

沈阳市 2022 年初中学业水平考试

数学试题

试题满分 120 分，考试时间 120 分钟.

注意事项:

1. 答题前，考生须用 0.5mm 黑色字迹的签字笔在本试题卷规定位置填写自己的姓名、准考证号;
2. 考生须在答题卡上作答，不能在本试题卷上作答，答在本试题卷上无效;
3. 考试结束，将本试题卷和答题卡一并交回;
4. 本试题卷包括八道大题，25 道小题，共 6 页. 如缺页、印刷不清，考生须声明.

一、选择题（下列各题的备选答案中，只有一个答案是正确的. 每小题 2 分，共 20 分）

1. 计算 $5 + (-3)$ 正确的是 ()

- A. 2 B. -2 C. 8 D. -8

【答案】A

【解析】

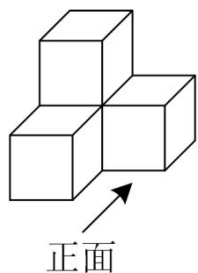
【分析】根据有理数的加法运算即可求解.

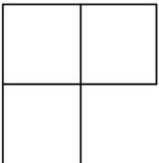
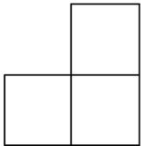
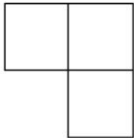
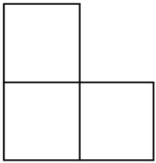
【详解】解: $5 + (-3) = 2$.

故选: A.

【点睛】本题考查了有理数的加法，掌握有理数的加法法则是解题的关键.

2. 如图是由 4 个相同的小立方块搭成的几何体，这个几何体的主视图是()



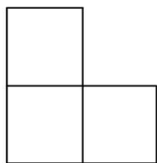
- A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】找到从正面看所得到的图形即可，注意所有的看到的棱都应表现在主视图中.

【详解】解：从正面看易得上面第一层有1个正方形，第二层左边和右边都有一个正方形，如图所示：



故选：D.

【点睛】本题考查了三视图的知识，主视图是从物体的正面看得到的视图.

3. 下列计算结果正确的是 ()

A. $(a^3)^3 = a^6$ B. $a^6 \div a^3 = a^2$ C. $(ab^4)^2 = ab^8$ D.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

【答案】D

【解析】

【分析】分别利用幂的乘方法则，同底数幂的除法，积的乘方法则，完全平方公式分别求出即可.

【详解】A. $(a^3)^3 = a^9$ ，故此选项计算错误，不符合题意；

B. $a^6 \div a^3 = a^3$ ，故此选项计算错误，不符合题意；

C. $(ab^4)^2 = a^2b^8$ ，故此选项计算错误，不符合题意；

D. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，故此选项计算正确，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查幂的乘方法则，同底数幂的除法，积的乘方法则，完全平方公式，熟练掌握相关计算法则是解答本题的关键. 幂的乘方，底数不变，指数相乘；同底数幂相除，底数不变，指数相减；积的乘方，等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘； $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 与 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 都叫做完全平方公式，为了区别，我们把前者叫做两数和的完全平方公式，后者叫做两数差的完全平方公式.

4. 在平面直角坐标系中，点 $A(2,3)$ 关于 y 轴对称的点的坐标是()

A. $(-2,-3)$ B. $(-2,3)$ C. $(2,-3)$ D. $(-3,-2)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据“关于 y 轴对称的两个点的坐标，纵坐标相同，横坐标互为相反数”即可解答.

【详解】解：点 $A(2, 3)$ 关于 y 轴对称的点的坐标是 $(-2, 3)$.

故选 B.

【点睛】本题考查了关于坐标轴对称的点的坐标特征，对称点的坐标规律：①关于 x 轴对称的点，横坐标相同，纵坐标互为相反数；②关于 y 轴对称的点，纵坐标相同，横坐标互为相反数；③关于原点对称的点，横坐标与纵坐标都互为相反数.

5. 调查某少年足球队全体队员的年龄，得到数据结果如下表：

年龄/岁	11	12	13	14	15
人数	3	4	7	2	2

则该足球队队员年龄的众数是()

- A. 15 岁 B. 14 岁 C. 13 岁 D. 7 人

【答案】C

【解析】

【分析】根据众数的定义即一组数据中出现次数最多的数据，即可得出答案.

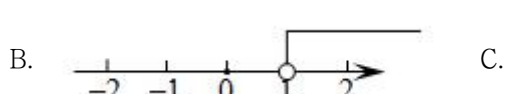
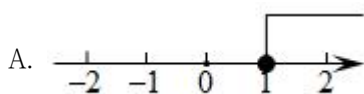
【详解】解：∵年龄是 13 岁的人数最多，有 7 个人，

∴这些队员年龄的众数是 13；

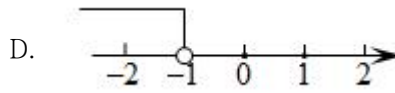
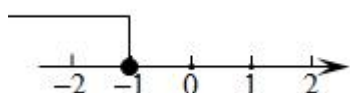
故选：C.

【点睛】本题考查了众数，掌握众数的定义是本题的关键，众数是一组数据中出现次数最多的数据.

6. 不等式 $2x+1>3$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()



C.



【答案】B

【解析】

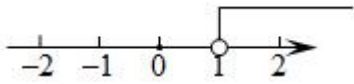
【分析】先解不等式，将不等式的解集表示在数轴上即可.

【详解】解： $2x+1>3$

移项合并得： $2x>2$,

系数化1得: $x > 1$,

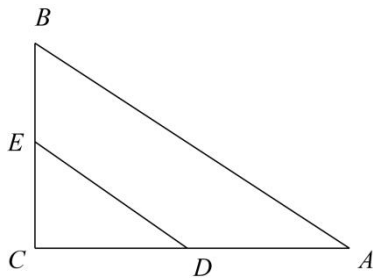
表示在数轴上为:



故选: B.

【点睛】 本题考查一元一次不等式的解法, 并把解集表示在数轴上, 正确解出不等式是解答本题的关键.

7. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle A = 30^\circ$, 点 D 、 E 分别是直角边 AC 、 BC 的中点, 连接 DE , 则 $\angle CED$ 度数是 ()



- A. 70° B. 60° C. 30° D. 20°

【答案】 B

【解析】

【分析】 因为点 D 、 E 分别是直角边 AC 、 BC 的中点, 所以 DE 是 $Rt\triangle ABC$ 的中位线, 三角形的中位线平行于第三边, 进而得到 $\angle B = \angle CED$, 求出 $\angle B$ 的度数, 即为 $\angle CED$ 的度数.

【详解】 解: $\because$ 点 D 、 E 分别是直角边 AC 、 BC 的中点,

$\therefore DE$ 是 $Rt\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE \parallel AB$,

$\therefore \angle B = \angle CED$,

$\because \angle A = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$,

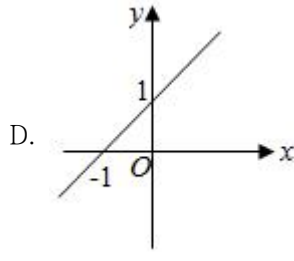
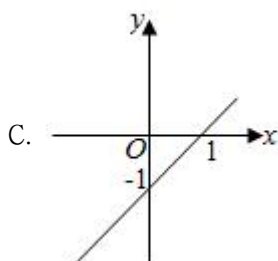
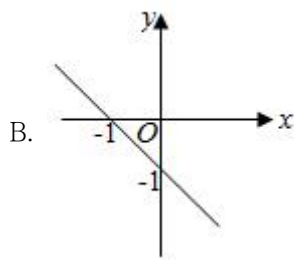
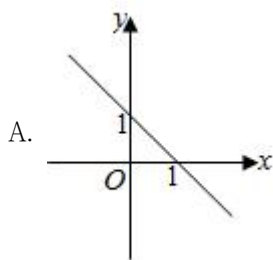
$\therefore \angle B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$,

$\therefore \angle CED = 60^\circ$,

故选: B.

【点睛】 本题考查三角形中位线的性质以及三角形内角和, 由三角形中位线定义, 找到平行线是解答本题的关键.

8. 在平面直角坐标系中, 一次函数 $y = -x + 1$ 的图象是 ()



【答案】 A

【解析】

【分析】 根据一次函数的图象与性质即可得.

【详解】 解：一次函数 $y = -x + 1$ 的一次项系数为 $-1 < 0$ ，常数项为 $1 > 0$ ，

$\therefore$ 函数图象经过一、二、四象限

故选： A.

【点睛】 本题考查了一次函数的图象与性质，熟练掌握一次函数的图象与性质是解题关键.

9. 下列说法正确的是()

- A. 了解一批灯泡的使用寿命，应采用抽样调查的方式
- B. 如果某彩票的中奖概率是 1%，那么一次购买 100 张这种彩票一定会中奖
- C. 若甲、乙两组数据的平均数相同， $S_{\text{甲}}^2 = 2.5$ ， $S_{\text{乙}}^2 = 8.7$ ，则乙组数据较稳定
- D. “任意掷一枚质地均匀的骰子，掷出的点数是 7”是必然事件

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据全面调查和抽样调查的意义、概率的意义、方差的意义、事件可能性的大小分别进行判断即可.

【详解】 解： A. 要了解一批灯泡的使用寿命，采用普查的方式不合适，破坏性较强，应采用抽样调查，故此选项正确，符合题意；

B. 如果某彩票的中奖概率是 1%，那么一次购买 100 张这种彩票不一定一定会中奖，故选项错误，不符合题意；

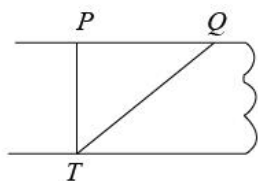
C. 若甲、乙两组数据的平均数相同, $S_{\text{甲}}^2 = 2.5$, $S_{\text{乙}}^2 = 8.7$, 则 $S_{\text{甲}}^2 < S_{\text{乙}}^2$, 则甲组数据较稳定, 故选项错误, 不符合题意;

D. “任意掷一枚质地均匀的骰子, 掷出的点数是 7” 是不可能事件, 故选项错误, 不符合题意.

故选: A.

【点睛】此题主要考查了全面调查和抽样调查的意义、概率的意义、方差的意义、事件可能性的多少, 关键是熟练掌握各知识点.

10. 如图, 一条河两岸互相平行, 为测得此河的宽度 PT (PT 与河岸 PQ 垂直), 测 P 、 Q 两点距离为 m 米, $\angle PQT = \alpha$, 则河宽 PT 的长度是 ()



A. $m \sin \alpha$

B. $m \cos \alpha$

C. $m \tan \alpha$

D. $\frac{m}{\tan \alpha}$

【答案】C

【解析】

【分析】结合图形利用正切函数求解即可.

【详解】解: 根据题意可得:

$$\tan \alpha = \frac{PT}{PQ},$$

$$\therefore PT = PQ \cdot \tan \alpha = m \tan \alpha,$$

故选 C.

【点睛】题目主要考查解直角三角形的实际应用, 理解题意, 利用正切函数解直角三角形是解题关键.

二、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

11. 分解因式: $ay^2 + 6ay + 9a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $a(y+3)^2$

【解析】

【分析】先提取公因式, 然后再利用完全平方公式进行因式分解即可.

【详解】解: $ay^2 + 6ay + 9a$

$$= a(y^2 + 6y + 9)$$

$$= a(y+3)^2;$$

故答案为: $a(y+3)^2$.

【点睛】 本题主要考查因式分解, 熟练掌握因式分解是解题的关键.

12. 二元一次方程组 $\begin{cases} x+2y=5 \\ y=2x \end{cases}$ 的解是_____.

【答案】 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ ## $\begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$

【解析】

【分析】 利用代入消元法进行求解方程组的解即可.

【详解】 解: $\begin{cases} x+2y=5 \text{ ①} \\ y=2x \text{ ②} \end{cases}$

把②代入①得: $5x=5$, 解得: $x=1$,

把 $x=1$ 代入②得: $y=2$;

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$;

故答案为 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$.

【点睛】 本题主要考查二元一次方程组的解法, 熟练掌握二元一次方程组的解法是解题的关键.

13. 化简: $\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{x^2-1}{x} =$ _____.

【答案】 $x-1$ ## $-1+x$

【解析】

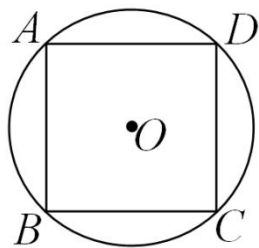
【分析】 根据分式的混合运算可直接进行求解.

【详解】 解: 原式 $= \frac{x}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x} = x-1$;

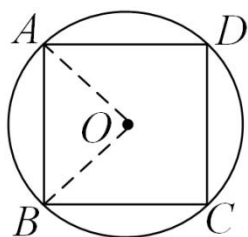
故答案为 $x-1$.

【点睛】 本题主要考查分式的运算, 熟练掌握分式的加减乘除运算是解题的关键.

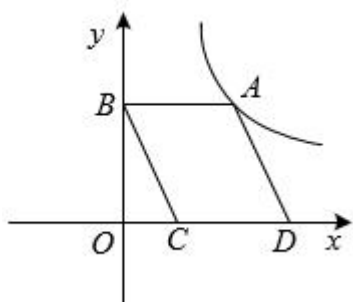
14. 如图, 边长为 4 的正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 则 $\widehat{AB}$ 的长是_____ (结果保留 π)

【答案】 $\sqrt{2}\pi$

【解析】

【分析】 连接 OA 、 OB ，可证 $\angle AOB = 90^\circ$ ，根据勾股定理求出 AO ，根据弧长公式求出即可.【详解】 解：连接 OA 、 OB . $\because$ 正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, $\therefore AB = BC = DC = AD = 4$, $AO = BO$, $\therefore \widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{AD}$, $\therefore \angle AOB = \frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$,在 $Rt\triangle AOB$ 中，由勾股定理得： $AO^2 + BO^2 = 2AO^2 = 4^2 = 16$,解得： $AO = 2\sqrt{2}$, $\therefore \widehat{AB}$ 的长 $= \frac{90\pi \times 2\sqrt{2}}{180} = \sqrt{2}\pi$,故答案为： $\sqrt{2}\pi$.【点睛】 本题考查了弧长公式和正方形的性质，能求出 $\angle AOB$ 的度数和 OA 的长是解此题的关键.

15. 如图四边形 $ABCD$ 是平行四边形， CD 在 x 轴上，点 B 在 y 轴上，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象经过第一象限点 A ，且平行四边形 $ABCD$ 的面积为 6，则 $k =$ _____.

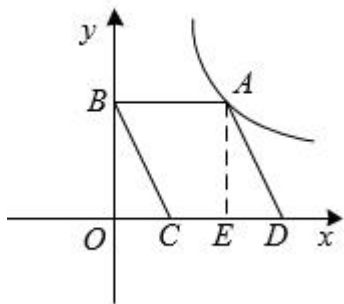


【答案】6

【解析】

【分析】过点 A 作 $AE \perp CD$ 于点 E ，然后平行四边形的性质可知 $\triangle AED \cong \triangle BOC$ ，进而可得矩形 $ABOE$ 的面积与平行四边形 $ABCD$ 的面积相等，最后根据反比例函数 k 的几何意义可求解.

【详解】解：过点 A 作 $AE \perp CD$ 于点 E ，如图所示：



$$\therefore \angle AED = \angle BOC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore BC = AD, BC \parallel AD,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BCO,$$

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle BOC \text{ (AAS)},$$

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 的面积为 6,

$$\therefore S_{\square ABCD} = S_{\text{矩形} ABOE} = 6,$$

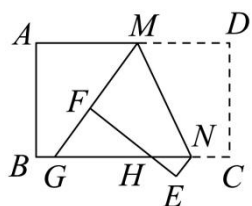
$$\therefore k = 6;$$

故答案为 6.

【点睛】本题主要考查平行四边形的性质及反比例函数 k 的几何意义，熟练掌握平行四边形的性质及反比例函数 k 的几何意义是解题的关键.

16. 如图，将矩形纸片 $ABCD$ 折叠，折痕为 MN ，点 M ， N 分别在边 AD ， BC 上，点 C ， D 的对应点分别在

E, F 且点 F 在矩形内部, MF 的延长线交 BC 与点 G , EF 交边 BC 于点 H . $EN = 2$, $AB = 4$, 当点 H 为 GN 三等分点时, MD 的长为_____.



【答案】 $2\sqrt{13} - 4$ 或 4

【解析】

【分析】由折叠得, $\angle DMN = \angle GMN$, $EF = CD = 4$, $CN = EN = 2$, $\angle EFM = \angle D = 90^\circ$, 证明 $\triangle GHE \sim \triangle NHE$ 得

$$\frac{NH}{GH} = \frac{HE}{HF} = \frac{NE}{GF}, \text{ 再分两种情况讨论求解即可.}$$

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AD \parallel BC, CD = AB = 4, \angle D = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DMN = \angle GNM,$$

由折叠得, $\angle DMN = \angle GMN$, $EF = CD = 4$, $CN = EN = 2$, $\angle EFM = \angle D = 90^\circ$,

$$\therefore \angle GMN = \angle GNM, \angle GFH = \angle NEH,$$

$$\therefore GM = GN,$$

又 $\angle GHE = \angle NHE$,

$$\therefore \triangle GHE \sim \triangle NHE,$$

$$\therefore \frac{NH}{GH} = \frac{HE}{HF} = \frac{NE}{GF},$$

$\because$ 点 H 是 GN 的三等分点, 则有两种情况:

$$\textcircled{1} \text{ 若 } \frac{NH}{GH} = \frac{1}{2} \text{ 时, 则有: } \frac{HE}{HF} = \frac{NE}{GF} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore EH = \frac{1}{3}EF = \frac{4}{3}, FH = \frac{2}{3}EF = \frac{8}{3}, GF = 2NE = 4,$$

$$\text{由勾股定理得, } NH = \sqrt{EH^2 + NF^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 2^2} = \frac{2}{3}\sqrt{13},$$

$$\therefore GH = 2NH = \frac{4}{3}\sqrt{13}$$

$$\therefore GM = GN = GH + NH = 2\sqrt{13},$$

$$\therefore MD = MF = GM - GF = 2\sqrt{13} - 4;$$

②若 $\frac{NH}{GH} = 2$ 时, 则有: $\frac{HE}{HF} = \frac{NE}{GF} = 2$
 $\therefore EH = \frac{2}{3}EF = \frac{8}{3}, FH = \frac{1}{3}EF = \frac{4}{3}, GF = \frac{1}{2}NE = 1,$

由勾股定理得, $NH = \sqrt{EH^2 + NF^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 2^2} = \frac{10}{3},$

$\therefore GH = \frac{1}{2}NH = \frac{5}{3}$

$\therefore GM = GN = GH + NH = 5;$

$\therefore MD = MF = GM - GF = 5 - 1 = 4$

综上, MD 的值为 $2\sqrt{13} - 4$ 或 4 .

【点睛】 本题主要考查了矩形的性质, 折叠的性质, 等腰三角形的判定与性质以及相似三角形的判定与性质等知识, 进行分类讨论是解答本题的关键.

三、解答题:

17. 计算: $\sqrt{12} - 3\tan 30^\circ + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + |\sqrt{3} - 2|.$

【答案】 6

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质, 特殊角的三角函数值, 负整数指数幂, 化简绝对值进行计算即可求解.

【详解】 解: 原式 $= 2\sqrt{3} - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} + 4 + 2 - \sqrt{3}$

$2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 4 + 2 - \sqrt{3}$

$= 6.$

【点睛】 本题考查了实数的混合运算, 掌握二次根式的性质, 特殊角的三角函数值, 负整数指数幂, 化简绝对值是解题的关键.

18. 为了调动同学们学习数学的积极性, 班内组织开展了“数学小先生”讲题比赛, 老师将四道备讲题的题号 1, 2, 3, 4, 分别写在完全相同的 4 张卡片的正面, 将卡片背面朝上洗匀.

(1) 随机抽取一张卡片, 卡片上的数字是“4”的概率是_____;

(2) 小明随机抽取两张卡片, 用画树状图或列表的方法求两张卡片上的数字是“2”和“3”的概率.

【答案】 (1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】(1) 直接由概率公式求解即可；

(2) 画树状图，共有 12 种等可能的结果，其中两张卡片上的数字是 2 和 3 的结果有 2 种，再由概率公式求解即可。

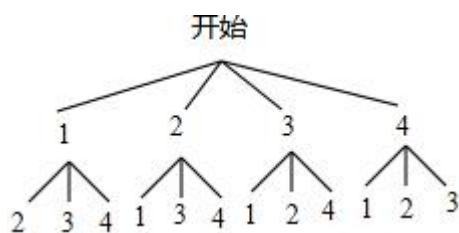
【小问 1 详解】

解：随机抽取一张卡片，卡片上的数字是 4 的概率为 $\frac{1}{4}$ ，

故答案为： $\frac{1}{4}$ ；

【小问 2 详解】

解：画树状图如下：

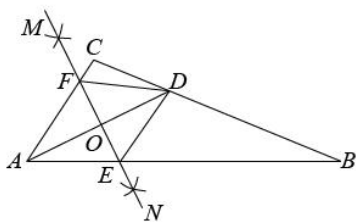


共有 12 种等可能的结果，其中两张卡片上的数字是 2 和 3 的结果有 2 种，

∴ 两张卡片上的数字是 2 和 3 的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 。

【点睛】此题考查的是用树状图或列表法求概率。树状图或列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比。熟练掌握树状图或列表法是解决这类题的关键。

19. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，分别以点 A ， D 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AD$ 的长为半径作弧，两弧交于点 M ， N ，作直线 MN ，分别交 AB ， AD ， AC 于点 E ， O ， F ，连接 DE ， DF 。



(1) 由作图可知，直线 MN 是线段 AD 的_____。

(2) 求证：四边形 $AEDF$ 是菱形。

【答案】(1) 垂直平分线

(2) 见详解

【解析】

【分析】(1) 根据线段垂直平分线的尺规作图可直接得出答案；

(2) 由题意易得 $\angle AOF = \angle AOE = 90^\circ$, $\angle FAO = \angle EAO$, $AF = DF$, 然后可证 $\triangle AOF \cong \triangle AOE$, 则有 $OF = OE$, 进而问题可求证.

【小问 1 详解】

解: 由题意得: 直线 MN 是线段 AD 的垂直平分线;

故答案为: 垂直平分线;

【小问 2 详解】

证明: $\because$ 直线 MN 是线段 AD 的垂直平分线,

$\therefore \angle AOF = \angle AOE = 90^\circ$, $AO = DO$, $AF = DF$,

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,

$\therefore \angle FAO = \angle EAO$,

$\because AO = AO$,

$\therefore \triangle AOF \cong \triangle AOE$ (ASA),

$\therefore OF = OE$,

$\because AO = DO$,

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形,

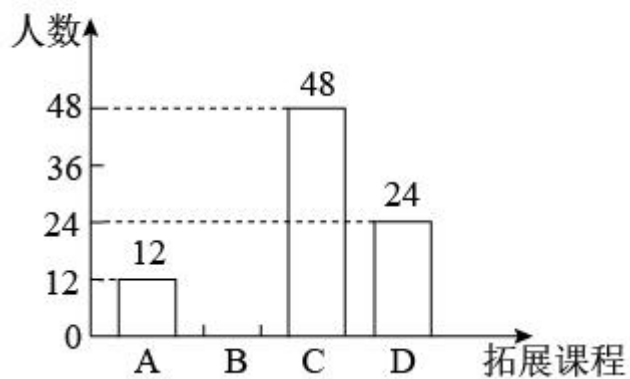
$\because AF = DF$,

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是菱形.

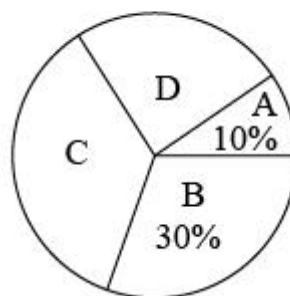
【点睛】 本题主要考查线段垂直平分线的尺规作图、全等三角形的性质与判定及菱形的判定, 熟练掌握线段垂直平分线的尺规作图、全等三角形的性质与判定及菱形的判定是解题的关键.

20. 某校积极落实“双减”政策, 将要开设拓展课程, 为让学生可以根据自己的兴趣爱好选择最喜欢的课程, 进行问卷调查, 问卷设置以下四种选项: A (综合模型)、 B (摄影艺术)、 C (音乐鉴赏)、 D (劳动实践), 随机抽取了部分学生进行调查, 每名学生必须且只能选择其中最最喜欢的一种课程, 并将调查结果整理绘制成如下不完整的统计图.

学生最喜欢的课程条形统计图



学生最喜欢的课程扇形统计图



根据以上信息, 解答下列问题:

- (1) 此次被调查的学生人数为_____名;
- (2) 直接在答题卡中补全条形统计图;
- (3) 求拓展课程 D (劳动实践) 所对应的扇形的圆心角的度数;
- (4) 根据抽样调查结果, 请你估计该校 800 名学生中, 有多少名学生最喜欢 C (音乐鉴赏) 拓展课程.

【答案】(1) 120 (2) 见解析

(3) 72°

(4) 320 名

【解析】

【分析】(1) 先求出 B 的人数, 再将各项人数相加即可.

(2) 见解析

(3) 根据 D 的百分比乘以圆心角即可.

(4) 求出 C 所占的百分比, 乘以 800.

【小问 1 详解】

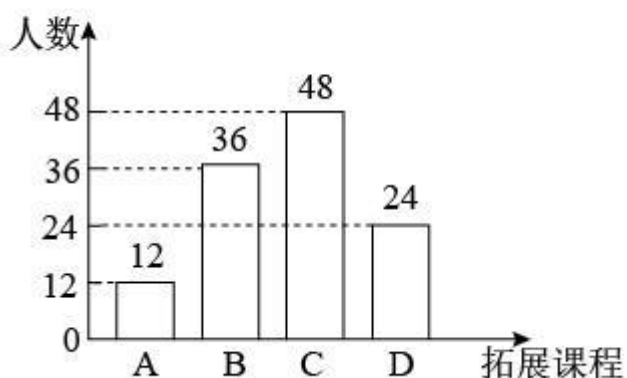
解: 根据扇形统计图中, B 是 A 的 3 倍

故喜欢 B 的学生数为 $3 \times 12 = 36$ (名)

统计调查的总人数有: $12 + 36 + 48 + 24 = 120$ (名).

【小问 2 详解】

学生最喜欢的课程条形统计图



【小问 3 详解】

由条形统计图可知:

D 的人数是 A 的 2 倍, 故 D 占总人数的 20%

所以 D 所占圆心角为 $20\% \times 360^\circ = 72^\circ$

答: 课程 D 所对应的扇形的圆心角的度数为 72° .

【小问 4 详解】

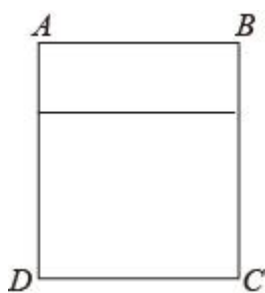
若有 800 名学生, 则喜欢 C 的学生数有:

$$\frac{48}{120} \times 800 = 320 \text{ (名)}$$

答: 有 320 名学生最喜欢 C 拓展课程.

【点睛】 本题考查扇形统计图与条形统计图相关内容, 注意从图中获取信息, 分析图中数据之间的数量关系是解题的关键.

21. 如图, 用一根长 60 厘米的铁丝制作一个“日”字型框架 $ABCD$, 铁丝恰好全部用完.



(1) 若所围成矩形框架 $ABCD$ 的面积为 144 平方厘米, 则 AB 的长为多少厘米?

(2) 矩形框架 $ABCD$ 面积最大值为_____平方厘米.

【答案】 (1) AB 的长为 8 厘米或 12 厘米.

(2) 150

【解析】

【分析】(1) 设 AB 的长为 x 厘米, 则有 $AD = \frac{60-3x}{2}$ 厘米, 然后根据题意可得方程 $\frac{60-3x}{2} \cdot x = 144$, 进而求解即可;

(2) 由 (1) 可设矩形框架 $ABCD$ 的面积为 S , 则有 $S = \frac{60-3x}{2} \cdot x = -\frac{3}{2}(x-10)^2 + 150$, 然后根据二次函数的性质可进行求解.

【小问 1 详解】

解: 设 AB 的长为 x 厘米, 则有 $AD = \frac{60-3x}{2}$ 厘米, 由题意得:

$$\frac{60-3x}{2} \cdot x = 144,$$

$$\text{整理得: } x^2 - 20x + 96 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = 8, x_2 = 12,$$

$$\therefore \frac{60-3x}{2} > 0,$$

$$\therefore 0 < x < 20,$$

$$\therefore x_1 = 8, x_2 = 12 \text{ 都符合题意,}$$

答: AB 的长为 8 厘米或 12 厘米.

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 可设矩形框架 $ABCD$ 的面积为 S 平方厘米, 则有:

$$S = \frac{60-3x}{2} \cdot x = -\frac{3}{2}x^2 + 30x = -\frac{3}{2}(x-10)^2 + 150,$$

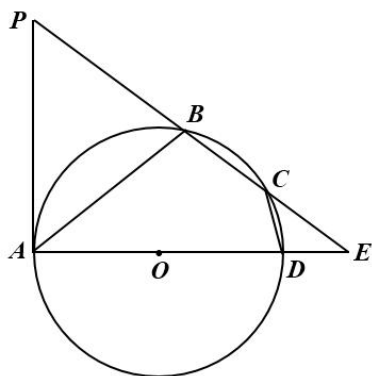
$$\therefore -\frac{3}{2} < 0, \text{ 且 } 0 < x < 20,$$

$$\therefore \text{当 } x = 10 \text{ 时, } S \text{ 有最大值, 即为 } S = 150;$$

故答案为: 150.

【点睛】本题主要考查一元二次方程及二次函数的应用, 解题的关键是找准题干中的等量关系.

22. 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于圆 O , AD 是圆 O 的直径, AD , BC 的延长线交于点 E , 延长 CB 交 PA 于点 P , $\angle BAP + \angle DCE = 90^\circ$.



(1) 求证: PA 是圆 O 的切线;

(2) 连接 AC , $\sin \angle BAC = \frac{1}{3}$, $BC = 2$, AD 的长为_____.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 6

【解析】

【分析】(1) 根据圆内接四边形的性质和 $\angle BAP + \angle DCE = 90^\circ$, 可得出 $\angle PAD = 90^\circ$, 再根据 AD 是圆 O 的直径, 由切线的判定可得证;

(2) 延长 DC 交 AB 的延长线于点 F , 由 AD 是圆 O 的直径, 可说明 $\triangle ACF$ 是直角三角形, 从而得到 $\sin \angle BAC = \frac{CF}{AF} = \frac{1}{3}$, 再证明 $\triangle FCB \sim \triangle FAD$, 得到 $\frac{CB}{AD} = \frac{CF}{AF}$, 代入数据即可得到答案.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于圆 O ,

$$\therefore \angle BAD = \angle DCE,$$

$$\therefore \angle BAP + \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAP + \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PAD = 90^\circ,$$

$$\therefore PA \perp AD,$$

$\therefore AD$ 是圆 O 的直径,

$\therefore PA$ 是圆 O 的切线.

【小问 2 详解】

解: 延长 DC 交 AB 的延长线于点 F ,

$\therefore AD$ 是圆 O 的直径,

$$\therefore \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACF = 180^\circ - \angle ACD = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ACF$ 是直角三角形,

$$\therefore \sin \angle BAC = \frac{CF}{AF},$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于圆 O ,

$$\therefore \angle FCB = \angle FAD,$$

又 $\because \angle F = \angle F$,

$$\therefore \triangle FCB \sim \triangle FAD,$$

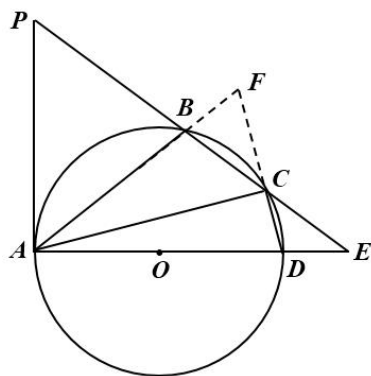
$$\therefore \frac{CB}{AD} = \frac{CF}{AF},$$

$$\because \sin \angle BAC = \frac{1}{3}, \quad BC = 2,$$

$$\therefore \frac{2}{AD} = \frac{CF}{AF} = \frac{1}{3},$$

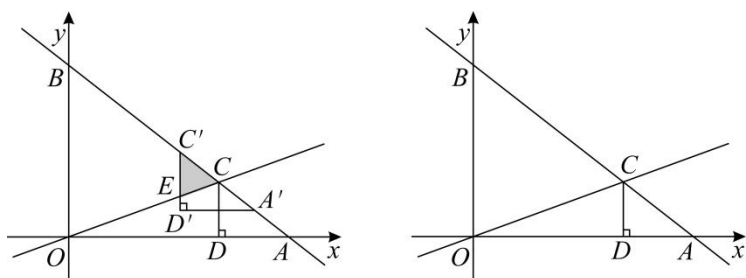
$$\therefore AD = 6.$$

故答案为: 6.



【点睛】本题考查了切线的判定，圆内接四边形的性质，圆周角定理推论，相似三角形的判定和性质，三角函数等知识．通过作辅助线构造相似三角形是解题的关键．

23. 如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y = kx + b$ 的图象与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 $B(0, 9)$ ，与直线 OC 交于点 $C(8, 3)$ ．



备用图

(1) 求直线 AB 的函数表达式;

(2) 过点 C 作 $CD \perp x$ 轴于点 D ，将 $\triangle ACD$ 沿射线 CB 平移得到的三角形记为 $\triangle A'C'D'$ ，点 A ， C ， D

的对应点分别为 A' , C' , D' , 若 $\triangle A'C'D'$ 与 $\triangle BOC$ 重叠部分的面积为 S , 平移的距离 $CC' = m$, 当点 A' 与点 B 重合时停止运动.

①若直线 $C'D'$ 交直线 OC 于点 E , 则线段 $C'E$ 的长为_____ (用含有 m 的代数式表示);

②当 $0 < m < \frac{10}{3}$ 时, S 与 m 的关系式为_____;

③当 $S = \frac{24}{5}$ 时, m 的值为_____.

【答案】(1) $y = -\frac{3}{4}x+9$;

(2) ① $\frac{9}{10}m$; ② $\frac{9}{25}m^2$; ③ $\frac{15-\sqrt{15}}{3}$ 或 $15-2\sqrt{5}$.

【解析】

【分析】(1) 将点 $B(0, 9)$, $C(8, 3)$ 的坐标代入直线解析式, 求解即可;

(2) ①过点 C 作 $CF \perp C'D'$, 易得 $\triangle CFC' \sim \triangle AOB$, 可用 m 表达 CF 和 $C'F$ 的长度, 进而可表达点 C' , D' 的坐标, 由点 C 的坐标可得出直线 OC 的解析式, 代入可得点 E 的坐标;

②根据题意可知, 当 $0 < m < \frac{10}{3}$ 时, 点 D' 未到直线 OC , 利用三角形面积公式可得出本题结果;

③分情况讨论, 分别求出当 $0 < m < \frac{10}{3}$ 时, 当 $\frac{10}{3} < m < 5$ 时, 当 $5 < m < 10$ 时, 当 $10 < m < 15$ 时, S 与 m 的关系式, 分别令 $S = \frac{24}{5}$, 建立方程, 求出 m 即可.

【小问1详解】

解: 将点 $B(0, 9)$, $C(8, 3)$ 的坐标代入直线 $y = kx+b$,

$$\therefore \begin{cases} b = 9 \\ 8k + b = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ b = 9 \end{cases}.$$

$\therefore$ 直线 AB 的函数表达式为: $y = -\frac{3}{4}x+9$;

【小问2详解】

①由 (1) 知直线 AB 的函数表达式为: $y = -\frac{3}{4}x+9$,

令 $y = 0$, 则 $x = 12$,

$\therefore A(12, 0)$,

$\therefore OA = 12$, $OB = 9$,

$$\therefore AB = 15;$$

如图 1, 过点 C 作 $CF \perp C'D'$ 于点 F ,

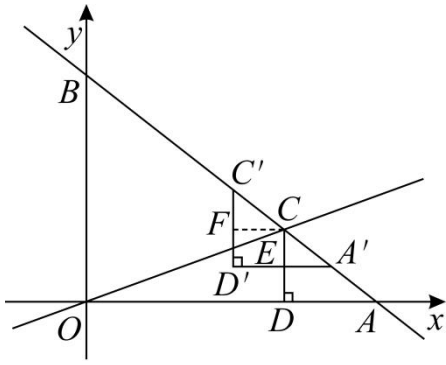


图 1

$$\therefore CF \parallel OA,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle FCC',$$

$$\therefore \angle C'FC = \angle BOA = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CFC' \sim \triangle AOB,$$

$$\therefore OB: OA: AB = C'F: CF: CC' = 9: 12: 15,$$

$$\therefore CC' = m,$$

$$\therefore CF = \frac{4}{5}m, \quad C'F = \frac{3}{5}m,$$

$$\therefore C' \left(8 - \frac{4}{5}m, 3 + \frac{3}{5}m\right), A' \left(12 - \frac{4}{5}m, \frac{3}{5}m\right), D' \left(8 - \frac{4}{5}m, \frac{3}{5}m\right),$$

$\therefore C(8, 3),$

∴ 直线 OC 的解析式为: $y = \frac{3}{8}x$,

$$\therefore E \left(8 - \frac{4}{5}m, 3 - \frac{3}{10}m \right) .$$

$$\therefore C'E = 3 + \frac{3}{5}m - (3 - \frac{3}{10}m) = \frac{9}{10}m.$$

故答案为: $\frac{9}{10}m$.

②当点 D' 落在直线 OC 上时, 有 $\frac{3}{5}m = \frac{3}{8} \left(8 - \frac{4}{5}m\right)$,

解得 $m = \frac{10}{3}$,

$\therefore$ 当 $0 < m < \frac{10}{3}$ 时, 点 D' 未到直线 OC ,

$$\text{此时 } S = \frac{1}{2} C'E \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} m \cdot \frac{4}{5} m = \frac{9}{25} m^2;$$

故答案为: $\frac{9}{25}m^2$.

③分情况讨论,

当 $0 < m < \frac{10}{3}$ 时, 由②可知, $S = \frac{9}{25}m^2$;

令 $S = \frac{9}{25}m^2 = \frac{24}{5}$, 解得 $m = \frac{2\sqrt{30}}{3} > \frac{10}{3}$ (舍) 或 $m = -\frac{2\sqrt{30}}{3}$ (舍);

当 $\frac{10}{3} \leq m < 5$ 时, 如图 2,

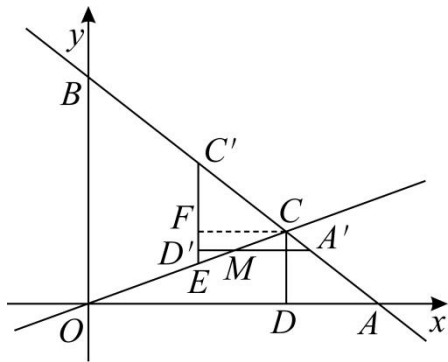


图2

设线段 $A'D'$ 与直线 OC 交于点 M ,

$$\therefore M \left(\frac{8}{5}m, \frac{3}{5}m \right),$$

$$\therefore D'E = \frac{3}{5}m - \left(3 - \frac{3}{10}m \right) = \frac{9}{10}m - 3,$$

$$D'M = \frac{8}{5}m - \left(8 - \frac{4}{5}m \right) = \frac{12}{5}m - 8;$$

$$\therefore S = \frac{9}{25}m^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9}{10}m - 3 \right) \cdot \left(\frac{12}{5}m - 8 \right)$$

$$= -\frac{18}{25}m^2 + \frac{36}{5}m - 12,$$

$$\text{令 } -\frac{18}{25}m^2 + \frac{36}{5}m - 12 = \frac{24}{5};$$

整理得, $3m^2 - 30m + 70 = 0$,

$$\text{解得 } m = \frac{15 - \sqrt{15}}{3} \text{ 或 } m = \frac{15 + \sqrt{15}}{3} > 5 \text{ (舍);}$$

当 $5 \leq m < 10$ 时, 如图 3,

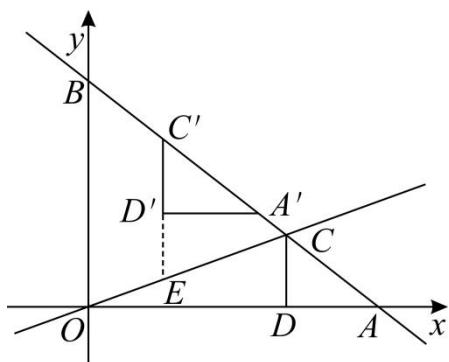


图3

$$S = S_{\triangle A'C'D'} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 \neq \frac{24}{5}, \text{ 不符合题意;}$$

当 $10 \leq m < 15$ 时, 如图 4,

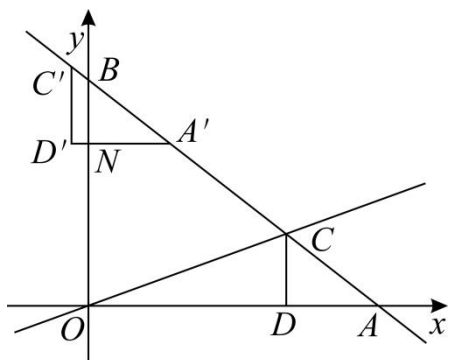


图4

此时 $A'B = 15 - m$,

$$\therefore BN = \frac{3}{5} (15 - m), \quad A'N = \frac{4}{5} (15 - m),$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} (15 - m) \cdot \frac{4}{5} (15 - m) = \frac{6}{25} (15 - m)^2,$$

$$\text{令 } \frac{6}{25} (15 - m)^2 = \frac{24}{5}, \text{ 解得 } m = 15 + 2\sqrt{5} > 15 \text{ (舍)} \text{ 或 } m = 15 - 2\sqrt{5}.$$

故答案为: $\frac{15 - \sqrt{15}}{3}$ 或 $15 - 2\sqrt{5}$.

【点睛】本题属于一次函数综合题, 涉及待定系数法求函数解析式、三角形的面积、相似三角形的性质与判定、一元二次方程、分类讨论思想等知识, 根据 $\triangle A'C'D'$ 的运动, 进行正确的分类讨论是解题关键.

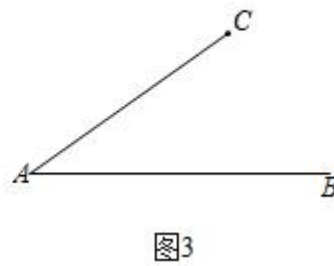
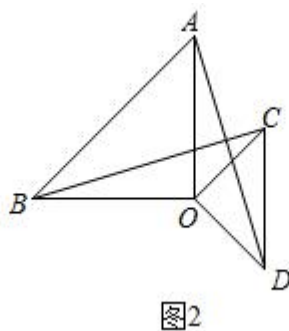
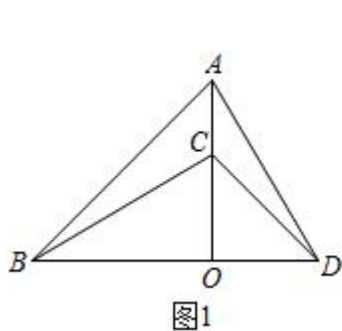
24. (1) 如图, $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 是等腰直角三角形, $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$, 点 C 在 OA 上, 点 D 在线段 BO 延长线上, 连接 AD , BC . 线段 AD 与 BC 的数量关系为_____;

(2) 如图 2, 将图 1 中的 $\triangle COD$ 绕点 O 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) 第一问的结论是否仍然成立; 如果成立, 证明你的结论, 若不成立, 说明理由.

(3) 如图, 若 $AB = 8$, 点 C 是线段 AB 外一动点, $AC = 3\sqrt{3}$, 连接 BC ,

①若将 CB 绕点 C 逆时针旋转 90° 得到 CD , 连接 AD , 则 AD 的最大值_____;

②若以 BC 为斜边作 $Rt\triangle BCD$, (B 、 C 、 D 三点按顺时针排列), $\angle CDB = 90^\circ$, 连接 AD , 当 $\angle CBD = \angle DAB = 30^\circ$ 时, 直接写出 AD 的值.



【答案】(1) $AD=BC$; (2) 结论仍成立, 理由见详解; (3) ① $3\sqrt{3} + \sqrt{37}$, ② $AD = 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{65}}{2}$.

【解析】

【分析】(1) 由题意易得 $AO = BO, OD = OC, \angle AOD = \angle BOC = 90^\circ$, 然后可证 $\triangle AOD \cong \triangle BOC$, 进而问题可求解;

(2) 由题意易得 $AO = BO, OD = OC$, 然后可证 $\triangle AOD \cong \triangle BOC$, 进而问题可求证;

(3) ①根据题意作出图形, 然后根据三角不等关系可得 $AC + CD \geq AD$, 则当 A 、 C 、 D 三点共线时取最大, 进而问题可求解; ②过点 C 作 $CE \perp AB$ 于点 E , 连接 DE , 过点 B 作 $BF \perp DE$ 于点 F , 然后可得点 C 、 D 、 B 、 E 四点共圆, 则有 $\angle DEB = \angle DCB = 60^\circ$, 设 $BC = 2x, BE = y$, 则 $AE = 8 - y, CD = x, BD = \sqrt{3}x$, 进而根据勾股定理可进行方程求解.

【详解】解: (1) $AD=BC$, 理由如下:

$\because \triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 是等腰直角三角形, $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$,

$\therefore AO = BO, OD = OC, \angle AOD = \angle BOC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle BOC$ (SAS),

$\therefore AD = BC$,

故答案为 $AD=BC$;

(2) 结论仍成立, 理由如下:

$\because \triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 是等腰直角三角形, $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$,

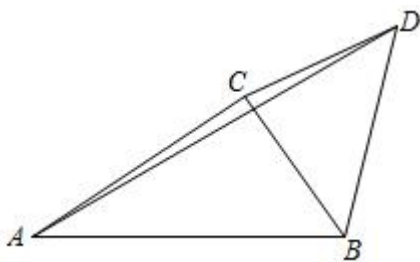
$\therefore AO = BO, OD = OC$,

$\therefore \angle AOC + \angle COD = \angle BOA + \angle AOC$, 即 $\angle AOD = \angle BOC$,

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle BOC$ (SAS),

$\therefore AD=BC$;

(3) ①如图,



由题意得: $BC = CD, \angle BCD = 90^\circ$,

根据三角不等关系可知: $AC + CD \geq AD$,

$\therefore$ 当 A, C, D 三点共线时取最大,

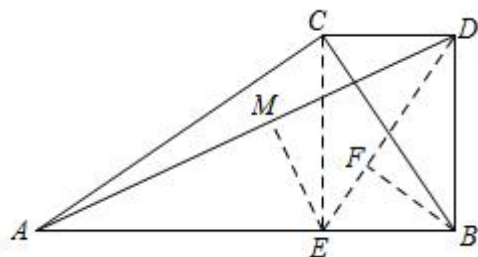
$\therefore \angle ACB = \angle BCD = 90^\circ$,

$\because AB = 8, AC = 3\sqrt{3}$,

$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{37}$,

$\therefore AD$ 的最大值为 $3\sqrt{3} + \sqrt{37}$;

②过点 C 作 $CE \perp AB$ 于点 E , 连接 DE , 过点 B 作 $BF \perp DE$ 于点 F , 如图所示:



$\therefore \angle AEB = \angle CDB = 90^\circ$,

$\therefore$ 点 C, D, B, E 四点共圆,

$\therefore \angle CBD = \angle DAB = 30^\circ$,

$\therefore \angle BCD = 60^\circ$,

$\therefore \angle DEB = \angle BCD = 60^\circ$,

$\therefore \angle ADE = \angle DEB - \angle DAB = 30^\circ, \angle EBF = 90^\circ - \angle DEB = 30^\circ$,

$\therefore \angle DAE = \angle ADE$,

$\therefore AE = DE$,

设 $BC = 2x, BE = y$, 则 $AE = 8 - y, CD = x, BD = \sqrt{3}x$,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}y, DE = AE = 8 - y,$$

$$\therefore DF = DE - EF = 8 - \frac{3}{2}y, \quad BF = \sqrt{BE^2 - EF^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}y,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AEC \text{ 和 Rt}\triangle BEC \text{ 中, 由勾股定理得: } 4x^2 - y^2 = 27 - (8 - y)^2, \text{ 整理得: } 4x^2 = 16y - 37 \text{ ①};$$

$$\text{在 Rt}\triangle BFD \text{ 中, 由勾股定理得: } \left(8 - \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 3x^2, \text{ 整理得: } 64 - 24y + 3y^2 = 3x^2 \text{ ②},$$

$$\text{联立①②得: } 12y^2 - 144y + 367 = 0,$$

$$\text{解得: } y_1 = 6 - \frac{\sqrt{195}}{6}, y_2 = 6 + \frac{\sqrt{195}}{6} \text{ (不符合题意, 舍去),}$$

$$\therefore AE = 8 - \left(6 - \frac{\sqrt{195}}{6}\right) = 2 + \frac{\sqrt{195}}{6},$$

过点 E 作 $EM \perp AD$ 于点 M ,

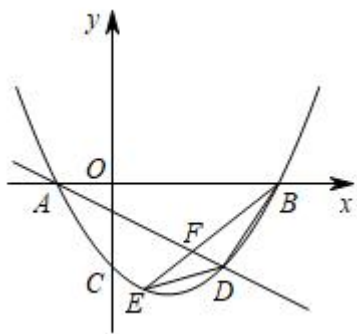
$$\therefore EM = \frac{1}{2}AE = 1 + \frac{\sqrt{195}}{12}, \quad AM = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore AM = \sqrt{3}EM = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{65}}{4},$$

$$\therefore AD = 2AE = 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{65}}{2}.$$

【点睛】 本题主要考查全等三角形的性质与判定、等腰直角三角形的性质、四点共圆及含 30 度直角三角形的性质, 熟练掌握全等三角形的性质与判定、等腰直角三角形的性质、四点共圆及含 30 度直角三角形的性质是解题的关键.

25. 如图, 平面直角坐标系中, O 是坐标原点, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 经过点 $B(6, 0)$ 和点 $D(4, -3)$ 与 x 轴另一个交点 A . 抛物线与 y 轴交于点 C , 作直线 AD .



(1) ①求抛物线的函数表达式

②并直接写出直线 AD 的函数表达式.

(2) 点 E 是直线 AD 下方抛物线上一点, 连接 BE 交 AD 于点 F , 连接 BD, DE , $\triangle BDF$ 的面积记为 S_1 , $\triangle DEF$ 的面积记为 S_2 , 当 $S_1 = 2S_2$ 时, 求点 E 的坐标;

(3) 点 G 为抛物线的顶点, 将抛物线图象中 x 轴下方部分沿 x 轴向上翻折, 与抛物线剩下部分组成新的曲线为 C_1 , 点 C 的对应点 C' , 点 G 的对应点 G' , 将曲线 C_1 沿 y 轴向下平移 n 个单位长度 ($0 < n < 6$). 曲线 C_1 与直线 BC 的公共点中, 选两个公共点作点 P 和点 Q , 若四边形 $C'G'QP$ 是平行四边形, 直接写出 P 的坐标.

【答案】(1) ① $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$; ② $y = -\frac{1}{2}x - 1$

(2) (2, -4) 或 (0, -3)

(3) $\left(1 - \sqrt{13}, \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}\right)$

【解析】

【分析】(1) ①利用待定系数解答, 即可求解; ②利用待定系数解答, 即可求解;

(2) 过点 E 作 $EG \perp x$ 轴交 AD 于点 G , 过点 B 作 $BH \perp x$ 轴交 AD 于点 H , 设点 $E\left(m, \frac{1}{4}m^2 - m - 3\right)$, 则点 $G\left(m, -\frac{1}{2}m - 1\right)$, 可得 $EG = -\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m + 2$, 然后根据 $\triangle EFG \sim \triangle BFH$, 即可求解;

(3) 先求出向上翻折部分的图象解析式为 $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$, 可得向上翻折部分平移后的函数解析式为 $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4 - n$, 平移后抛物线剩下部分的解析式为 $y = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 4 - n$, 分别求出直线 BC 和直线 $C'G'$ 的解析式为, 可得 $BC \parallel C'G'$, 再根据平行四边形的性质可得点 $Q\left(s+2, \frac{1}{2}s-2\right)$, 然后分三种情况讨论: 当点 P, Q 均在向上翻折部分平移后的图象上时; 当点 P 在向上翻折部分平移后的图象上, 点 Q 在平移后抛物线剩下部分的图象上时; 当点 P 在平移后抛物线剩下部分的图象上, 点 Q 在向上翻折部分平移后的图象上时, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: ①把点 $B(6, 0)$ 和点 $D(4, -3)$ 代入得:

$$\begin{cases} 36a+6b-3=0 \\ 16a+4b-3=-3 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=-1 \end{cases}$$

∴ 抛物线解析式为 $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$;

② 令 $y=0$, 则 $\frac{1}{4}x^2 - x - 3 = 0$,

解得: $x_1 = -2, x_2 = 6$,

∴ 点 $A(-2, 0)$,

设直线 AD 的解析式为 $y = kx + b_1 (k \neq 0)$,

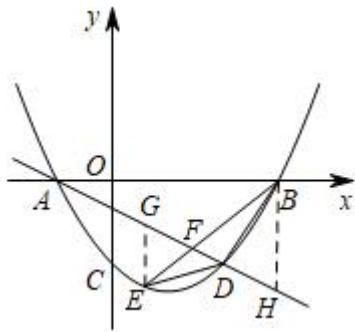
∴ 把点 $D(4, -3)$ 和点 $A(-2, 0)$ 代入得:

$$\begin{cases} 4k+b_1=-3 \\ -2k+b_1=0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k=-\frac{1}{2} \\ b_1=-1 \end{cases}$$

∴ 直线 AD 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x - 1$;

【小问 2 详解】

解: 如图, 过点 E 作 $EG \perp x$ 轴交 AD 于点 G , 过点 B 作 $BH \perp x$ 轴交 AD 于点 H ,



当 $x=6$ 时, $y = -\frac{1}{2} \times 6 - 1 = -4$,

∴ 点 $H(6, -4)$, 即 $BH=4$,

设点 $E\left(m, \frac{1}{4}m^2 - m - 3\right)$, 则点 $G\left(m, -\frac{1}{2}m - 1\right)$,

∴ $EG = \left(-\frac{1}{2}m - 1\right) - \left(\frac{1}{4}m^2 - m - 3\right) = -\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m + 2$,

∵ $\triangle BDF$ 的面积记为 S_1 , $\triangle DEF$ 的面积记为 S_2 , 且 $S_1 = 2S_2$,

∴ $BF=2EF$,

$\because EG \perp x, BH \perp x$ 轴,

$\therefore \triangle EFG \sim \triangle BFH$,

$$\therefore \frac{EG}{BH} = \frac{EF}{BF} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{-\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}m + 2}{4} = \frac{1}{2}, \text{ 解得: } m = 2 \text{ 或 } 0,$$

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(2, -4)$ 或 $(0, -3)$;

【小问 3 详解】

$$\text{解: } y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3 = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 4,$$

$\therefore$ 点 G 的坐标为 $(2, -4)$,

当 $x=0$ 时, $y=-3$, 即点 $C(0, -3)$,

$\therefore$ 点 $C'(0, 3), G'(2, 4)$,

$\therefore$ 向上翻折部分的图象解析式为 $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$,

$\therefore$ 向上翻折部分平移后的函数解析式为 $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4 - n$, 平移后抛物线剩下部分的解析式为

$$y = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 4 - n,$$

设直线 BC 的解析式为 $y = k_2x + b_2 (k_2 \neq 0)$,

把点 $B(6, 0), C(0, -3)$ 代入得:

$$\begin{cases} 6k_2 + b_2 = 0 \\ b_2 = -3 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k_2 = \frac{1}{2} \\ b_2 = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 3$,

同理直线 $C'G'$ 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x + 3$,

$\therefore BC \parallel C'G'$,

设点 P 的坐标为 $\left(s, \frac{1}{2}s - 3\right)$,

$\therefore$ 点 $C'(0, 3), G'(2, 4)$,

$\therefore$ 点 C' 向右平移 2 个单位, 再向上平移 1 个单位得到点 G' ,

$\therefore$ 四边形 $C'G'QP$ 是平行四边形,

$$\therefore \text{点 } Q\left(s+2, \frac{1}{2}s-2\right),$$

当点 P, Q 均在向上翻折部分平移后的图象上时,

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}(s-2)^2 + 4 - n = \frac{1}{2}s - 3 \\ -\frac{1}{4}(s+2-2)^2 + 4 - n = \frac{1}{2}s - 2 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} s=0 \\ n=6 \end{cases} \text{ (不合题意, 舍去),}$$

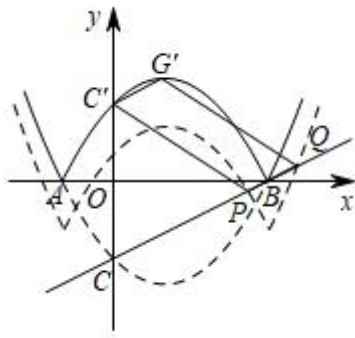
当点 P 在向上翻折部分平移后的图象上, 点 Q 在平移后抛物线剩下部分的图象上时,

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}(s-2)^2 + 4 - n = \frac{1}{2}s - 3 \\ \frac{1}{4}(s+2-2)^2 - 4 - n = \frac{1}{2}s - 2 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} s=1+\sqrt{17} \\ n=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} s=1-\sqrt{17} \\ n=0 \end{cases} \text{ (不合题意, 舍去),}$$

当点 P 在平移后抛物线剩下部分的图象上, 点 Q 在向上翻折部分平移后的图象上时,

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(s-2)^2 - 4 - n = \frac{1}{2}s - 3 \\ -\frac{1}{4}(s+2-2)^2 + 4 - n = \frac{1}{2}s - 2 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} s=1-\sqrt{13} \\ n=\sqrt{13} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} s=1+\sqrt{13} \\ n=-\sqrt{13} \end{cases} \text{ (不合题意, 舍去),}$$

综上所述, 点 P 的坐标为 $\left(1-\sqrt{13}, \frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right)$.



【点睛】 本题主要考查了二次函数的综合题, 熟练掌握二次函数的图象和性质, 平行四边形的性质, 相似三角形的判定和性质, 并利用数形结合思想解答是解题的关键.

