{\triangle DHF} = 3:4$ ；③ $MG:GF:FN = 5:3:2$ ；④ $\triangle BEF \sim \triangle HCD$ 。其中正确的是_____。（填序号即可）。

$$\therefore \tan \angle CDF = \frac{1}{2}, \text{ 故①正确,}$$

$$\therefore BE \parallel CD,$$

$$\therefore \frac{EH}{CH} = \frac{BH}{DH} = \frac{EB}{CD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore EC = \sqrt{BE^2 + CB^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a, \quad BD = \sqrt{2}CB = 2\sqrt{2}a,$$

$$\therefore EH = \frac{1}{3}EC = \frac{\sqrt{5}}{3}a, \quad BH = \frac{1}{3}BD = \frac{2\sqrt{2}}{3}a, \quad DH = \frac{2}{3}BD = \frac{4\sqrt{2}}{3}a,$$

$$\text{在 } Rt\triangle CDF \text{ 中, } \tan \angle CDF = \frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}, \quad CD = 2a,$$

$$\therefore CF = \frac{2\sqrt{5}}{5}a, \quad DF = \frac{4\sqrt{5}}{5}a,$$

$$\therefore HF = CE - EH - CF = \sqrt{5}a - \frac{\sqrt{5}}{3}a - \frac{2\sqrt{5}}{5}a = \frac{4\sqrt{5}}{15}a,$$

$$\therefore S_{\triangle DFH} = \frac{1}{2} \cdot FH \cdot DF = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{5}}{15}a \times \frac{4\sqrt{5}}{5}a = \frac{8}{15}a^2,$$

$$\therefore S_{\triangle BEH} = \frac{1}{3}S_{\triangle ECB} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times a \times 2a = \frac{1}{3}a^2,$$

$$\therefore S_{\triangle EBH} : S_{\triangle DHF} = \frac{1}{3}a^2 : \frac{8}{15}a^2 = 5:8, \text{ 故②错误;}$$

$$\therefore FM \text{ 平分 } \angle DFE, \quad GQ \perp DF, \quad GP \perp EC,$$

$$\therefore GQ = GP,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle FGH}}{S_{\triangle FDG}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot HF \cdot GP}{\frac{1}{2} \cdot DF \cdot GQ} = \frac{GH}{DG},$$

$$\therefore \frac{GH}{DG} = \frac{HF}{DF} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{15}a}{\frac{4\sqrt{5}}{5}a} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore DG = \frac{3}{4}DH = \sqrt{2}a,$$

$$\therefore BG = DG,$$

$$\therefore DM \parallel BN,$$

$$\therefore \frac{GM}{GN} = \frac{DG}{GB} = 1,$$

$$\therefore GM = GN,$$

$$\because S_{\triangle DFH} = S_{\triangle FGH} + S_{\triangle FGD},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{5}}{15} a \times \frac{4\sqrt{5}}{5} a = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{5}}{15} \times GP + \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} a \times GQ,$$

$$\therefore GP = GQ = \frac{\sqrt{5}}{5} a,$$

$$\because \angle GPF = \angle PFQ = \angle FQG = 90^\circ, \quad GP = GQ,$$

$\therefore$ 四边形 $GPFQ$ 是正方形,

$$\therefore FG = \frac{\sqrt{10}}{5} a,$$

过点 N 作 $NJ \perp CE$ 于点 J , 设 $FJ = NJ = m$, 则 $CJ = 2m$,

$$\therefore 3m = \frac{2\sqrt{5}}{5} a,$$

$$\therefore m = \frac{2\sqrt{5}}{15} a,$$

$$\therefore FN = \sqrt{2}m = \frac{2\sqrt{10}}{15} a,$$

$$\therefore MG = GN = GF + FN = \frac{\sqrt{10}}{5} a + \frac{2\sqrt{10}}{15} a = \frac{\sqrt{10}}{3} a,$$

$$\therefore MG : GF : FN = \frac{\sqrt{10}}{3} a : \frac{\sqrt{10}}{5} a : \frac{2\sqrt{10}}{15} a = 5 : 3 : 2, \quad \text{故③正确,}$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle HCD,$$

$$\because \frac{BE}{EF} = \frac{a}{\frac{3\sqrt{5}}{5}a} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \frac{HC}{CD} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore \frac{BE}{EF} = \frac{CH}{CD},$$

$\therefore \triangle BEF \sim \triangle HCD$, 故④正确.

故答案为: ①③④.

【点睛】 本题考查了平行线分线段成比例, 相似三角形的判定和性质, 正方形的判定和性质, 解直角三角

形, 勾股定理, 角平分线的性质等知识, 解题的关键是学会利用参数解决问题, 属于中考填空题中的压轴题.

三、解答题 (每小题 8 分, 共 16 分)

17. 先化简, 再求值: $\frac{m^2-9}{m^2-6m+9} \div \left(1 - \frac{2}{m-3}\right)$, 其中 $m=2$.

【答案】 $\frac{m+3}{m-5}$, $-\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】 先根据分式的混合运算将式子进行化简, 再代值计算即可.

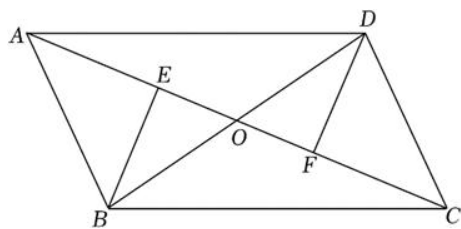
$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: 原式} &= \frac{(m+3)(m-3)}{(m-3)^2} \div \left(\frac{m-3}{m-3} - \frac{2}{m-3}\right) \\ &= \frac{(m+3)(m-3)}{(m-3)^2} \div \frac{m-5}{m-3} \\ &= \frac{(m+3)(m-3)}{(m-3)^2} \cdot \frac{m-3}{m-5} \\ &= \frac{m+3}{m-5}, \end{aligned}$$

当 $m=2$ 时,

$$\frac{m+3}{m-5} = \frac{2+3}{2-5} = -\frac{5}{3}.$$

【点睛】 本题考查分式的化简求值, 解题关键是掌握分式的混合运算法则.

18. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 O , $BE \perp AC$, $DF \perp AC$, 垂足分别为点 E , F , 且 $BE = DF$, $\angle ABD = \angle BDC$. 求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



【答案】 见解析

【解析】

【分析】 结合已知条件推知 $AB \parallel CD$; 然后由全等三角形的判定定理 AAS 证得 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$, 则其对应边相等: $AB = CD$; 最后根据“对边平行且相等是四边形是平行四边形”证得结论.

【详解】 证明: $\because \angle ABD = \angle BDC$,

$$\therefore AB \parallel CD.$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DCF.$$

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CDF$ 中,

$$\begin{cases} \angle BAE = \angle DCF \\ \angle AEB = \angle CFD = 90^\circ \\ BE = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF (AAS).$$

$$\therefore AB = CD.$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

【点睛】 本题主要考查了平行四边形的判定，三角形全等的判定及性质，解题的关键是掌握平行四边形的判定：(1) 两组对边分别平行的四边形是平行四边形；(2) 两组对边分别相等的四边形是平行四边形；(3) 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

四、解答题 (每小题 10 分, 共 20 分)

19. 某校开展“凝心聚力颂家乡”系列活动，组建了四个活动小组供学生参加：A (朗诵)，B (绘画)，C (唱歌)，D (征文)，学校规定：每名学生都必须参加且只能参加其中一个活动小组. 学校随机抽取了部分学生，对其参加活动小组情况进行了调查. 根据调查结果绘制成如下两幅不完整的统计图 (图 1 和图 2).

学生参加活动小组人数
条形统计图

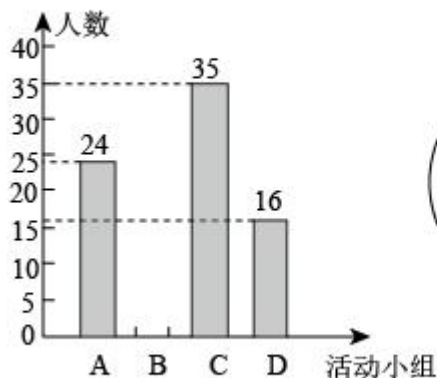


图1

学生参加活动小组人数
扇形统计图

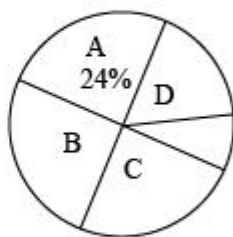


图2

请根据统计图提供的信息，解答下列问题：

- (1) 本次共调查了_____名学生，扇形统计图中“C”对应的圆心角度数为_____.
- (2) 请补全条形统计图.
- (3) 若该校共有 2000 名学生，根据调查结果，请你估计这所学校参加 D 活动小组的学生人数.

【答案】 (1) 100, 126°

(2) 见解析 (3) 320

【解析】

【分析】(1) 由 A 的人数及其所占百分比可得抽查的学生人数; 用 360° 乘“ C ”所占比例可得扇形统计图中“ C ”对应的圆心角度数;

(2) 总人数减去 A 、 C 、 D 的人数求得 B 对应人数, 据此可补全图形;

(3) 总人数乘以样本中 D 的人数所占比例即可.

【小问 1 详解】

解: 这次学校抽查的学生人数是 $24 \div 24\% = 100$ (人),

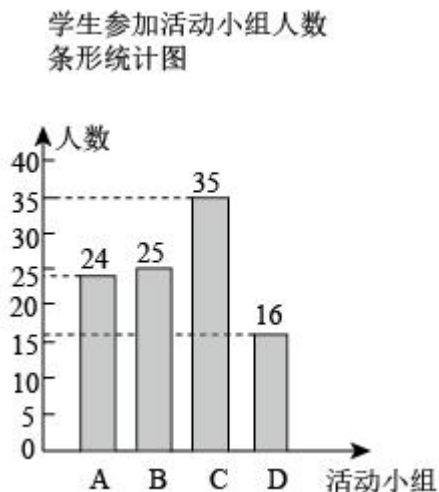
扇形统计图中“ C ”对应的圆心角度数为 $\frac{35}{100} \times 360^\circ = 126^\circ$

故答案为: 100, 126° ;

【小问 2 详解】

B 人数为: $100 - (24 + 35 + 16) = 25$ (人),

补全条形图如下:



【小问 3 详解】

$$2000 \times \frac{16}{100} = 320 \text{ (人)},$$

答: 估计这所学校参加 D 活动小组的学生人数有 320 人.

【点睛】本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用, 读懂统计图, 从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键, 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据; 扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

20. 2022 年 4 月 15 日是第七个全民国家安全教育日, 某校七、八年级举行了一次国家安全知识竞赛, 经过评比后, 七年级的两名学生 (用 A , B 表示) 和八年级的两名学生 (用 C , D 表示) 获得优秀奖.

(1) 从获得优秀奖的学生中随机抽取一名分享经验, 恰好抽到七年级学生的概率是_____.

(2) 从获得优秀奖的学生中随机抽取两名分享经验, 请用列表法或画树状图法, 求抽取的两名学生恰好一名来自七年级、一名来自八年级的概率.

【答案】(1) $\frac{1}{2}$;

(2) 作图见解析, $\frac{2}{3}$.

【解析】

【分析】(1) 直接根据概率公式求解即可;

(2) 画树状图得出所有等可能结果, 从中找到符合条件的结果数, 再根据概率公式求解即可.

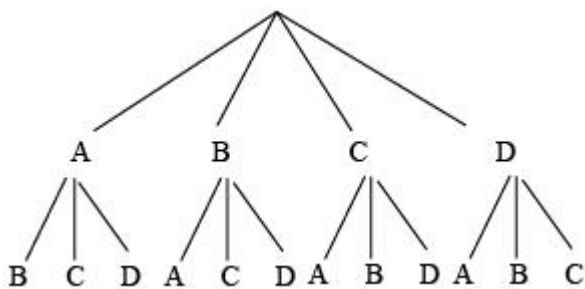
【小问 1 详解】

从获得优秀奖的学生中随机抽取一名分享经验, 恰好抽到七年级学生的概率是 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

故答案为: $\frac{1}{2}$;

【小问 2 详解】

树状图如下:

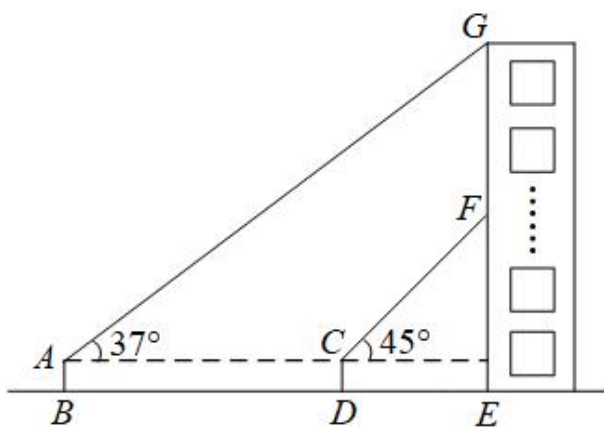


由表知, 共有 12 种等可能结果, 其中抽取的两名学生恰好一名来自七年级、一名来自八年级的有 8 种结果, 所以抽取的两名学生恰好一名来自七年级、一名来自八年级的概率为 $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

【点睛】本题考查了列表法与树状图法: 利用列表法或树状图法展示所有可能的结果求出 n , 再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m , 然后根据概率公式计算事件 A 或事件 B 的概率.

五、解答题 (每小题 10 分, 共 20 分)

21. 北京时间 2022 年 4 月 16 日 9 时 56 分, 神舟十三号载人飞船返回舱成功着陆. 为弘扬航天精神, 某校在教学楼上悬挂了一幅长为 8m 的励志条幅 (即 $GF = 8\text{m}$). 小亮同学想知道条幅的底端 F 到地面的距离, 他的测量过程如下: 如图, 首先他站在楼前点 B 处, 在点 B 正上方点 A 处测得条幅顶端 G 的仰角为 37° , 然后向教学楼条幅方向前行 12m 到达点 D 处 (楼底部点 E 与点 B , D 在一条直线上), 在点 D 正上方点 C 处测得条幅底端 F 的仰角为 45° , 若 AB , CD 均为 1.65m (即四边形 $ABDC$ 为矩形), 请你帮助小亮计算条幅底端 F 到地面的距离 FE 的长度. (结果精确到 0.1m, 参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$)

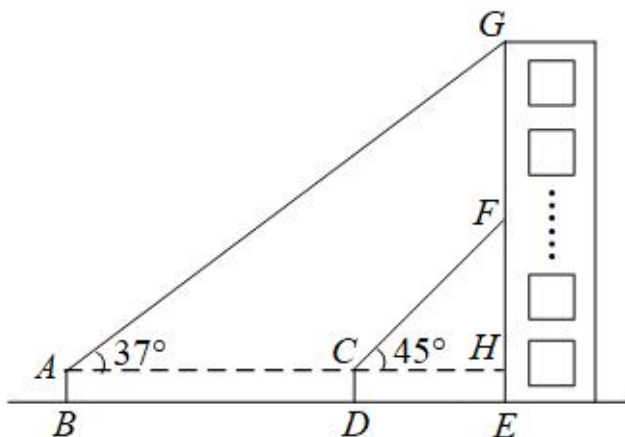


【答案】条幅底端 F 到地面的距离 FE 的长度约为 5.7 米.

【解析】

【分析】设 AC 与 GE 相交于点 H , 根据题意可得: $AB = CD = HE = 1.65$ 米, $AC = BD = 12$ 米, $\angle AHG = 90^\circ$, 然后设 $CH = x$ 米, 则 $AH = (12 + x)$ 米, 在 $Rt\triangle CHF$ 中, 利用锐角三角函数的定义求出 FH 的长, 从而求出 GH 的长, 最后再在 $Rt\triangle AHG$ 中, 利用锐角三角函数的定义列出关于 x 的方程, 进行计算即可解答.

【详解】解: 设 AC 与 GE 相交于点 H ,



由题意得:

$AB = CD = HE = 1.65$ 米, $AC = BD = 12$ 米, $\angle AHG = 90^\circ$,

设 $CH = x$ 米,

$\therefore AH = AC + CH = (12 + x)$ 米,

在 $Rt\triangle CHF$ 中, $\angle FCH = 45^\circ$,

$\therefore FH = CH \cdot \tan 45^\circ = x$ (米),

$\therefore GF = 8$ 米,

$\therefore GH = GF + FH = (8 + x)$ 米,

在 $Rt\triangle AHG$ 中, $\angle GAH = 37^\circ$,

$$\therefore \tan 37^\circ = \frac{GH}{AH} = \frac{x+8}{12+x} \approx 0.75,$$

解得: $x = 4$,

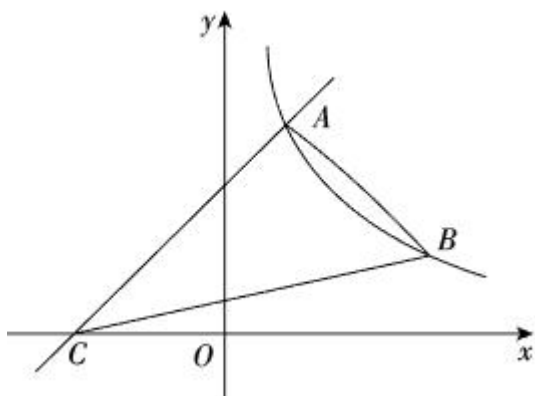
经检验: $x = 4$ 是原方程的根,

$$\therefore FE = FH + HE = 5.65 \approx 5.7 \text{ (米)},$$

$\therefore$ 条幅底端 F 到地面的距离 FE 的长度约为 5.7 米.

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用-仰角俯角问题, 熟练掌握锐角三角函数的定义是解题的关键.

22. 如图, 在平面直角坐标系中, 一次函数 $y = x + 2$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 $A(1, m)$, 与 x 轴交于点 C .



(1) 求点 A 的坐标和反比例函数的解析式;

(2) 点 B 是反比例函数图象上一点且纵坐标是 1, 连接 AB , CB , 求 $\triangle ACB$ 的面积.

【答案】 (1) $y = \frac{3}{x}$;

(2) 6

【解析】

【分析】 (1) 由一次函数的解析式求得 A 的坐标, 然后根据待定系数法即可求得反比例函数的解析式;

(2) 作 $BD \parallel x$ 轴, 交直线 AC 于点 D , 则 D 点的纵坐标为 1, 利用函数解析式求得 B 、 D 的坐标, 然后根据三角形面积公式即可求得.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 一次函数 $y = x + 2$ 的图象过点 $A(1, m)$,

$$\therefore m = 1 + 2 = 3,$$

$$\therefore A(1, 3),$$

$\therefore$ 点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象上,

$$\therefore k = 1 \times 3 = 3,$$

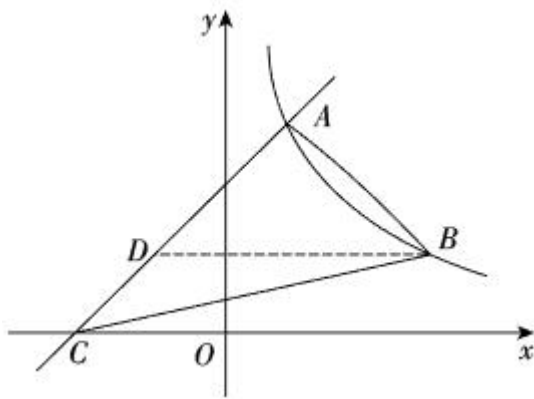
$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y = \frac{3}{x}$;

【小问 2 详解】

$\therefore$ 点 B 是反比例函数图象上一点且纵坐标是 1,

$$\therefore B(3, 1),$$

作 $BD \parallel x$ 轴, 交直线 AC 于点 D , 则 D 点的纵坐标为 1,



代入 $y = x + 2$ 得, $1 = x + 2$, 解得 $x = -1$,

$$\therefore D(-1, 1),$$

$$\therefore BD = 3 + 1 = 4,$$

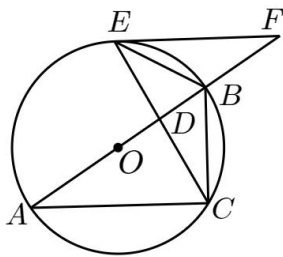
$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6.$$

【点睛】本题是一次函数与反比例函数的交点问题, 考查了一次函数图象上点的坐标特征, 待定系数法求反比例函数的解析式, 三角形的面积, 注意数形结合思想的运用.

六、解答题 (每小题 10 分, 共 20 分)

23. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AB 为 $\odot O$ 的直径, 点 E 为 $\odot O$ 上一点, $EF \parallel AC$ 交 AB 的延长线

于点 F , CE 与 AB 交于点 D , 连接 BE , 若 $\angle BCE = \frac{1}{2} \angle ABC$.



(1) 求证: EF 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 若 $BF = 2$, $\sin \angle BEC = \frac{3}{5}$, 求 $\odot O$ 的半径.

【答案】 (1) 过程见解析

(2) 3

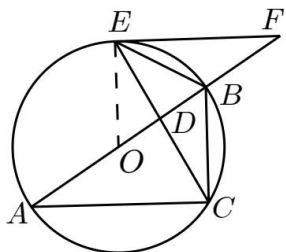
【解析】

【分析】(1) 连接 OE , 先根据圆周角定理及已知条件得出 $\angle ABC = \angle BOE$, 进而得出 $OE \parallel BC$, 再由 $EF \parallel CA$, 根据平行线的性质得出 $\angle FEO = \angle ACB$, 然后根据直径所对的是直角, 即可得出答案;

(2) 先说明 $FE \parallel AC$ ，再设 $\odot O$ 的半径为 r ，并表示 FO ， AB ， BC ，然后根据对应边成比例得出 $\frac{EO}{BC} = \frac{FO}{AB}$ ，根据比例式求出半径即可。

【小问 1 详解】

证明: 连接 OE .



$$\therefore \angle BCE = \frac{1}{2} \angle ABC, \quad \angle BCE = \frac{1}{2} \angle BOE,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BOE,$$

$$\therefore OE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle OED = \angle BCD.$$

$$\therefore EF \parallel CA,$$

$$\therefore \angle FEC = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle OED + \angle FEC = \angle BCD + \angle ACE,$$

即 $\angle FEO = \angle ACB$.

$\because AB$ 是直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle FEO = 90^\circ$,

$\therefore FE \perp EO$.

$\because EO$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore EF$ 是 $\odot O$ 的切线.

【小问 2 详解】

$\because EF \parallel AC$,

$\therefore \angle FEO = \angle ACB$.

$\because BF = 2$, $\sin \angle BEC = \frac{3}{5}$.

设 $\odot O$ 的半径为 r ,

$\therefore FO = 2 + r$, $AB = 2r$, $BC = \frac{6}{5}r$.

$\because \frac{EO}{BC} = \frac{FO}{AB}$,

$\therefore \frac{\frac{6}{5}r}{\frac{6}{5}r} = \frac{2+r}{2r}$,

解得 $r = 3$,

$\therefore \odot O$ 的半径是 3.

【点睛】本题主要考查了切线的性质和判定, 解直角三角形, 熟练掌握相关定理是解题的关键.

24. 某超市购进一批水果, 成本为 8 元/kg, 根据市场调研发现, 这种水果在未来 10 天的售价 m (元/kg)

与时间第 x 天之间满足函数关系式 $m = \frac{1}{2}x + 18$ ($1 \leq x \leq 10$, x 为整数), 又通过分析销售情况, 发现每天

销售量 y (kg) 与时间第 x 天之间满足一次函数关系, 下表是其中的三组对应值.

时间第 x 天	...	2	5	9	...
销售量 y / kg	...	33	30	26	...

(1) 求 y 与 x 的函数解析式;

(2) 在这 10 天中, 哪一天销售这种水果的利润最大, 最大销售利润为多少元?

【答案】(1) $y = -x + 35$ ($1 \leq x \leq 10$, x 为整数);

(2) 在这 10 天中, 第 7 天和第 8 天销售这种水果的利润最大, 最大销售利润为 378 元.

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求解即可;

(2) 设销售这种水果的日利润为 w 元, 得出 $w = (-x + 35)\left(\frac{1}{2}x + 18 - 8\right) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{3025}{8}$, 再结合 $1 \leq x \leq 10$, x 为整数, 利用二次函数的性质可得答案.

【小问 1 详解】

解: 设每天销售量 y 与时间第 x 天之间满足的一次函数关系式为 $y = kx + b$,

根据题意, 得:
$$\begin{cases} 2k + b = 33 \\ 5k + b = 30 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} k = -1 \\ b = 35 \end{cases}$$

$\therefore y = -x + 35$ ($1 \leq x \leq 10$, x 为整数);

【小问 2 详解】

解: 设销售这种水果的日利润为 w 元,

则 $w = (-x + 35)\left(\frac{1}{2}x + 18 - 8\right)$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{15}{2}x + 350$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{3025}{8},$$

$\therefore 1 \leq x \leq 10$, x 为整数,

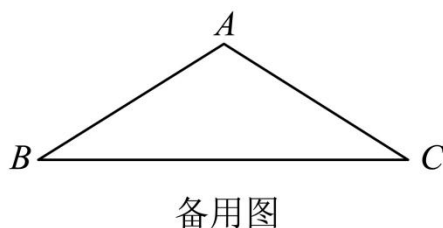
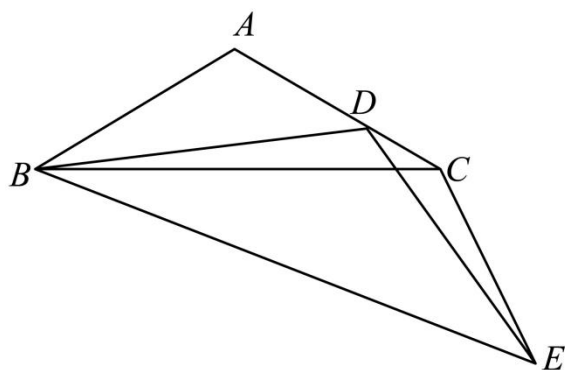
$\therefore$ 当 $x = 7$ 或 $x = 8$ 时, w 取得最大值, 最大值为 378,

答: 在这 10 天中, 第 7 天和第 8 天销售这种水果的利润最大, 最大销售利润为 378 元.

【点睛】本题主要考查了二次函数在销售问题中的应用, 理清题中的数量关系并熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

七、解答题 (本题满分 12 分)

25. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 120^\circ$, 点 D 在直线 AC 上, 连接 BD , 将 DE 绕点 D 逆时针旋转 120° , 得到线段 DE , 连接 BE , CE .



- (1) 求证: $BC = \sqrt{3}AB$;
- (2) 当点 D 在线段 AC 上 (点 D 不与点 A , C 重合) 时, 求 $\frac{CE}{AD}$ 的值;
- (3) 过点 A 作 $AN \parallel DE$ 交 BD 于点 N , 若 $AD = 2CD$, 请直接写出 $\frac{AN}{CE}$ 的值.

【答案】(1) 证明见解析;

(2) $\sqrt{3}$

(3) $\frac{\sqrt{57}}{19}$ 或 $\frac{\sqrt{21}}{21}$

【解析】

【分析】(1) 作 $AH \perp BC$ 于 H , 可得 $BH = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$, $BC = 2BH$, 进而得出结论;

(2) 证明 $\triangle ABD \sim \triangle CBE$, 进而得出结果;

(3) 当点 D 在线段 AC 上时, 作 $BF \perp AC$, 交 CA 的延长线于 F , 作 $AG \perp BD$ 于 G , 设 $AB = AC = 3a$, 则 $AD = 2a$, 解直角三角形 BDF , 求得 BD 的长, 根据 $\triangle DAG \sim \triangle DBF$ 求得 AG , 进而求得 AN , 进一步得出结果; 当点 D 在 AC 的延长线上时, 设 $AB = AC = 2a$, 则 $AD = 4a$, 同样方法求得结果.

【小问 1 详解】

证明: 如图 1,

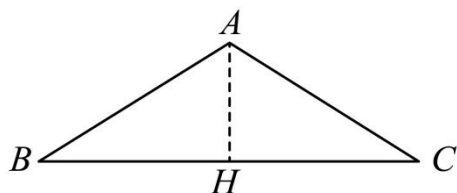


图1

作 $AH \perp BC$ 于 H ,

$$\because AB = AB,$$

$$\therefore \angle BAH = \angle CAH = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ, \quad BC = 2BH,$$

$$\therefore \sin 60^\circ = \frac{BH}{AB},$$

$$\therefore BH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB,$$

$$\therefore BC = 2BH = \sqrt{3} AB;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ,$$

$$\text{由 (1) 得, } \frac{BC}{AB} = \sqrt{3},$$

同理可得,

$$\angle DBE = 30^\circ, \quad \frac{BE}{BD} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle ABC = \angle DBE, \quad \frac{BC}{AB} = \frac{BE}{BD},$$

$$\therefore \angle ABC - \angle DBC = \angle DBE - \angle DBC,$$

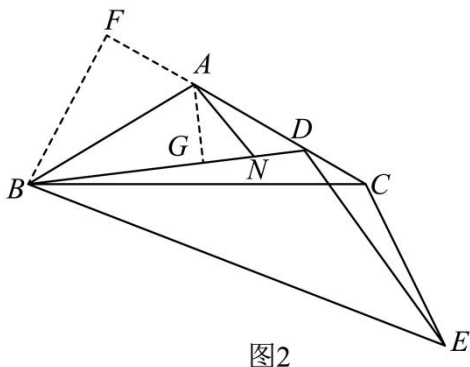
$$\therefore \angle ABD = \angle CBE,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBE,$$

$$\therefore \frac{CE}{AD} = \frac{BE}{BD} = \sqrt{3};$$

【小问 3 详解】

: 如图 2,



当点 D 在线段 AC 上时,

作 $BF \perp AC$, 交 CA 的延长线于 F , 作 $AG \perp BD$ 于 G ,

设 $AB = AC = 3a$, 则 $AD = 2a$,

由 (1) 得, $CE = \sqrt{3}AD = 2\sqrt{3}a$,

在 $Rt\triangle ABF$ 中, $\angle BAF = 180^\circ - \angle BAC = 60^\circ$, $AB = 3a$,

$$\therefore AF = 3a \cdot \cos 60^\circ = \frac{3}{2}a, \quad BF = 3a \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}a,$$

在 $Rt\triangle BDF$ 中, $DF = AD + AF = 2a + \frac{3}{2}a = \frac{7}{2}a$,

$$BD = \sqrt{BF^2 + DF^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{7}{2}a\right)^2} = \sqrt{19}a,$$

$\therefore \angle AGD = \angle F = 90^\circ$, $\angle ADG = \angle BDF$,

$\therefore \triangle DAG \sim \triangle DBF$,

$$\therefore \frac{AG}{BF} = \frac{AD}{BD},$$

$$\therefore \frac{AG}{\frac{3\sqrt{3}}{2}a} = \frac{2a}{\sqrt{19}a},$$

$$\therefore AG = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}}a,$$

$\therefore AN \parallel DE$,

$\therefore \angle AND = \angle BDE = 120^\circ$,

$\therefore \angle ANG = 60^\circ$,

$$\therefore AN = \frac{AG}{\sin 60^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}a = \frac{6\sqrt{19}}{19}a,$$

$$\therefore \frac{AN}{CE} = \frac{\frac{6\sqrt{19}}{19}a}{2\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{57}}{19},$$

如图 3,

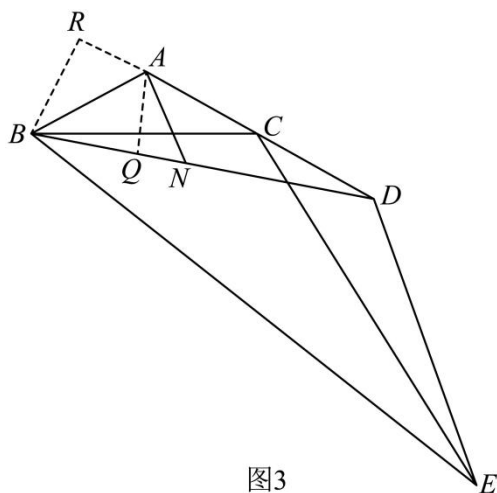


图3

当点 D 在 AC 的延长线上时,

设 $AB = AC = 2a$, 则 $AD = 4a$,

由 (1) 得,

$$CE = \sqrt{3}AD = 4\sqrt{3}a,$$

作 $BR \perp CA$, 交 CA 的延长线于 R , 作 $AQ \perp BD$ 于 Q ,

同理可得,

$$AR = a, \quad BR = \sqrt{3}a,$$

$$\therefore BD = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 + (5a)^2} = 2\sqrt{7}a,$$

$$\therefore \frac{AQ}{\sqrt{3}a} = \frac{4a}{2\sqrt{7}a},$$

$$\therefore AQ = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}a,$$

$$\therefore AN = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}a \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{7}}a,$$

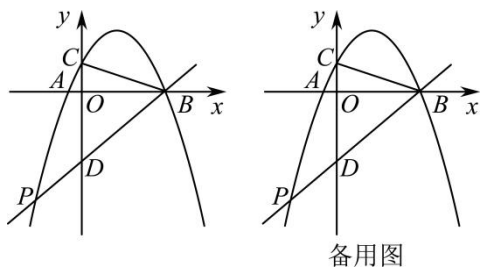
$$\therefore \frac{AN}{CE} = \frac{\frac{4}{\sqrt{7}}a}{4\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{21}}{21},$$

综上所述: $\frac{AN}{CE}$ 的值为 $\frac{\sqrt{57}}{19}$ 或 $\frac{\sqrt{21}}{21}$.

【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质, 相似三角形的判定和性质, 解直角三角形等知识, 解决问题的关键是正确分类和较强的计算能力.

八、解答题 (本题满分 14 分)

26. 如图, 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$, B 两点, 与 y 轴交于点 $C(0, 2)$, 连接 BC .



(1) 求抛物线的解析式.

(2) 点 P 是第三象限抛物线上一点, 直线 PE 与 y 轴交于点 D , $\triangle BCD$ 的面积为 12, 求点 P 的坐标.

(3) 在 (2) 的条件下, 若点 E 是线段 BC 上点, 连接 OE , 将 $\triangle OEB$ 沿直线 OE 翻折得到 $\triangle OEB'$, 当直线 EB' 与直线 BP 相交所成锐角为 45° 时, 求点 B' 的坐标.

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$;

(2) $P(-3, -7)$;

(3) B' 的坐标为 $\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{8\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$.

【解析】

【分析】(1) 用待定系数法求函数的解析式即可;

(2) 先由 $\triangle BDC$ 的面积求出 OD 的长, 从而确定 D 点坐标为 $(0, -4)$, 再由待定系数法求出直线 BD 的解析式, 直线 BD 与抛物线的交点即为所求;

(3) 当 B' 在第一象限时, 由 $\angle ODB = 45^\circ$, 可知 $EB' \parallel CD$, 求出直线 BC 的解析式, 可设 $E(t, -\frac{1}{2}t + 2)$, 在 $Rt\triangle OHB'$ 中, $B'H = \sqrt{16 - t^2}$, 则 $BE = \sqrt{16 - t^2} + \frac{1}{2}t - 2$, 在 $Rt\triangle BHE$ 中, 由勾股定理得

$\left(\sqrt{16 - t^2} + \frac{1}{2}t - 2\right)^2 = (4 - t)^2 + \left(-\frac{1}{2}t + 2\right)^2$, 求出 t 的值即可求 B' 坐标; 当 B' 在第二象限时, $B'G \parallel x$

轴, 可得四边形 $B'OBE$ 是平行四边形, 则 $B'\left(t - 4, -\frac{1}{2}t + 2\right)$, 由折叠的性质可判断平行四边形 $OBEB'$ 是

菱形, 再由 $BE = OB$, 可得

$\sqrt{(4 - t)^2 + \left(-\frac{1}{2}t + 2\right)^2} = 4$, 求出 t 的值即可求 B' 坐标.

【小问 1 详解】

将 $A(-1, 0)$, $C(0, 2)$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$,

$$\therefore \begin{cases} c = 2 \\ -\frac{1}{2} - b + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = \frac{3}{2}, \\ c = 2 \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2;$$

【小问 2 详解】

$$\text{令 } y = 0, \text{ 则 } -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0,$$

$$\text{解得 } x = -1 \text{ 或 } x = 4,$$

$$\therefore B(4, 0),$$

$$\therefore OB = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 4 \times (2 + OD) = 12,$$

$$\therefore OD = 4,$$

$$\therefore D(0, -4),$$

设直线 BD 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} b = -4 \\ 4k + b = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ b = -4 \end{cases},$$

$$\therefore y = x - 4,$$

$$\text{联立方程组} \begin{cases} y = x - 4 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = -3 \\ y = -7 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases},$$

$$\therefore P(-3, -7);$$

【小问 3 详解】

如图 1, 当 B' 在第一象限时,

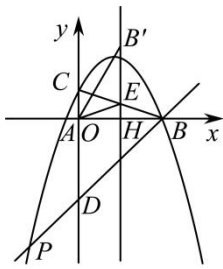


图1

设直线 BC 的解析式为 $y=k'x+b'$,

$$\begin{cases} b'=2 \\ 4k'+b'=0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k' = -\frac{1}{2}, \\ b' = 2 \end{cases}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + 2,$$

设 $E(t, -\frac{1}{2}t+2), ,$

$$\therefore OE = t, \quad EH = -\frac{1}{2}t + 2,$$

$$\therefore D(0, -4), B(4, 0),$$

$$\therefore OB = OD,$$

$$\therefore \angle ODB = 45^\circ,$$

$\therefore$ 直线 EB' 与直线 BP 相交所成锐角为 45° ,

$$\therefore EB' \parallel CD,$$

由折叠可知, $OB' = BO = 4$, $BE = B'E$,

在 $Rt\triangle OHB'$ 中, $B'H = \sqrt{16-t^2}$,

$$\therefore B'E = \sqrt{16-t^2} - \left(-\frac{1}{2}t + 2\right) = \sqrt{16-t^2} + \frac{1}{2}t - 2,$$

$$\therefore BE = \sqrt{16 - t^2} + \frac{1}{2}t - 2$$

在 $Rt\triangle BHE$ 中, $\left(\sqrt{16-t^2}+\frac{1}{2}t-2\right)^2=(4-t)^2+\left(-\frac{1}{2}t+2\right)^2$,

解得 $t = \pm \frac{4\sqrt{5}}{5}$,

$$\because 0 \leq t \leq 4,$$

$$\therefore t = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore B' \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{8\sqrt{5}}{5} \right);$$

如图 2, 当 B' 在第二象限, $\angle BGB' = 45^\circ$ 时,

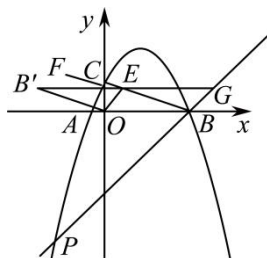


图2

$$\because \angle ABP = 45^\circ,$$

$$\therefore B'G \parallel x \text{ 轴},$$

$$\because B'E = BO,$$

$\therefore$ 四边形 $B'OBE$ 是平行四边形,

$$\therefore B'E = 4,$$

$$\therefore B' \left(t-4, -\frac{1}{2}t+2 \right),$$

由折叠可知 $OB = OB' = 4$,

$\therefore$ 平行四边形 $OBEB'$ 是菱形,

$$\therefore BE = OB,$$

$$\therefore \sqrt{(4-t)^2 + \left(-\frac{1}{2}t+2\right)^2} = 4,$$

$$\text{解得 } t = 4 + \frac{8\sqrt{5}}{5} \text{ 或 } t = 4 - \frac{8\sqrt{5}}{5},$$

$$\because 0 \leq t \leq 4,$$

$$\therefore t = 4 - \frac{8\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore B'\left(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right);$$

综上所述: B' 的坐标为 $\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{8\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$.

【点睛】 本题考查二次函数的图象及性质, 熟练掌握二次函数的图象及性质, 直角三角形的性质, 折叠的性质, 勾股定理的应用是解题的关键.

