

2022 年辽宁省朝阳市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的）

1. 2022 的倒数是（ ）.

A. $\frac{1}{2022}$

B. $-\frac{1}{2022}$

C. 2022

D. -2022

【答案】A

【解析】

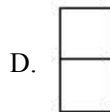
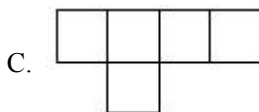
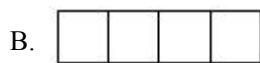
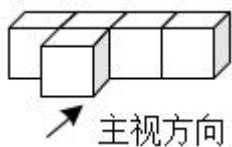
【分析】根据倒数的定义判断即可.

【详解】 $\because$ 2022 的倒数是 $\frac{1}{2022}$,

故选 A.

【点睛】本题考查了倒数即乘积为 1 的两个数互为倒数，熟练掌握倒数的定义是解题的关键.

2. 如图所示的几何体是由 5 个大小相同的小立方块搭成的，它的主视图是（ ）



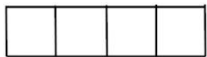
【答案】B

【解析】

【分析】根据主视图是从正面看到的图形判定则可.

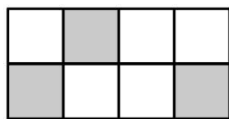
【详解】解：从正面看，只有一层，共有四个小正方形，.

故选：B.



【点睛】本题考查了简单组合体的三视图，从正面看得到的视图是主视图.

3. 如图所示的是由 8 个全等的小正方形组成的图案，假设可以随意在图中取一点，那么这个点取在阴影部分的概率是（ ）



A. $\frac{3}{8}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{5}{8}$

D. 1

【答案】A

【解析】

【分析】根据阴影部分的面积所占比例得出概率即可.

【详解】解: 由图知, 阴影部分的面积占图案面积的 $\frac{3}{8}$,
即这个点取在阴影部分的概率是 $\frac{3}{8}$,

故选: A.

【点睛】本题主要考查几何概率的知识, 熟练根据几何图形的面积得出概率是解题的关键.

4. 下列运算正确的是 ()

A. $a^8 \div a^4 = a^2$

B. $4a^5 - 3a^5 = 1$

C. $a^3 \cdot a^4 = a^7$

D. $(a^2)^4 = a^6$

【答案】C

【解析】

【分析】分别根据同底数幂的乘除法法则, 合并同类项的法则, 幂的乘方的运算法则, 逐一判断即可.

【详解】解: A. $a^8 \div a^4 = a^4$, 故本选项不合题意;

B. $4a^5 - 3a^5 = a^5$, 故本选项不合题意;

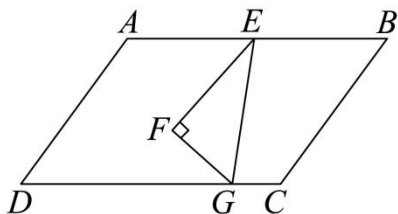
C. $a^3 \cdot a^4 = a^7$, 故本选项符合题意;

D. $(a^2)^4 = a^8$, 故本选项不合题意;

故选: C.

【点睛】本题考查了同底数幂的乘除法法则, 合并同类项的法则, 幂的乘方的运算法则, 解题的关键是熟记相关法则并灵活运用.

5. 将一个三角尺按如图所示的方式放置在一张平行四边形的纸片上, $\angle EFG = 90^\circ$, $\angle EGF = 60^\circ$, $\angle AEF = 50^\circ$, 则 $\angle EGC$ 的度数为 ()



A. 100°

B. 80°

C. 70°

D. 60°

【答案】B

【解析】

【分析】由平行四边形的性质可得 $AB \parallel DC$, 再根据三角形内角和定理, 即可得到 $\angle GEF$ 的度数, 依据平

行线的性质，即可得到 $\angle EGC$ 的度数.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel DC,$$

$$\therefore \angle AEG = \angle EGC,$$

$$\because \angle EFG = 90^\circ, \angle EGF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle GEF = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle GEA = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle EGC = 80^\circ.$$

故选：B.

【点睛】此题考查的是平行四边形的性质，掌握其性质定理是解决此题的关键.

6. 新冠肺炎疫情期间，学校要求学生每天早晨入校前在家测量体温，七年三班第二学习小组6名同学某天的体温（单位： $^\circ\text{C}$ ）记录如下：36.1, 36.2, 36.0, 36.0, 36.1, 36.1. 则这组数据的中位数和众数分别是（ ）

A. 36.0, 36.1

B. 36.1, 36.0

C. 36.2, 36.1

D. 36.1, 36.1

【答案】D

【解析】

【分析】将数据从小到大重新排列，再根据中位数和众数的定义求解即可.

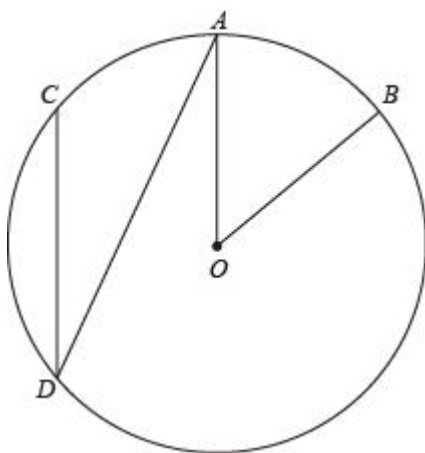
【详解】解：将这组数据重新排列为36.0, 36.0, 36.1, 36.1, 36.1, 36.2,

所以这组数据的中位数为 $\frac{36.1+36.1}{2} = 36.1$ ，众数为36.1，

故选：D.

【点睛】本题主要考查众数和中位数，解题的关键是掌握众数和中位数的定义.

7. 如图，在 $\odot O$ 中，点A是 $\widehat{BC}$ 的中点， $\angle ADC = 24^\circ$ ，则 $\angle AOB$ 的度数是（ ）



A. 24°

B. 26°

C. 48°

D. 66°

【答案】C

【解析】

【分析】直接利用圆周角求解.

【详解】解: $\because$ 点 A 是 $\widehat{BC}$ 的中点,

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{AB},$$

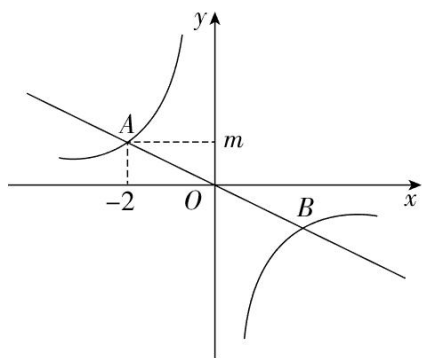
$$\therefore \angle AOB = 2\angle ADC = 2 \times 24^\circ = 48^\circ.$$

故选: C.

【点睛】本题考查了圆周角定理: 在同圆或等圆中, 同弧或等弧所对的圆周角相等, 都等于这条弧所对的圆心角的一半.

8. 如图, 正比例函数 $y = ax$ (a 为常数, 且 $a \neq 0$) 和反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, 且 $k \neq 0$) 的图象相交于

$A(-2, m)$ 和 B 两点, 则不等式 $ax > \frac{k}{x}$ 的解集为 ()

A. $x < -2$ 或 $x > 2$ B. $-2 < x < 2$ C. $-2 < x < 0$ 或 $x > 2$ D. $x < -2$ 或 $0 < x < 2$

【答案】D

【解析】

【分析】根据关于原点对称的点的坐标特征求得 $B(2, -m)$, 然后根据函数的图象的交点坐标即可得到结论.

【详解】解: $\because$ 正比例函数 $y = ax$ (a 为常数, 且 $a \neq 0$) 和反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, 且 $k \neq 0$) 的图象相交于 $A(-2, m)$ 和 B 两点,

$$\therefore B(2, -m),$$

$$\therefore \text{不等式 } ax > \frac{k}{x} \text{ 的解集为 } x < -2 \text{ 或 } 0 < x < 2,$$

故选: D.

【点睛】此题考查了反比例函数与一次函数的交点问题, 关键是注意掌握数形结合思想的应用.

9. 八年一班学生周末乘车去红色教育基地参观学习, 基地距学校 60km, 一部分学生乘慢车先行, 出发 30min 后, 另一部分学生乘快车前往, 结果同时到达. 已知快车的速度是慢车速度的 1.5 倍, 求慢车的速度. 设慢车每小时行驶 x km, 根据题意, 所列方程正确的是 ()

A. $\frac{60}{x} - \frac{60}{1.5x} = \frac{30}{60}$

B. $\frac{60}{1.5x} - \frac{60}{x} = \frac{30}{60}$

C. $\frac{60}{x} - \frac{60}{1.5x} = 30$

D. $\frac{60}{1.5x} - \frac{60}{x} = 30$

【答案】A

【解析】

【分析】设慢车每小时行驶 x km, 则快车每小时行驶 $1.5x$ km, 根据基地距学校 60km, 一部分学生乘慢车先行, 出发 30min 后, 另一部分学生乘快车前往, 结果同时到达, 列方程即可.

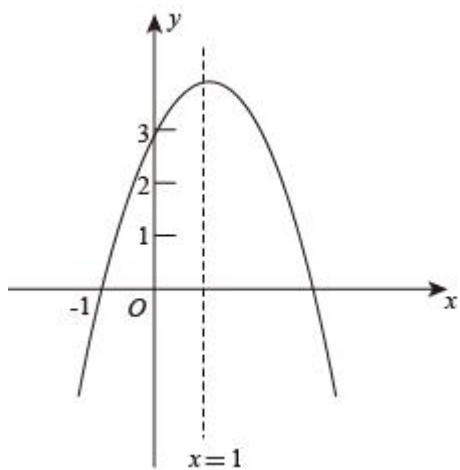
【详解】解: 设慢车每小时行驶 x km, 则快车每小时行驶 $1.5x$ km,

根据题意可得: $\frac{60}{x} - \frac{60}{1.5x} = \frac{30}{60}$.

故选: A.

【点睛】本题考查了由实际问题抽象出分式方程, 详解本题的关键是读懂题意, 找出合适的等量关系, 列方程.

10. 如图, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a 为常数, 且 $a \neq 0$) 的图象过点 $(-1, 0)$, 对称轴为直线 $x = 1$, 且 $2 < c < 3$, 则下列结论正确的是 ()



A. $abc > 0$

B. $3a + c > 0$

C. $a^2m^2 + abm \leq a^2 + ab$ (m 为任意实数)

D. $-1 < a < -\frac{2}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次函数的图象与系数的关系即可求出答案.

【详解】解: A. 抛物线的对称轴在 y 轴右侧, 则 $ab < 0$, 而 $c > 0$,

故 $abc < 0$, 不正确, 不符合题意;

B. 函数的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = 1$, 则 $b = -2a$,

$\therefore$ 从图象看, 当 $x = -1$ 时, $y = a - b + c = 3a + c = 0$,

故不正确, 不符合题意;

C. $\therefore$ 当 $x = 1$ 时, 函数有最大值为 $y = a + b + c$,

$\therefore am^2 + bm + c \leq a + b + c$ (m 为任意实数),

$\therefore am^2 + bm \leq a + b$,

$\therefore a < 0$,

$\therefore a^2m^2 + abm \geq a^2 + ab$ (m 为任意实数)

故不正确, 不符合题意;

D. $\therefore -\frac{b}{2a} = 1$, 故 $b = -2a$,

$\therefore x = -1$, $y = 0$, 故 $a - b + c = 0$,

$\therefore c = -3a$,

$\therefore 2 < c < 3$,

$\therefore 2 < -3a < 3$,

$\therefore -1 < a < -\frac{2}{3}$, 故正确, 符合题意;

故选: D.

【点睛】本题考查二次函数的图象与性质, 解题的关键是熟练运用图象与系数的关系, 本题属于中等题型.

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 只需要将结果直接填写在横线上, 不必写出解答过程)

11. 光在真空中 $1s$ 传播 $299792km$. 数据 299792 用科学记数法表示为_____.

【答案】 2.99792×10^5

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时, n 是正整数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负整数.

【详解】解: 数据 299792 用科学记数法表示为 2.99792×10^5 .

故答案为: 2.99792×10^5 .

【点睛】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整

数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

12. 甲、乙、丙、丁四名同学参加掷实心球测试, 每人掷 5 次, 他们的平均成绩恰好相同, 方差分别是 $s_{\text{甲}}^2 = 0.55$, $s_{\text{乙}}^2 = 0.56$, $s_{\text{丙}}^2 = 0.52$, $s_{\text{丁}}^2 = 0.48$, 则这四名同学掷实心球的成绩最稳定的是_____.

【答案】丁

【解析】

【分析】利用方差的意义可得答案.

【详解】解: $\because s_{\text{甲}}^2 = 0.55$, $s_{\text{乙}}^2 = 0.56$, $s_{\text{丙}}^2 = 0.52$, $s_{\text{丁}}^2 = 0.48$,

$$\therefore s_{\text{丁}}^2 < s_{\text{丙}}^2 < s_{\text{甲}}^2 < s_{\text{乙}}^2,$$

$\therefore$ 这四名同学掷实心球的成绩最稳定的是丁,

故答案为: 丁.

【点睛】本题主要考查方差, 方差是反映一组数据的波动大小的一个量. 方差越大, 则平均值的离散程度越大, 稳定性也越差; 反之, 则它与其平均值的离散程度越小, 稳定性越好.

13. 计算: $\sqrt{63} \div \sqrt{7} - |-4| =$ _____.

【答案】-1

【解析】

【分析】先计算除法, 化简绝对值, 再计算, 即可求解.

【详解】解: $\sqrt{63} \div \sqrt{7} - |-4|$

$$= \sqrt{9} - 4$$

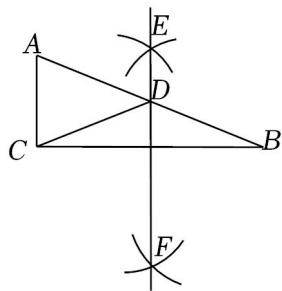
$$= 3 - 4$$

$$= -1$$

故答案为: -1

【点睛】本题主要考查了二次根式的混合运算, 熟练掌握二次根式的混合运算是解题的关键.

14. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 13$, $BC = 12$, 分别以点 B 和点 C 为圆心、大于 $\frac{1}{2}BC$ 的长为半径作弧, 两弧相交于 E, F 两点, 作直线 EF 交 AB 于点 D , 连接 CD , 则 $\triangle ACD$ 的周长是_____.



【答案】18

【解析】

【分析】由题可知， EF 为线段 BC 的垂直平分线，则 $CD = BD$ ，由勾股定理可得 $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 5$ ，则 $\triangle ACD$ 的周长为 $AC + AD + CD = AC + AD + BD = AC + AB$ ，即可得出答案.

【详解】解：由题可知， EF 为线段 BC 的垂直平分线，

$$\therefore CD = BD,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, AB = 13, BC = 12,$$

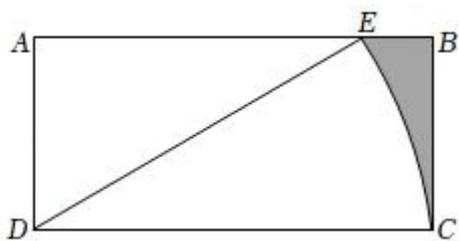
$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 5,$$

$$\therefore \triangle ACD \text{ 的周长为 } AC + AD + CD = AC + AD + BD = AC + AB = 5 + 13 = 18.$$

故答案为：18.

【点睛】本题考查尺规作图、线段垂直平分线的性质、勾股定理，熟练掌握线段垂直平分线的性质及勾股定理是详解本题的关键.

15. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AD = 2\sqrt{3}$ ， $DC = 4\sqrt{3}$ ，将线段 DC 绕点 D 按逆时针方向旋转，当点 C 的对应点 E 恰好落在边 AB 上时，图中阴影部分的面积是_____.



【答案】 $24 - 6\sqrt{3} - 4\pi$

【解析】

【分析】由旋转的性质可得 $DE = DC = 4\sqrt{3}$ ，由锐角三角函数可求 $\angle ADE = 60^\circ$ ，由勾股定理可求 AE 的长，分别求出扇形 EDC 和四边形 $DCBE$ 的面积，即可求解.

【详解】解： $\because$ 将线段 DC 绕点 D 按逆时针方向旋转，

$$\therefore DE = DC = 4\sqrt{3},$$

$$\because \cos \angle ADE = \frac{AD}{DE} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle ADE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EDC = 30^\circ,$$

$$\therefore S_{\text{扇形} EDC} = \frac{30 \times \pi \times 48}{360} = 4\pi,$$

$$\therefore AE = \sqrt{DE^2 - AD^2} = \sqrt{48 - 12} = 6,$$

$$\therefore BE = AB - AE = 4\sqrt{3} - 6,$$

$$\therefore S_{\text{四边形} DCBE} = \frac{(4\sqrt{3} - 6 + 4\sqrt{3}) \times 2\sqrt{3}}{2} = 24 - 6\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{阴影部分的面积} = 24 - 6\sqrt{3} - 4\pi,$$

故答案为: $24 - 6\sqrt{3} - 4\pi$.

【点睛】 本题考查了旋转的性质，锐角三角函数，矩形的性质，扇形的面积公式等知识，灵活运用这些性质解决问题是解题的关键.

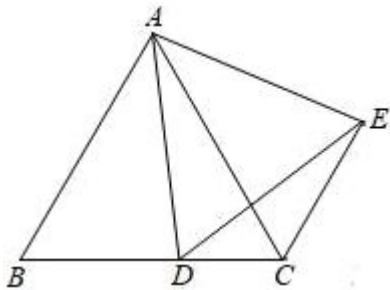
16. 等边三角形 ABC 中, D 是边 BC 上的一点, $BD = 2CD$, 以 AD 为边作等边三角形 ADE , 连接 CE . 若 $CE = 2$, 则等边三角形 ABC 的边长为_____.

【答案】 3 或 $\frac{6\sqrt{13}}{13}$.

【解析】

【分析】 分两种情况, 先证明 $\triangle CAE \cong \triangle BAD$ (SAS), 再根据全等三角形的性质即可得出答案.

【详解】 解: 如图, E 点在 AD 的右边,



$\therefore \triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 都是等边三角形,

$$\therefore AC = AB, \quad AE = AD, \quad \angle DAE = \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE - \angle CAD = \angle BAC - \angle CAD,$$

即 $\angle CAE = \angle BAD$.

在 $\triangle CAE$ 和 $\triangle BAD$ 中,

$$\begin{cases} AC = AB \\ \angle CAE = \angle BAD \\ AE = AD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle CAE \cong \triangle BAD \text{ (SAS)},$$

$$\therefore CE = BD = 2,$$

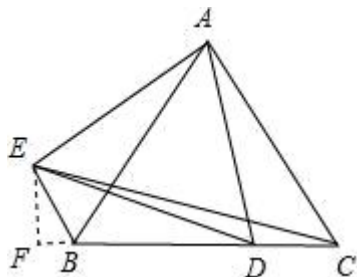
$$\because BD = 2CD,$$

$$\therefore CD = 1,$$

$$\therefore BC = BD + CD = 2 + 1 = 3,$$

$\therefore$ 等边三角形 ABC 的边长为 3,

如图, E 点在 AD 的左边,



同上, $\triangle BAE \cong \triangle CAD$ (SAS),

$$\therefore BE = CD, \angle ABE = \angle ACD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EBD = 120^\circ,$$

过点 E 作 $EF \perp BC$ 交 CB 的延长线于点 F , 则 $\angle EBF = 60^\circ$,

$$\therefore EF = \frac{\sqrt{3}}{2} BE = \frac{\sqrt{3}}{2} CD, \quad BF = \frac{1}{2} BE = \frac{1}{2} CD,$$

$$\therefore CF = BF + BD + CD = \frac{7}{2} CD,$$

在 $\text{Rt}\triangle EFC$ 中, $CE = 2$,

$$\therefore EF^2 + CF^2 = CE^2 = 4,$$

$$\therefore \left(\frac{\sqrt{3}}{2} CD\right)^2 + \left(\frac{7}{2} CD\right)^2 = 4,$$

$$\therefore CD = \frac{2\sqrt{13}}{13} \text{ 或 } CD = -\frac{2\sqrt{13}}{13} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore BC = \frac{6\sqrt{13}}{13},$$

$\therefore$ 等边三角形 ABC 的边长为 $\frac{6\sqrt{13}}{13}$,

故答案为: 3 或 $\frac{6\sqrt{13}}{13}$.

【点睛】本题考查了全等三角形的判定与性质，熟练掌握等边三角形的性质，证明 $\triangle CAE \cong \triangle BAD$ 是解题的关键.

三、解答题（本大题共 9 小题，解答应写出必要的步骤、文字说明或证明过程）

17. 先化简，简求值： $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4} \div \frac{x+3}{x^2-2x} + \frac{x}{x+3}$ ，其中 $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

【答案】 $x, 4$

【解析】

【分析】把除化为乘，再算同分母的分式相加，化简后求出 x 的值，代入即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解：} & \frac{x^2-4}{x^2-4x+4} \div \frac{x+3}{x^2-2x} + \frac{x}{x+3} \\ &= \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2} \times \frac{x(x-2)}{x+3} + \frac{x}{x+3} \\ &= \frac{x^2+2x}{x+3} + \frac{x}{x+3} \\ &= \frac{x(x+3)}{x+3} \\ &= x \end{aligned}$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4,$$

当 $x = 4$ 时，原式 = 4

【点睛】本题考查分式的化简求值，负整数指数幂，解题的关键是掌握分式的基本性质，把所求式子化简.

18. 某中学要为体育社团购买一些篮球和排球，若购买 3 个篮球和 2 个排球，共需 560 元；若购买 2 个篮球和 4 个排球，共需 640 元.

- (1) 求每个篮球和每个排球的价格分别是多少元；
- (2) 该中学决定购买篮球和排球共 10 个，总费用不超过 1100 元，那么最多可以购买多少个篮球？

【答案】 (1) 每个篮球的价格是 120 元，每个排球的价格是 100 元

(2) 5

【解析】

【分析】(1) 设每个篮球的价格是 x 元，每个排球的价格是 y 元，根据“购买 3 个篮球和 2 个排球，共需 560 元；若购买 2 个篮球和 4 个排球，共需 640 元.” 列出方程组，即可求解；

(2) 设购买 m 个篮球，则购买排球 $(10-m)$ 根据“总费用不超过 1100 元，” 列出不等式，即可求解.

【小问 1 详解】

解: 设每个篮球的价格是 x 元, 每个排球的价格是 y 元, 根据题意得:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 560 \\ 2x + 4y = 640 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = 120 \\ y = 100 \end{cases},$$

答: 每个篮球的价格是 120 元, 每个排球的价格是 100 元;

【小问 2 详解】

解: 设购买 m 个篮球, 则购买排球 $(10-m)$ 根据题意得:

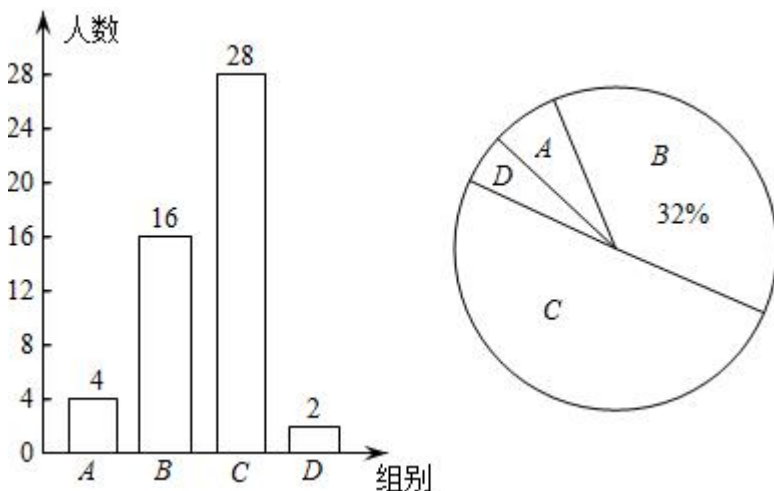
$$120m + 100(10-m) \leq 1100,$$

解得 $m \leq 5$,

答: 最多可以购买 5 个篮球.

【点睛】 本题考查二元一次方程组 and 一元一次不等式的应用, 解题的关键是读懂题意, 列出方程组和不等式.

19. 为了解学生的睡眠情况, 某校随机抽取部分学生对他们最近两周的睡眠情况进行调查, 得到他们每日平均睡眠时长 x (单位: h) 的一组数据, 将所得数据分为四组 ($A: x < 8$; $B: 8 \leq x < 9$; $C: 9 \leq x < 10$; $D: x \geq 10$), 并绘制成如下两幅不完整的统计图.



根据以上信息, 解答下列问题:

- (1) 本次一共抽样调查了_____名学生.
- (2) 求出扇形统计图中 D 组所对应的扇形圆心角的度数.
- (3) 将条形统计图补充完整.
- (4) 若该校共有 1200 名学生, 请估计最近两周有多少名学生的每日平均睡眠时长大于或等于 9h.

【答案】 (1) 50 (2) 14.4°

(3) 答案见解析 (4) 720

【解析】

【分析】(1) 由 B 组人数及其所占百分比求出总人数;

(2) 用 360° 乘以 D 组人数所占比例即可;

(3) 根据总人数求出 A 组人数, 从而补全图形;

(4) 用总人数乘以睡眠时长大于或等于 9h 人数所占比例即可.

【小问 1 详解】

解: 本次调查的学生人数为 $16 \div 32\% = 50$ (名),

故答案为: 50;

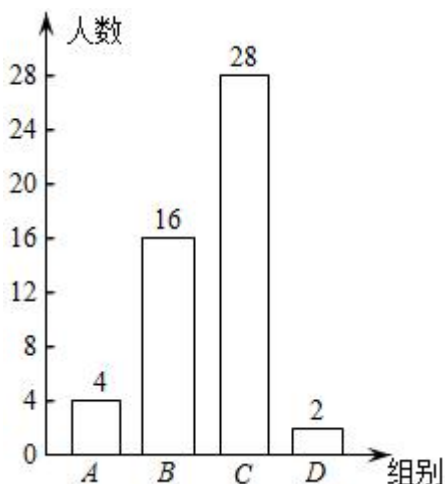
【小问 2 详解】

解: 表示 D 组的扇形圆心角的度数为 $360^\circ \times \frac{2}{50} = 14.4^\circ$;

【小问 3 详解】

解: A 组人数为 $50 - (16 + 28 + 2) = 4$ (名),

补全图形如下:



【小问 4 详解】

解: $1200 \times \frac{28+2}{50} = 720$ (名).

答: 估计该校最近两周有 720 名学生的每日平均睡眠时长大于或等于 9h.

【点睛】本题考查条形统计图、扇形统计图, 理解两个统计图中数量之间的关系是正确计算的前提.

20. 某社区组织 A, B, C, D 四个小区的居民进行核酸检测, 有很多志愿者参与此项检测工作, 志愿者王明和李丽分别被随机安排到这四个小区中的一个小区组织居民排队等候.

(1) 王明被安排到 A 小区进行服务的概率是_____.

(2) 请用列表法或画树状图法求出王明和李丽被安排到同一个小区工作的概率.

【答案】(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】(1) 根据概率公式求解即可；

(2) 列表得出所有等可能结果，从中找到符合条件的结果数，再根据概率公式求解即可.

【小问 1 详解】

解：王明被安排到 A 小区进行服务的概率是 $\frac{1}{4}$ ，

故答案为： $\frac{1}{4}$ ；

【小问 2 详解】

列表如下： A, B, C, D 表示四个小区，

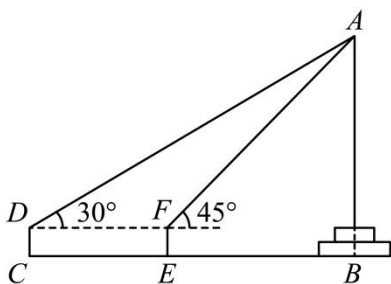
	A	B	C	D
A	(A, A)	(B, A)	(C, A)	(D, A)
B	(A, B)	(B, B)	(C, B)	(D, B)
C	(A, C)	(B, C)	(C, C)	(D, C)
D	(A, D)	(B, D)	(C, D)	(D, D)

由表知，共有 16 种等可能结果，其中王明和李丽被安排到同一个小区工作的有 4 种结果，

所以王明和李丽被安排到同一个小区工作的概率为 $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

【点睛】此题考查的是用列表法或树状图法求概率. 列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件. 用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比.

21. 某数学兴趣小组准备测量校园内旗杆顶端到地面的高度（旗杆底端有台阶）. 该小组在 C 处安置测角仪 CD ，测得旗杆顶端 A 的仰角为 30° ，前进 8m 到达 E 处，安置测角仪 EF ，测得旗杆顶端 A 的仰角为 45° （点 B, E, C 在同一直线上），测角仪支架高 $CD = EF = 1.2\text{m}$ ，求旗杆顶端 A 到地面的距离即 AB 的长度.（结果精确到 1m. 参考数据： $\sqrt{3} \approx 1.7$ ）

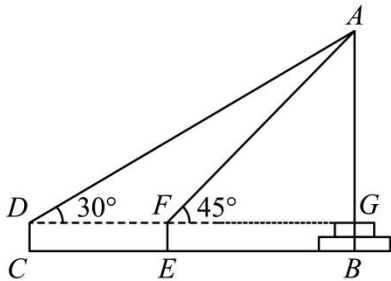


【答案】旗杆顶端 A 到地面的距离即 AB 的长度约为 12m

【解析】

【分析】延长 DF 交 AB 于点 G ，根据题意可得： $DF = CE = 8\text{m}$ ， $DC = EF = BG = 1.2\text{m}$ ， $\angle AGF = 90^\circ$ ，然后设 $AG = x\text{m}$ ，在 $\text{Rt}\triangle AFG$ 中，利用锐角三角函数的定义求出 FG 的长，从而求出 DG 的长，再在 $\text{Rt}\triangle ADG$ 中，利用锐角三角函数的定义列出关于 x 的方程，进行计算即可详解。

【详解】解：延长 DF 交 AB 于点 G ,



由题意得:

$$DF = CE = 8\text{m}, \quad DC = EF = BG = 1.2\text{m}, \quad \angle AGF = 90^\circ,$$

设 $AG = xm$,

在 $\text{Rt}\triangle AFG$ 中, $\angle AFG = 45^\circ$,

$$\therefore FG = \frac{AG}{\tan 45^\circ} = x \text{ (m)},$$

$$\therefore DG = DF + FG = (x+8) \text{ m,}$$

在 $\text{Rt}\triangle ADG$ 中, $\angle ADG = 30^\circ$,

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{AG}{DG} = \frac{x}{x+8} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore x = 4\sqrt{3} + 4,$$

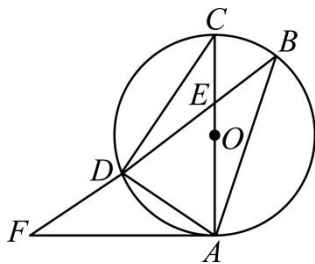
经检验: $x = 4\sqrt{3} + 4$ 是原方程的根,

$$\therefore AB = AG + BG \approx 12 \text{ (m)},$$

∴ 旗杆顶端 A 到地面的距离即 AB 的长度约为 12m.

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用－仰角俯角问题，根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键.

22. 如图, AC 是 $\odot O$ 的直径, 弦 BD 交 AC 于点 E , 点 F 为 BD 延长线上一点, $\angle DAF = \angle B$.



(1) 求证: AF 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 5, AD 是 $\triangle AEF$ 的中线, 且 $AD = 6$, 求 AE 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{36}{5}$

【解析】

【分析】(1) 由圆周角定理得 $\angle ADC = 90^\circ$, 则 $\angle ACD + \angle DAC = 90^\circ$, 从而说明 $OA \perp AF$, 即可证明结论;

(2) 作 $DH \perp AC$ 于点 H , 利用 $\triangle ADH \sim \triangle ACD$, $\frac{AD}{AC} = \frac{AH}{AD}$, 求出 AH 的长, 再利用直角三角形斜边上中线的性质得出 $AD = DE$, 利用等腰三角形的性质可得答案.

【小问 1 详解】

证明: $\because AC$ 是直径,

$\therefore \angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACD + \angle DAC = 90^\circ$,

$\because \angle ACD = \angle B$, $\angle B = \angle DAF$,

$\therefore \angle DAF = \angle ACD$,

$\therefore \angle DAF + \angle DAC = 90^\circ$,

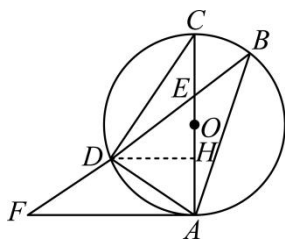
$\therefore OA \perp AF$,

$\because AC$ 是直径,

$\therefore AF$ 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

解: 作 $DH \perp AC$ 于点 H ,



$\because \odot O$ 的半径为 5,

$\therefore AC = 10$,

$$\because \angle AHD = \angle ADC = 90^\circ, \quad \angle DAH = \angle CAD,$$

$$\therefore \triangle ADH \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AH}{AD},$$

$$\therefore AD^2 = AH \cdot AC,$$

$$\because AD = 6,$$

$$\therefore AH = \frac{36}{10} = \frac{18}{5},$$

$$\because AD \text{ 是 } \triangle AEF \text{ 的中线, } \angle EAF = 90^\circ,$$

$$\therefore AD = ED,$$

$$AE = 2AH = \frac{36}{5}.$$

【点睛】本题主要考查了圆周角定理，切线的判定定理，相似三角形的判定与性质，等腰三角形的性质等知识，根据相似三角形的判定与性质求出 AH 的长是解题的关键.

23. 某商店购进了一种消毒用品，进价为每件 8 元，在销售过程中发现，每天的销售量 y (件) 与每件售价 x (元) 之间存在一次函数关系 (其中 $8 \leq x \leq 15$ ，且 x 为整数). 当每件消毒用品售价为 9 元时，每天的销售量为 105 件；当每件消毒用品售价为 11 元时，每天的销售量为 95 件.

- (1) 求 y 与 x 之间的函数关系式.
- (2) 若该商店销售这种消毒用品每天获得 425 元的利润，则每件消毒用品的售价为多少元?
- (3) 设该商店销售这种消毒用品每天获利 w (元)，当每件消毒用品的售价为多少元时，每天的销售利润最大？最大利润是多少元？

【答案】(1) $y = -5x + 150$

(2) 13 (3) 每件消毒用品的售价为 15 元时，每天的销售利润最大，最大利润是 525 元.

【解析】

【分析】(1) 根据给定的数据，利用待定系数法即可求出 y 与 x 之间的函数关系式；

(2) 根据每件的销售利润 $\times$ 每天的销售量 = 425，解一元二次方程即可；

(3) 利用销售该消毒用品每天的销售利润 = 每件的销售利润 $\times$ 每天的销售量，即可得出 w 关于 x 的函数关系式，再利用二次函数的性质即可解决最值问题.

【小问 1 详解】

解：设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$)，根据题意得：

$$\begin{cases} 9k + b = 105 \\ 11k + b = 95 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = -5 \\ b = 150 \end{cases},$$

$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式为 $y = -5x + 150$;

【小问 2 详解】

解: $(-5x+150)(x-8) = 425$,

整理得: $x^2 - 38x + 345 = 0$,

解得: $x_1 = 13, x_2 = 25$,

$\therefore 8 \leq x \leq 15$,

$\therefore$ 若该商店销售这种消毒用品每天获得 425 元的利润, 则每件消毒用品的售价为 13 元;

【小问 3 详解】

解: 根据题意得: $w = y(x-8) = (-5x+150)(x-8)$

$$= -5x^2 + 190x - 1200$$

$$= -5(x-19)^2 + 605$$

$\therefore 8 \leq x \leq 15$, 且 x 为整数,

当 $x < 19$ 时, w 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x=15$ 时, w 有最大值, 最大值为 525.

答: 每件消毒用品的售价为 15 元时, 每天的销售利润最大, 最大利润是 525 元.

【点睛】本题考查了待定系数法求一次函数解析式以及二次函数的应用, 解题的关键是找准题目的等量关系,

24. 【思维探究】如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle BCD = 120^\circ$, $AB = AD$, 连接 AC . 求证:

$BC + CD = AC$.

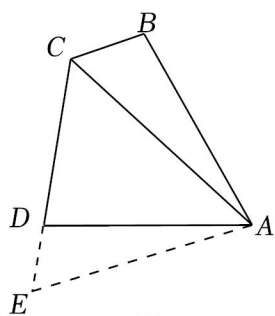


图1

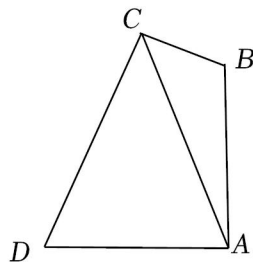


图2

(1) 小明的思路是: 延长 CD 到点 E , 使 $DE = BC$, 连接 AE . 根据 $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$, 推得 $\angle B + \angle ADC = 180^\circ$, 从而得到 $\angle B = \angle ADE$, 然后证明 $\triangle ADE \cong \triangle ABC$, 从而可证 $BC + CD = AC$, 请你帮助小明写出完整的证明过程.

(2) 【思维延伸】如图 2, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$, $AB = AD$, 连接 AC , 猜想 BC , CD ,

AC 之间的数量关系, 并说明理由.

(3) 【思维拓展】在四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$, $AB = AD = \sqrt{6}$, AC 与 BD 相交于点 O . 若四边形 $ABCD$ 中有一个内角是 75° , 请直接写出线段 OD 的长.

【答案】(1) $AC=BC+CD$; 理由见详解;

(2) $CB+CD=\sqrt{2}AC$; 理由见详解;

(3) $3\sqrt{3}-3$ 或 $3-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 如图 1 中, 延长 CD 到点 E , 使 $DE=BC$, 连接 AE . 证明 $\triangle ADE \cong \triangle ABC$ (SAS), 推出 $\angle DAE = \angle BAC$, $AE=AC$, 推出 $\triangle ACE$ 的等边三角形, 可得结论;

(2) 结论: $CB+CD=\sqrt{2}AC$. 如图 2 中, 过点 A 作 $AM \perp CD$ 于点 M , $AN \perp CB$ 交 CB 的延长线于点 N . 证明 $\triangle AMD \cong \triangle ANB$ (AAS), 推出 $DM=BN$, $AM=AN$, 证明 $Rt\triangle ACM \cong Rt\triangle ACN$ (HL), 推出 $CM=CN$, 可得结论;

(3) 分两种情形: 如图 3-1 中, 当 $\angle CDA=75^\circ$ 时, 过点 O 作 $OP \perp CB$ 于点 P , $CQ \perp CD$ 于点 Q . 如图 3-2 中, 当 $\angle CBD=75^\circ$ 时, 分别求解即可.

【小问 1 详解】

证明: 如图 1 中, 延长 CD 到点 E , 使 $DE=BC$, 连接 AE .

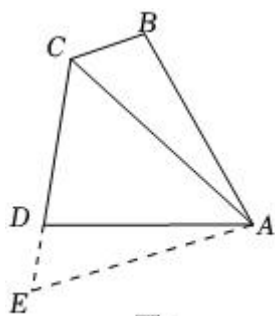


图1

$$\therefore \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle ADC = 180^\circ$$

$$\therefore \angle B = \angle ADE,$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 中,

$$\begin{cases} DA = BA \\ \angle ADE = \angle B, \\ DE = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ABC \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAC, \quad AE = AC,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle BAD = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ACE$ 的等边三角形,

$$\therefore CE = AC,$$

$$\therefore CE = DE + CD,$$

$$\therefore AC = BC + CD;$$

【小问 2 详解】

解: 结论: $CB + CD = \sqrt{2} AC$.

理由: 如图 2 中, 过点 A 作 $AM \perp CD$ 于点 M , $AN \perp CB$ 交 CB 的延长线于点 N .

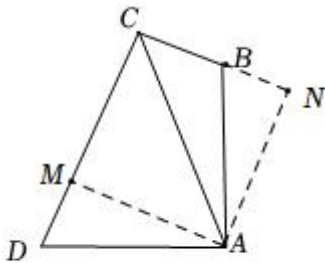


图2

$$\therefore \angle DAB = \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDA + \angle CBA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABN + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \angle ABN,$$

$$\therefore \angle AMD = \angle N = 90^\circ, \quad AD = AB,$$

$$\therefore \triangle AMD \cong \triangle ANB \text{ (AAS)},$$

$$\therefore DM = BN, \quad AM = AN,$$

$$\therefore AM \perp CD, \quad AN \perp CN,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore AC = \sqrt{2} CM,$$

$$\therefore AC = AC, \quad AM = AN,$$

$$\therefore Rt\triangle ACM \cong Rt\triangle ACN \text{ (HL)},$$

$$\therefore CM = CN,$$

$$\therefore CB + CD = CN - BN + CM + DM = 2CM = \sqrt{2} AC;$$

【小问 3 详解】

解: 如图 3-1 中, 当 $\angle CDA=75^\circ$ 时, 过点 O 作 $OP \perp CB$ 于点 P , $OQ \perp CD$ 于点 Q .

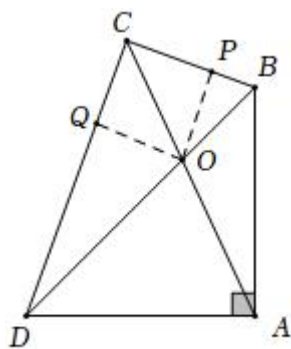


图 3-1

$$\because \angle CDA=75^\circ, \angle ADB=45^\circ,$$

$$\therefore \angle CDB=30^\circ,$$

$$\therefore \angle DCB=90^\circ,$$

$$\therefore CD=\sqrt{3}CB,$$

$$\because \angle DCO=\angle BCO=45^\circ, OP \perp CB, OQ \perp CD,$$

$$\therefore OP=OQ,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle CDO}} = \frac{\frac{1}{2}CD \cdot OQ}{\frac{1}{2}BC \cdot OP} = \frac{CD}{BC},$$

$$\therefore \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{CB} = \sqrt{3},$$

$$\because AB=AD=\sqrt{6}, \angle DAB=90^\circ,$$

$$\therefore BD=\sqrt{2}AD=2\sqrt{3},$$

$$\therefore OD = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \times 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 3.$$

如图 3-2 中, 当 $\angle CBD=75^\circ$ 时,

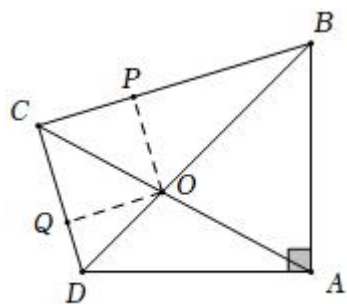


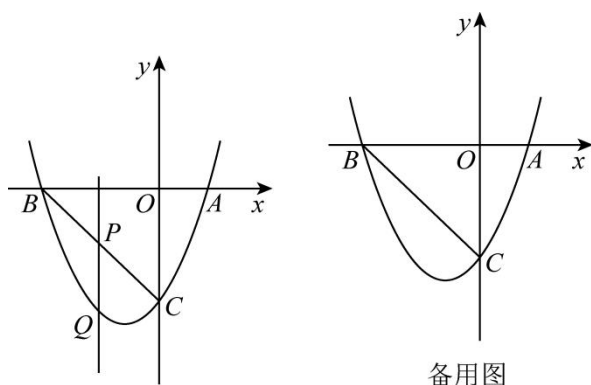
图 3-2

同法可证 $\frac{OD}{OB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $OD = \frac{1}{1+\sqrt{3}} \times 2\sqrt{3} = 3 - \sqrt{3}$,

综上所述, 满足条件的 OD 的长为 $3\sqrt{3} - 3$ 或 $3 - \sqrt{3}$.

【点睛】 本题属于四边形综合题, 考查了全等三角形的判定和性质, 解直角三角形, 等边三角形的判定和性质, 角平分线的性质定理等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造全等三角形解决问题, 属于中考压轴题.

25. 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = ax^2 + 2x + c$ 与 x 轴分别交于点 $A(1, 0)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 $C(0, -3)$, 连接 BC .



(1) 求抛物线的解析式及点 B 的坐标.

(2) 如图, 点 P 为线段 BC 上的一个动点 (点 P 不与点 B, C 重合), 过点 P 作 y 轴的平行线交抛物线于点 Q , 求线段 PQ 长度的最大值.

(3) 动点 P 以每秒 $\sqrt{2}$ 个单位长度的速度在线段 BC 上由点 C 向点 B 运动, 同时动点 M 以每秒 1 个单位长度的速度在线段 BO 上由点 B 向点 O 运动, 在平面内是否存在点 N , 使得以点 P, M, B, N 为顶点的四边形是菱形? 若存在, 请直接写出符合条件的点 N 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = x^2 + 2x - 3$, $(-3, 0)$

(2) $\frac{9}{4}$

(3) $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$ 或 $(-2, 1)$ 或 $(0, 3 - 3\sqrt{2})$

【解析】

【分析】 (1) 将 A, C 两点坐标代入抛物线的解析式求得 a, c 的值, 进而得出解析式, 当 $y=0$ 时, 求出方程的解, 进而求得 B 点坐标;

(2) 由 B, C 两点求出 BC 的解析式, 进而设出点 P 和点 Q 坐标, 表示出 PQ 的长, 进一步得出结果;

(3) 要使以点 P, M, B, N 为顶点的四边形是菱形, 只需 $\triangle PMB$ 是等腰三角形, 所以分为 $PM=BM, PM=PB$ 和 $BP=BM$, 结合图象, 进一步得出结果.

【小问 1 详解】

解: 把点 $A(1, 0), C(0, -3)$ 代入 $y = ax^2 + 2x + c$ 得:

$$\begin{cases} c = -3 \\ a + 2 \times 1 + c = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} c = -3 \\ a = 1 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$;

令 $y=0$, 则 $x^2 + 2x - 3 = 0$,

解得: $x_1 = 1, x_2 = -3$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-3, 0)$;

【小问 2 详解】

解: 设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

把点 $B(-3, 0), C(0, -3)$ 代入得:

$$\begin{cases} b = -3 \\ -3k + b = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = -1 \\ b = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = -x - 3$,

设点 $P(m, -m+3)$, 则 $Q(m, m^2 + 2m - 3)$,

$$\therefore PQ = (-m - 3) - (m^2 + 2m - 3) = -m^2 - 3m = -\left(m + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4},$$

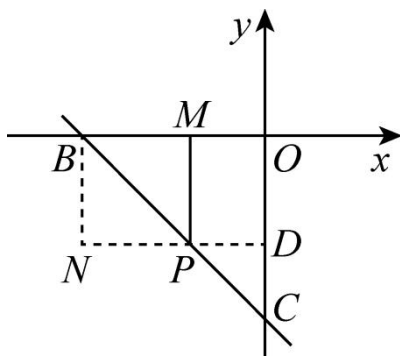
$\therefore$ 当 $m = -\frac{3}{2}$ 时, PQ 最大, 最大值为 $\frac{9}{4}$;

【小问 3 详解】

解: 存在,

根据题意得: $PC = \sqrt{2}t, BM = t$, 则 $PB = 3\sqrt{2} - \sqrt{2}t$,

如图, 当 $BM=PM$ 时,



$$\because B(-3, 0), C(0, -3),$$

$$\therefore OB=OC=3,$$

$$\therefore \angle OCB=\angle OBC=45^\circ,$$

延长 NP 交 y 轴于点 D ,

$\because$ 点 P, M, B, N 为顶点的四边形是菱形,

$\therefore PN \parallel x$ 轴, $BN \parallel PM$, 即 $DN \perp y$ 轴,

$\therefore \triangle CDP$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore CD=PD=PC \cdot \sin \angle OCB = \sqrt{2}t \times \frac{\sqrt{2}}{2} = t,$$

$$\because BM=PM,$$

$$\therefore \angle MPB=\angle OBC=45^\circ,$$

$$\therefore \angle PMO=\angle PDO=\angle MOD=90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $OMPD$ 是矩形,

$$\therefore OM=PD=t, MP \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore BN \perp x \text{ 轴},$$

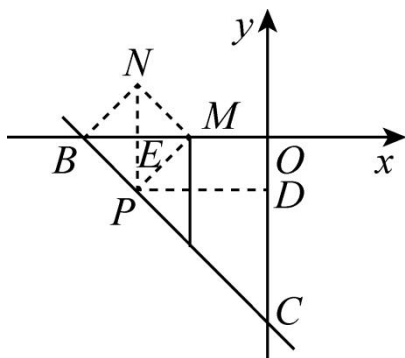
$$\therefore BM+OM=OB,$$

$$\therefore t+t=3, \text{ 解得 } t=\frac{3}{2},$$

$$\therefore P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right),$$

$$\therefore N\left(-3, -\frac{3}{2}\right);$$

如图, 当 $PM=PB$ 时, 作 $PD \perp y$ 轴于 D , 连接 PN ,



$\therefore$ 点 P, M, B, N 为顶点的四边形是菱形,

$\therefore PN \perp BM, NE = PE,$

$\therefore BM = 2BE,$

$\therefore \angle OEP = \angle DOE = \angle ODP = 90^\circ,$

$\therefore$ 四边形 $PDOE$ 是矩形,

$\therefore OE = PD = t,$

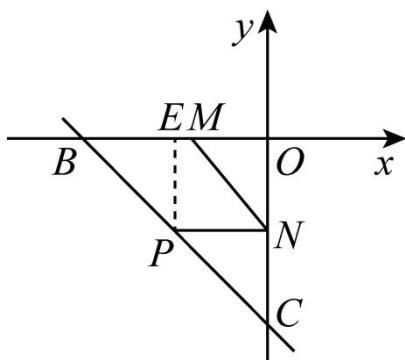
$\therefore BE = 3 - t,$

$\therefore t = 2(3 - t),$ 解得: $t = 2,$

$\therefore P(-2, -1),$

$\therefore N(-2, 1);$

如图, 当 $PB = MB$ 时,



$3\sqrt{2} - \sqrt{2}t = t,$ 解得: $t = 6 - 3\sqrt{2},$

$\therefore PN = BP = BM = 6 - 3\sqrt{2},$

过点 P 作 $PE \perp x$ 轴于点 $E,$

$\therefore PE \perp PM,$

$\therefore \angle EON = \angle OEP = \angle EPN = 90^\circ,$

$\therefore$ 四边形 $OEPN$ 为矩形,

$\therefore PN = OE, PN \perp y$ 轴,

$\therefore \angle OBC = 45^\circ$,

$$\therefore BE = PE = PB \sin \angle OBC = (6 - 3\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} - 3,$$

$$\therefore OE = OB - BE = 3 - (3\sqrt{2} - 3) = 6 - 3\sqrt{2},$$

$\therefore$ 点 N 在 y 轴上,

$$\therefore N(0, 3 - 3\sqrt{2}),$$

综上所述, 点 N 的坐标为 $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$ 或 $(-2, 1)$ 或 $(0, 3 - 3\sqrt{2})$.

【点睛】 本题考查了二次函数及其图象的性质, 用待定系数法求一次函数的解析式, 等腰三角形的分类和等腰三角形的性质, 菱形的性质等知识, 解决问题的关键是正确分类, 画出符合条件的图形.

