

2022 年黔西南州普通高中招生考试数学

考生注意:

1. 答题前, 请务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡的规定位置,
2. 答题时, 选择题使用 **2B** 铅笔在答题卡上填涂, 非选择题使用黑色字迹的笔在答题卡规定区域内作答, 在试卷上作答无效.
3. 本试题共 6 页, 考试时间 120 分钟.

一、选择题 (本题 10 小题)

1. 实数 -3 的绝对值是 ()

- A. -3 B. ± 3 C. 3 D. $-\frac{1}{3}$

【答案】 C

【解析】

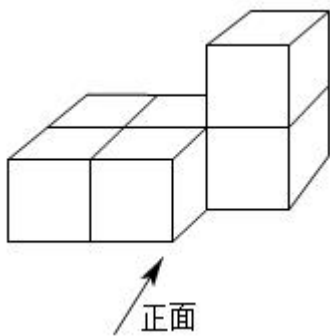
【分析】 直接利用绝对值的性质分析得出答案.

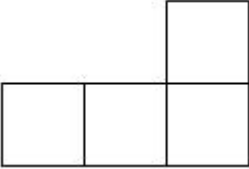
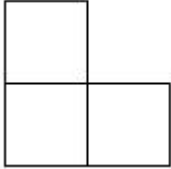
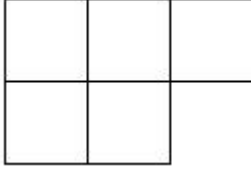
【详解】 解: 实数 -3 的绝对值是 3.

故选: C.

【点睛】 此题主要考查了绝对值, 正确掌握绝对值的性质是解题关键.

2. 如图, 是由 6 个相同的正方体组成的立体图形, 它的俯视图是 ()



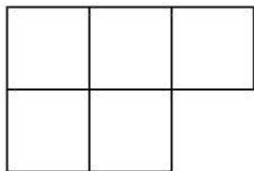
- A.  B.  C.  D. 

【答案】 C

【解析】

【分析】 找到从上面看, 能看到的图形即可, 即俯视图.

【详解】该立体图形的俯视图为:



故: C.

【点睛】本题考查了三视图的知识, 正确确定三视图是本题的关键.

3. 据央视 6 月初报道, 电信 5G 技术赋能千行百业, 打造数字经济底座. 5G 牌照发放三年来, 三大电信运营商共投资 4772 亿元. 把数字 4772 亿用科学记数法表示为 ()

- A. 4.772×10^9 B. 4.772×10^{10} C. 4.772×10^{11} D. 4.772×10^{12}

【答案】C

【解析】

【分析】先将 4772 亿元换算成 477200000000 元, 再根据科学记数法可直接得到答案.

【详解】解: 4772 亿元 = 477200000000 元 = 4.772×10^{11} 元

故选: C.

【点睛】本题考查科学记数法, 解题的关键是熟练掌握科学记数法的方法, 科学记数法的基本形式为 $a \times 10^n$, 其中 $0 < |a| \leq 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. 计算 $(-3x)^2 \cdot 2x$ 正确的是 ()

- A. $6x^3$ B. $12x^3$ C. $18x^3$ D. $-12x^3$

【答案】C

【解析】

【分析】先算积的乘方, 再算同底数幂的乘法, 即可得.

【详解】 $(-3x)^2 \cdot 2x = 9x^2 \cdot 2x = 18x^3$

故选: C.

【点睛】本题考查了单项式乘单项式, 积的乘方, 同底数幂的乘法, 能灵活运用法则进行计算是解题的关键.

5. 小明解方程 $\frac{x+1}{2} - 1 = \frac{x-2}{3}$ 的步骤如下:

解: 方程两边同乘 6, 得 $3(x+1) - 1 = 2(x-2)$ ①

去括号, 得 $3x + 3 - 1 = 2x - 2$ ②

移项, 得 $3x - 2x = -2 - 3 + 1$ ③

合并同类项, 得 $x = -4$ ④

以上解题步骤中, 开始出错的一步是 ()

A. ①

B. ②

C. ③

D. ④

【答案】A

【解析】

【分析】按照解分式方程的一般步骤进行检查, 即可得出答案.

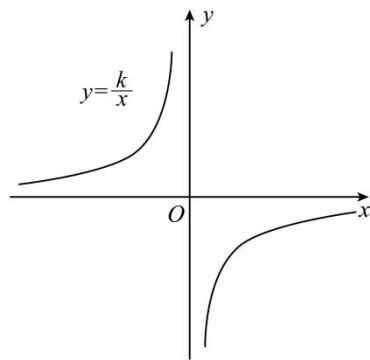
【详解】解: 方程两边同乘 6, 得 $3(x+1) - 6 = 2(x-2)$ ①

$\therefore$ 开始出错的一步是①,

故选: A.

【点睛】本题考查了解分式方程, 熟练掌握解分式方程的一般步骤是解决问题的关键.

6. 在平面直角坐标系中, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象如图所示, 则一次函数 $y = kx + 2$ 的图象经过的象限是 ()



A. 一、二、三

B. 一、二、四

C. 一、三、四

D. 二、三、四

【答案】B

【解析】

【分析】由图可知, 反比例函数位于二、四象限, 则根据反比例函数的性质可知 $k < 0$, 再结合一次函数的图象和性质即可作答.

【详解】由图可知, 反比例函数位于二、四象限,

$\therefore k < 0$,

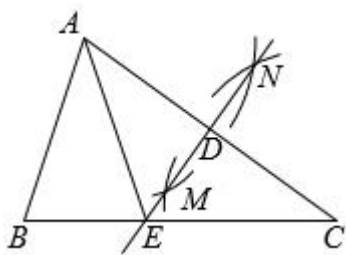
$\therefore y = kx + 2$ 经过一、二、四象限.

故选: B.

【点睛】本题主要考查了反比例函数的图象和性质以及一次函数的图象和性质, 熟练掌握反比例函数和一

次函数的图象和性质是解题的关键.

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 用尺规作图, 分别以点 A 和 C 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}AC$ 的长为半径作弧, 两弧相交于点 M 和 N . 作直线 MN 交 AC 于点 D , 交 BC 于点 E , 连接 AE . 则下列结论不一定正确的是 ()



- A. $AB = AE$ B. $AD = CD$ C. $AE = CE$ D. $\angle ADE = \angle CDE$

【答案】A

【解析】

【分析】根据作图可知 $AM=CM$, $AN=CN$, 所以 MN 是 AC 的垂直平分线, 根据垂直平分线的性质, 线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等, 且平分此点到线段两端构成的夹角, 分别对各选项进行判断.

【详解】由题意得, MN 垂直平分线段 AC ,

$$\therefore AD = CD, \quad AE = CE, \quad \angle ADE = \angle CDE$$

所以 B 、 C 、 D 正确,

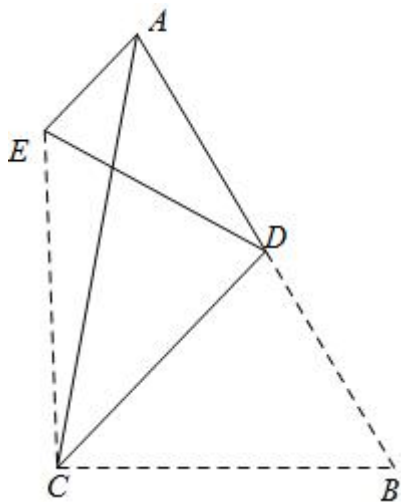
因为点 B 的位置不确定,

所以不能确定 $AB=AE$,

故选 A

【点睛】本题考查了线段垂直平分线, 熟练掌握线段垂直平分线的作图方法和性质是解题的关键.

8. 在如图所示的 $Rt\triangle ABC$ 纸片中, $\angle ACB = 90^\circ$, D 是斜边 AB 的中点, 把纸片沿着 CD 折叠, 点 B 到点 E 的位置, 连接 AE . 若 $AE \parallel DC$, $\angle B = \alpha$, 则 $\angle EAC$ 等于 ()



- A. α B. $90^\circ - \alpha$ C. $\frac{1}{2}\alpha$ D. $90^\circ - 2\alpha$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，可知 $CD=BD=AD$ ，根据折叠的性质可知 $\angle B=\angle DCB=\angle DCE=\angle EDC=\alpha$ ，根据平行线的性质，可得出 $\angle AED=\angle EDC$ ，根据等边对等角即可求得 $\angle EAD$ 的度数，最后 $\angle EAC=\angle EAD-\angle CAD$ 即可求出.

【详解】 $\because D$ 是斜边 AB 的中点， $\triangle ABC$ 为直角三角形，

$$\therefore CD=BD=AD,$$

$\because \triangle CDE$ 由 $\triangle CDB$ 沿 CD 折叠得到，

$$\therefore \triangle CDE \cong \triangle CDB,$$

则 $CD=BD=AD=ED$,

$$\therefore \angle B=\angle DCB=\angle DCE=\angle EDC=\alpha,$$

$$\therefore \angle EDC=180^\circ-2\alpha,$$

$$\therefore AE \parallel DC,$$

$$\therefore \angle AED=\angle EDC=180^\circ-2\alpha,$$

$$\therefore ED=AD,$$

$$\therefore \angle EAD=\angle AED=180^\circ-2\alpha,$$

$\because \angle B=\alpha$ ， $\triangle ABC$ 为直角三角形，

$$\therefore \angle CAD=90^\circ-\alpha,$$

$$\therefore \angle EAC=\angle EAD-\angle CAD=180^\circ-2\alpha-(90^\circ-\alpha)=90^\circ-\alpha,$$

故选: B.

【点睛】 本题主要考查了直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，折叠的性质，等腰三角形的性质以及

直角三角形两个锐角互余，熟练地掌握相关知识是解题的关键.

9. 某农户承包的 36 亩水田和 30 亩旱地需要耕作. 每天平均耕作旱地的亩数比耕作水田的亩数多 4 亩. 该农户耕作完旱地所用的时间是耕作完水田所用时间的一半, 求平均每天耕作水田的亩数. 设平均每天耕作水田 x 亩, 则可以得到的方程为 ()

- A. $\frac{36}{x-4} = 2 \times \frac{30}{x}$ B. $\frac{36}{x+4} = 2 \times \frac{30}{x}$ C. $\frac{36}{x} = 2 \times \frac{30}{x-4}$ D. $\frac{36}{x} = 2 \times \frac{30}{x+4}$

【答案】D

【解析】

【分析】先求出平均每天耕作旱地的亩数为 $(x+4)$ 亩, 再根据该农户耕作完旱地所用的时间是耕作完水田所用时间的一半建立方程即可.

【详解】解: 由题意可知, 平均每天耕作旱地的亩数为 $(x+4)$ 亩,

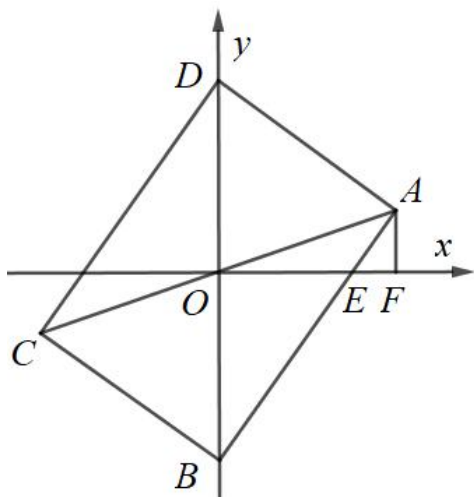
则可列方程为 $\frac{36}{x} = 2 \times \frac{30}{x+4}$,

故选: D.

【点睛】本题考查了列分式方程, 找准等量关系是解题关键.

10. 如图, 在平面直角坐标系中, 矩形 $ABCD$ 的顶点 A 在第一象限, B, D 分别在 y 轴上, AB 交 x 轴于点 E , $AF \perp x$ 轴, 垂足为 F . 若 $OE = 3$, $EF = 1$. 以下结论正确的个数是 ()

① $OA = 3AF$; ② AE 平分 $\angle OAF$; ③ 点 C 的坐标为 $(-4, -\sqrt{2})$; ④ $BD = 6\sqrt{3}$; ⑤ 矩形 $ABCD$ 的面积为 $24\sqrt{2}$.



A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

【答案】C

【解析】

【分析】根据相似三角形的判定得出 $\triangle EOB \sim \triangle EFA$, 利用相似三角形的性质及已知 OE , EF 的值即可判

断结论①；由①分析得出的条件，结合相似三角形、矩形的性质（对角线）即可判断结论②；根据直角坐标系上点的表示及结论① $OA = 3AF$ ，利用勾股定理建立等式求解可得点 A 坐标，再根据关于原点对称的点的坐标得出点 D 坐标，即可判断结论③；由③可知 $AF = \sqrt{2}$ ，进而得出 OA 的值，根据矩形的性质即可判断结论④；根据矩形的性质及④可知 $BD = 6\sqrt{2}$ ，利用三角形的面积公式求解即可判断结论⑤。

【详解】解：

∵ 矩形 ABCD 的顶点 A 在第一象限， $AF \perp x$ 轴，垂足为 F，

∴ $\angle EOB = \angle EFA = 90^\circ$ ， $AC = BD$ ， $OD = OA = OB = OC$ 。

∵ $\angle AEF = \angle BEO$ ，

∴ $\triangle EOB \sim \triangle EFA$ 。

∵ $OE = 3$ ， $EF = 1$ ，

∴ $\frac{EF}{EO} = \frac{AF}{OB} = \frac{AF}{OA} = \frac{1}{3}$ ，即 $OA = 3AF$ 。（①符合题意）

∵ $OA = OB$ ， $\triangle EOB \sim \triangle EFA$ ，

∴ $\angle OAB = \angle OBA$ ， $\angle EAF = \angle EBO$ 。

∴ $\angle OAB = \angle EAF$ 。

∴ AE 平分 $\angle OAF$ 。（②符合题意）

∵ $OF = OE + EF = 3 + 1 = 4$ ，

∴ 点 A 的横坐标为 4。

∵ $OA = 3AF$ ，

∴ $9AF^2 - AF^2 = OF^2$ ，即 $8AF^2 = 16$ 。

∴ $AF = \sqrt{2}$ ，点 A 的纵坐标为 $\sqrt{2}$ 。

∴ $A(4, \sqrt{2})$ 。

∵ 点 A 与点 C 关于原点对称，

∴ $C(-4, -\sqrt{2})$ 。（③符合题意）

∵ $OA = 3AF = 3\sqrt{2}$ ，

∴ $BD = OD + OB = 2OA = 6\sqrt{2}$ 。（④不符合题意）

∵ $S_{\text{矩形}ABCD} = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle BAD} = 2S_{\triangle BAD}$ ，

∴ $S_{\text{矩形}ABCD} = 2 \times \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 4 = 24\sqrt{2}$ 。（⑤符合题意）

∴ 结论正确的共有 4 个符合题意.

故选: C.

【点睛】 本题考查矩形与坐标的综合应用. 涉及矩形的性质, 相似三角形的判定与性质, 勾股定理, 直角坐标系上点的表示, 关于原点对称的点的坐标, 三角形的面积公式等知识点. 矩形的对角线相等且互相平分; 两角分别相等的两个三角形相似; 相似三角形对应角相等, 对应边成比例; 两个点关于原点对称时, 它们的坐标符号相反, 即点 $P(x, y)$ 关于原点的对称点为 $P'(-x, -y)$. 灵活运用相关知识点, 通过已知条件建立等式关系是解本题的关键.

二、填空题 (本题 10 小题)

11. 计算: $\frac{x+y}{x-y} - \frac{2y}{x-y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 1

【解析】

【分析】 根据分式加减法的性质计算, 即可得到答案.

【详解】 $\frac{x+y}{x-y} - \frac{2y}{x-y}$

$$= \frac{x+y-2y}{x-y}$$

$$= \frac{x-y}{x-y}$$

$$= 1$$

故答案为: 1.

【点睛】 本题考查了分式运算的知识; 解题的关键是熟练掌握分式加减运算的性质, 从而完成求解.

12. 已知点 $(2, y_1)$, $(3, y_2)$ 在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象上, 则 y_1 与 y_2 的大小关系是_____.

【答案】 $y_1 > y_2$

【解析】

【分析】 根据反比例函数的图象和性质, 即可解答.

【详解】 解: ∵ 在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 中, $k = 6 > 0$,

∴ 此函数的图象分别在第一、第三象限, 在每个象限内, y 随 x 的增大而减小,

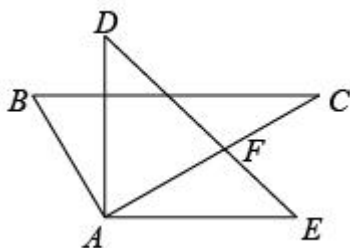
∵ $2 < 3$, 且这两点都在第一象限,

$$\therefore y_1 > y_2,$$

故答案为: $y_1 > y_2$.

【点睛】本题考查了反比例函数的图象与性质, 熟练掌握和运用反比例函数的图象与性质是解决本题的关键.

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中, $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle D = 45^\circ$, AC 与 DE 相交于点 F . 若 $BC \parallel AE$, 则 $\angle AFE$ 的度数为_____.



【答案】 105° 度

【解析】

【分析】在 $\triangle ABC$ 中, 利用已知求得 $\angle C = 30^\circ$, 再利用平行线的性质求得 $\angle CAE = \angle C = 30^\circ$, 然后在 $\triangle ADE$ 中利用三角形的内角和定理求得 $\angle E = 45^\circ$, 最后在 $\triangle AEF$ 中, 利用三角形的内角和定理即可求得 $\angle AFE = 180^\circ - \angle E - \angle CAE = 105^\circ$.

【详解】解: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$,

$$\therefore \angle C = \angle BAC - \angle B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ;$$

$$\because BC \parallel AE,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle C = 30^\circ,$$

在 $\triangle ADE$ 中, $\angle DAE = 90^\circ$, $\angle D = 45^\circ$,

$$\therefore \angle E = \angle DAE - \angle D = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \text{在 } \triangle AEF \text{ 中, } \angle AFE = 180^\circ - \angle E - \angle CAE = 105^\circ.$$

故答案为: 105°

【点睛】本题考查了三角形的内角和定理, 熟练运用三角形的内角和定理是解题的关键.

14. 某校九 (1) 班 10 名同学进行“引体向上”训练, 将他们做的次数进行统计, 制成下表: 则这 10 名同学做的次数组成的一组数据中, 中位数为_____.

次数	4	5	6	7	8
人数	2	3	2	2	1

【答案】 5.5

【解析】

【分析】 根据中位数的定义求解即可.

【详解】 解: 将这组数据从小到大排列为: 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8,
这组数据共有 10 个, 第 5 个数是 5, 第 6 个数都是 6,

所以中位数是 $\frac{5+6}{2} = 5.5$.

故答案为: 5.5.

【点睛】 本题主要考查中位数, 解题的关键是掌握一将一组数据按照从小到大 (或从大到小) 的顺序排列, 如果数据的个数是奇数, 则处于中间位置的数就是这组数据的中位数. 如果这组数据的个数是偶数, 则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

15. 已知 $ab = 2$, $a + b = 3$, 则 $a^2b + ab^2$ 的值为_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 将 $a^2b + ab^2$ 因式分解, 然后代入已知条件即可求值.

【详解】 解: $a^2b + ab^2$

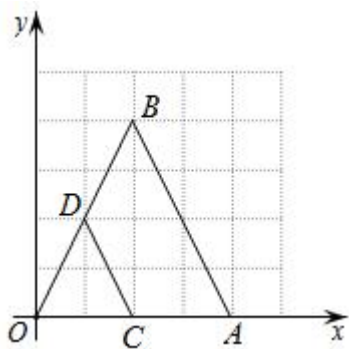
$$= ab(a + b)$$

$$= 2 \times 3$$

$$= 6.$$

【点睛】 本题考查了因式分解的应用, 熟练掌握因式分解的方法是解题的关键.

16. 如图, 在平面直角坐标系中, $\triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 位似, 位似中心是坐标原点 O . 若点 $A(4, 0)$, 点 $C(2, 0)$,
则 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 周长的比值是_____.



【答案】 2

【解析】

【分析】根据位似的定义，即可得出位似比=OA: OC，而 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 周长的比值等于位似比，即可得出答案.

【详解】 $\because \triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 位似，位似中心是坐标原点 O ，点 $A(4,0)$ ，点 $C(2,0)$

$$\therefore OA=4, OC=2$$

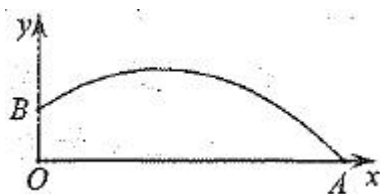
$$\therefore \triangle OAB \text{ 与 } \triangle OCD \text{ 的位似比为: } 4: 2=2: 1$$

$$\therefore \triangle OAB \text{ 与 } \triangle OCD \text{ 周长的比值为: } 2: 1$$

故答案为: 2.

【点睛】本题考查了求位似图形的周长之比，求出位似比是本题的关键.

17. 如图，是一名男生推铅球时，铅球行进过程中形成的抛物线. 按照图中所示的平面直角坐标系，铅球行进高度 y (单位: m) 与水平距离 x (单位: m) 之间的关系是 $y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ ，则铅球推出的水平距离 OA 的长是_____m.



【答案】10

【解析】

【分析】由图可知，要求 OA 的长实际是需要点 A 的横坐标，已知点 A 的纵坐标为0，将 $y=0$ 代入函数的解析式，求出 x 的值，再舍去不符合实际的一个 x 的值即可.

【详解】将 $y=0$ 代入 $y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$;

$$0 = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$\text{整理得: } x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$(x-10)(x+2) = 0$$

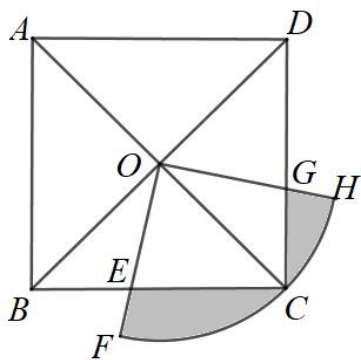
解得: $x=10$ 或 $x=-2$ (舍去)

$\therefore$ 铅球推出的水平距离 OA 的长是10m.

故答案为: 10

【点睛】本题主要考查了二次函数的实际应用，熟练地掌握二次函数的图象和性质是解题的关键.

18. 如图，边长为4的正方形 $ABCD$ 的对角线交于点 O ，以 OC 为半径的扇形的圆心角 $\angle FOH = 90^\circ$. 则图中阴影部分面积是_____.



【答案】 $2\pi - 4$

【解析】

【分析】 证明 $\triangle OCG \cong \triangle OBE$ ，经过观察易得出结论：阴影部分面积=扇形面积-正方形面积的 $\frac{1}{4}$ 。

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$$\therefore OB=OC, \angle BOC=90^\circ, \angle OBE=\angle OCG=45^\circ,$$

$$\because \text{扇形的圆心角 } \angle FOH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC - \angle COE = \angle FOH - \angle COE, \text{ 即 } \angle BOE = \angle COG,$$

在 $\triangle OCG$ 和 $\triangle OBE$ 中，

$$\angle OBE = \angle OCG, \angle BOE = \angle COG, OB = OC$$

$$\therefore \triangle OCG \cong \triangle OBE,$$

$\because$ 正方形边长为 4，

$$\therefore AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore OC = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore S_{\text{扇形}} = \pi (2\sqrt{2})^2 \times \frac{90}{360} = 2\pi,$$

$$S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}} - (S_{\triangle OEC} + S_{\triangle OCG})$$

$$= S_{\text{扇形}} - (S_{\triangle OEC} + S_{\triangle OOE})$$

$$= S_{\text{扇形}} - \frac{1}{4} S_{\text{正方形} ABCD}$$

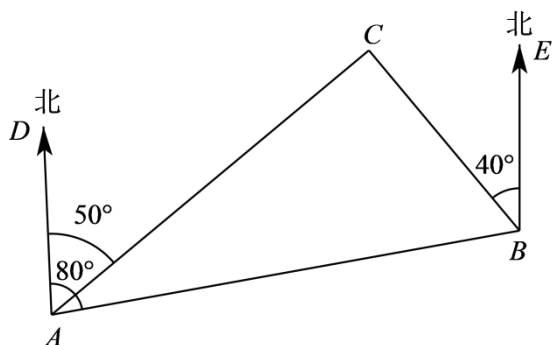
$$= 2\pi - 4$$

故答案为： $2\pi - 4$

【点睛】 本题主要考查了正方形的性质，三角形的全等以及扇形面积的计算；掌握正方形的性质，熟练地进行三角形全等的判定，将不规则图形的面积转化为常见图形的面积是解题的关键。

19. 如图，我海军舰艇在某海域 C 岛附近巡航，计划从 A 岛向北偏东 80° 方向的 B 岛直线行驶。测得 C 岛

在 A 岛的北偏东 50° 方向, 在 B 岛的北偏西 40° 方向. A, B 之间的距离为 80nmile , 则 C 岛到航线 AB 的最短距离是_____nmile. (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.4$, $\sqrt{3} \approx 1.7$)



【答案】 34

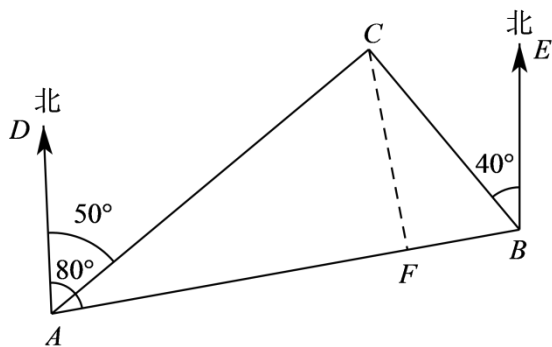
【解析】

【分析】作 $CF \perp AB$ 与点 F , 则 CF 为 C 岛到航线 AB 的最短距离, 设 $CF = x\text{nmile}$, 表示出

$$AF = \frac{CF}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x\text{nmile}, \quad BF = \frac{CF}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}x\text{nmile}, \quad \text{利用 } AB = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}x = 80, \text{ 解得:}$$

$$x = 20\sqrt{3} \approx 34.$$

【详解】解: 作 $CF \perp AB$ 与点 F , 则 CF 为 C 岛到航线 AB 的最短距离,



由图可知: $\angle CAF = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$, $AD \parallel BE$,

$$\therefore AD \parallel BE, \quad \angle DAB = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle EBA = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle CBF = 60^\circ,$$

$$\text{设 } CF = x\text{nmile}, \text{ 则 } AF = \frac{CF}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x\text{nmile}, \quad BF = \frac{CF}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}x\text{nmile},$$

$$\because AB = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}x = 80, \text{ 解得: } x = 20\sqrt{3} \approx 34.$$

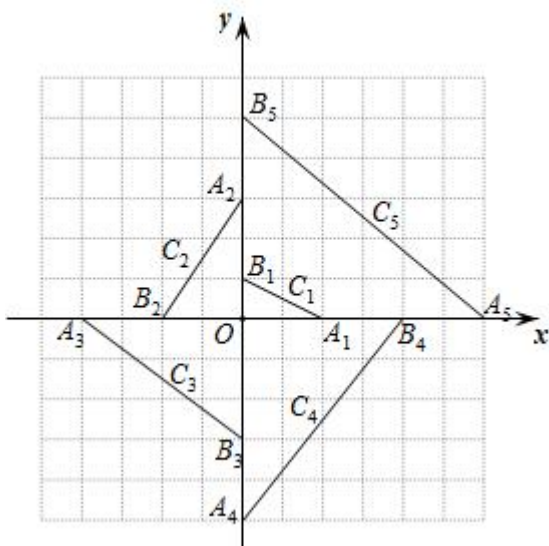
$\therefore C$ 岛到航线 AB 的最短距离是 34 nmile.

故答案为: 34

【点睛】 本题考查解直角三角形的应用, 解题的关键是理解 CF 为 C 岛到航线 AB 的最短距离, 求出

$$\angle CBF = 60^\circ, \text{ 利用 } AB = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}x = 80 \text{ 求解.}$$

20. 如图, 在平面直角坐标系中, $A_1(2,0)$, $B_1(0,1)$, A_1B_1 的中点为 C_1 ; $A_2(0,3)$, $B_2(-2,0)$, A_2B_2 的中点为 C_2 ; $A_3(-4,0)$, $B_3(0,-3)$, A_3B_3 的中点为 C_3 ; $A_4(0,-5)$, $B_4(4,0)$, A_4B_4 的中点为 C_4 ; $\dots$; 按此做法进行下去, 则点 C_{2022} 的坐标为_____.



【答案】 $\left(-1011, \frac{2023}{2}\right)$

【解析】

【分析】 根据图形找出规律即可解答. 由图可知, 线段 A_1B_1 位于第一象限, A_2B_2 位于第二象限, A_3B_3 位于第三象限, A_4B_4 位于第四象限 $\dots$, 每四个循环一次, 则可知道 $A_{2022}B_{2022}$ 在第几象限, 写出 A_{2022} , B_{2022} 的坐标, 即可解答.

【详解】 $2022 \div 4 = 505 \dots 2$

$\therefore$ 线段 $A_{2022}B_{2022}$ 在第二象限;

$$\therefore A_{2022} (0, 2023), B_{2022} (-2022, 0)$$

∴点 C_{2022} 为线段 $A_{2022}B_{2022}$ 中点,

∴点 C_{2022} 的坐标为 $\left(\frac{0-2022}{2}, \frac{0+2023}{2}\right)$, 即 $\left(-1011, \frac{2023}{2}\right)$

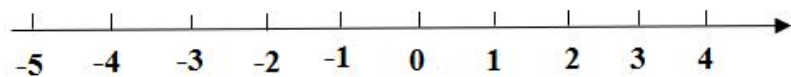
故答案为: $\left(-1011, \frac{2023}{2}\right)$

【点睛】 本题主要考查了图形的变化规律, 仔细读题找出变化规律是解题的关键.

三、解答题 (本题 6 小题)

21. (1) 计算: $-2^2 + \sqrt{12} \times \sqrt{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - (\pi-3)^0$;

(2) 解不等式组 $\begin{cases} x-3 \leq 2(x-1) \\ \frac{x}{3} < \frac{x+2}{5} \end{cases}$, 并把解集在数轴上表示出来.



【答案】 (1) 3; (2) $x < 3$, 见解析

【解析】

【详解】 (1) $-2^2 + \sqrt{12} \times \sqrt{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - (\pi-3)^0$

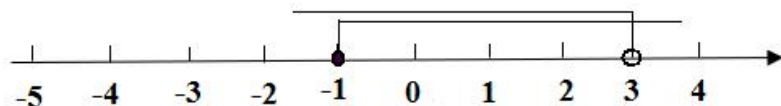
解: 原式 $= -4 + 6 + 2 - 1 = 3$

(2) $\begin{cases} x-3 \leq 2(x-1) \\ \frac{x}{3} < \frac{x+2}{5} \end{cases}$

解: 解不等式 $x-3 \leq 2(x-1)$; 得 $x \geq -1$.

解不等式 $\frac{x}{3} < \frac{x+2}{5}$, 得 $x < 3$.

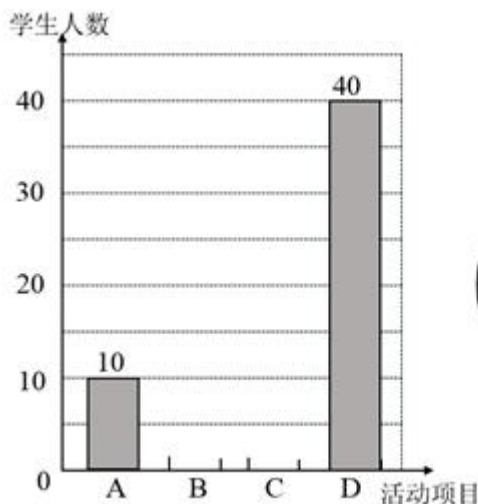
在数轴上表示如下:



∴不等式组的解集为 $-1 \leq x < 3$.

【点睛】 本题考查了实数的混合运算, 解不等式组, 准确熟练的计算是本题的关键.

22. 神舟十四号载人飞船的成功发射, 再次引发校园科技热. 光明中学准备举办“我的航天梦”科技活动周, 在全校范围内邀请有兴趣的学生参加以下四项活动, A : 航模制作; B : 航天资料收集; C : 航天知识竞赛; D : 参观科学馆. 为了了解学生对这四项活动的参与意愿, 学校随机调查了该校有兴趣的 m 名学生 (每名学生必选一项且只能选择一项), 并将调查的结果绘制成如下两幅不完整的统计图.



根据以上信息, 解答下列问题:

- (1) $m = \underline{\hspace{2cm}}$, $n = \underline{\hspace{2cm}}$; 并补全条形统计图;
- (2) 根据抽样调查的结果, 请估算全校 1800 名学生中, 大约有多少人选择参观科学馆;
- (3) 在选择 A 项活动的 10 人中, 有甲、乙、丙、丁四名女生, 现计划把这 10 名学生平均分成两组进行培训, 每组各有两名女生, 则甲、乙被分在同一组的概率是多少?

【答案】 (1) 100, 35, 见解析

(2) 720 名 (3) $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】 (1) 根据 A : 航模制作的有 10 人, 占 10% 可以求得 m 的值, 从而可以求得 n 的值; 根据题意和 m 的值可以求得 B : 航天资料收集; C : 航天知识竞赛人数, 从而可以将条形统计图补充完整;

(2) 根据统计图中的数据可以估算出全校 1800 名学生中, 大约有多少人选择参观科学馆;

(3) 利用列表或树状图求概率即可

【小问 1 详解】

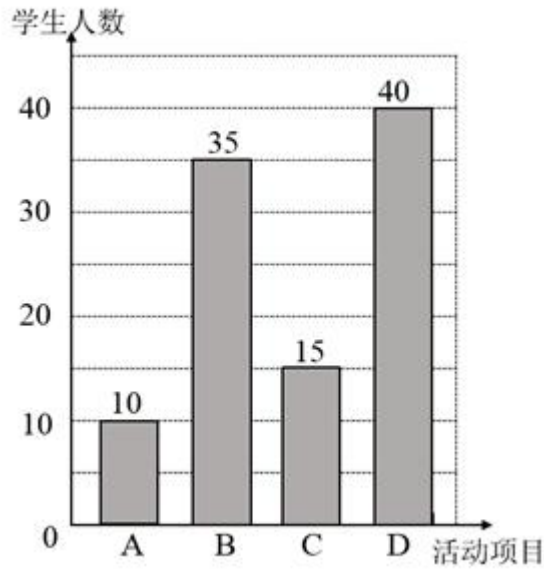
由题意可得, $m = 10 \div 10\% = 100$, $n\% = 100\% - 15\% - 10\% - \frac{40}{100} \times 100\% = 35\%$,

故答案为: 100, 35;

由题意可得: B : 航天资料收集有: $100 \times 35\% = 35$ (人)

C: 航天知识竞赛有: $100 \times 15\% = 15$ (人)

补全条形统计图如图所示:



【小问 2 详解】

$1800 \times 40\% = 720$ (名),

答: 估计该校大约有 720 名学生选择参观科学馆.

【小问 3 详解】

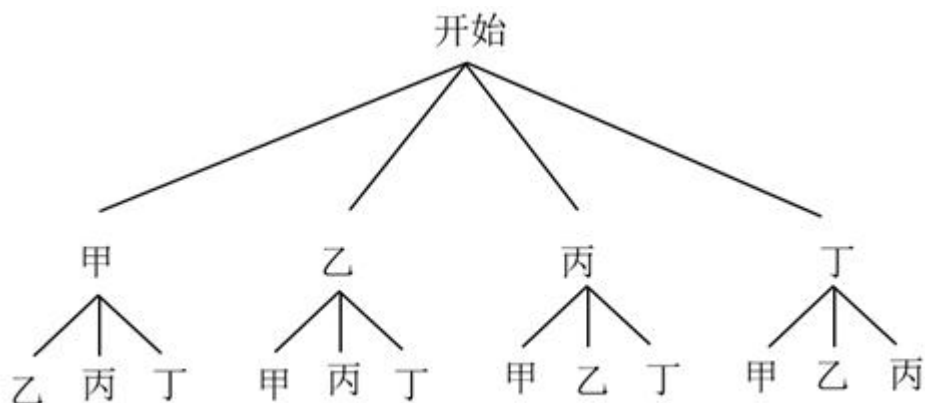
解法一 列表如下:

	甲	乙	丙	丁
甲		(乙, 甲)	(丙, 甲)	(丁, 甲)
乙	(甲, 乙)		(丙, 乙)	(丁, 乙)
丙	(甲, 丙)	(乙, 丙)		(丁, 丙)
丁	(甲, 丁)	(乙, 丁)	(丙, 丁)	

如上表, 共有 12 种等可能的结果, 其中恰好选中甲、乙两名同学的结果为 2 种: (甲, 乙), (乙, 甲).

甲、乙恰好被分在一组的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

解法二 画树状图为:



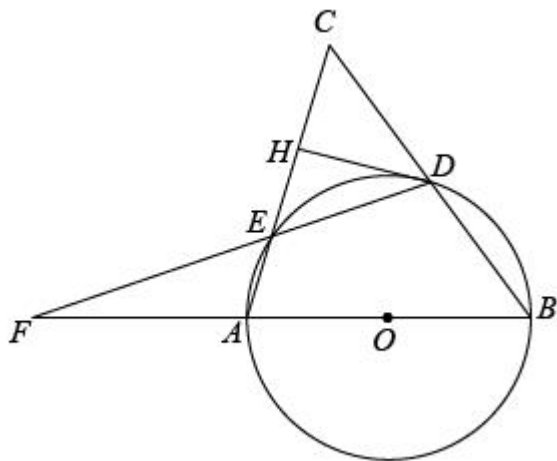
共有 12 种等可能的结果: (甲, 乙), (甲, 丙), (甲, 丁), (乙, 甲), (乙, 丙), (乙, 丁), (丙, 甲), (丙, 乙), (丙, 丁), (丁, 甲), (丁, 乙), (丁, 丙).

甲、乙恰好被分在一组的结果为 2 种: (甲, 乙), (乙, 甲).

甲、乙恰好被分在一组的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

【点睛】 本题考查扇形统计图、条形统计图、用样本估计总体, 利用列表或树状图求概率. 一般来说, 用样本去估计总体时, 样本越具有代表性、容量越大, 这时对总体的估计也就越精确. 解答本题的关键是明确题意, 找出所求问题需要的条件, 利用数形结合的思想解答.

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 以 AB 为直径作 $\odot O$, 分别交 BC 于点 D , 交 AC 于点 E , $DH \perp AC$, 垂足为 H , 连接 DE 并延长交 BA 的延长线于点 F .



(1) 求证: DH 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 E 为 AH 的中点, 求 $\frac{EF}{FD}$ 的值.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】(1) 连接 OD , 证明 $OD \parallel AC$, 由 $DH \perp AC$, 可得 $DH \perp OD$, 即可证明结论;

(2) 连接 AD 和 BE , 由圆周角定理可以得出 $\angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$, 可以得出 $DH \parallel BE$, $OD \parallel AC$, 进而根据平行线分线段成比例推出 $BD=CD$, $CH=HE$, 根据 E 为 AH 的中点, 可得出 $AE=EH=CH$, $AE = \frac{1}{3}AC$, 根据 $OD \parallel \frac{1}{2}AC$ 且 $OD = \frac{1}{2}AC$, 可以得出 $\triangle FAE \sim \triangle FOD$, 根据相似三角形的性质得到 $\frac{FE}{FD} = \frac{AE}{OD}$, 将 AE , OD 代入即可求出答案.

【小问 1 详解】

连接 OD , 则 $OD = OB$.

$$\therefore \angle ODB = \angle B.$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C.$$

$$\therefore \angle ODB = \angle C.$$

$$\therefore OD \parallel AC.$$

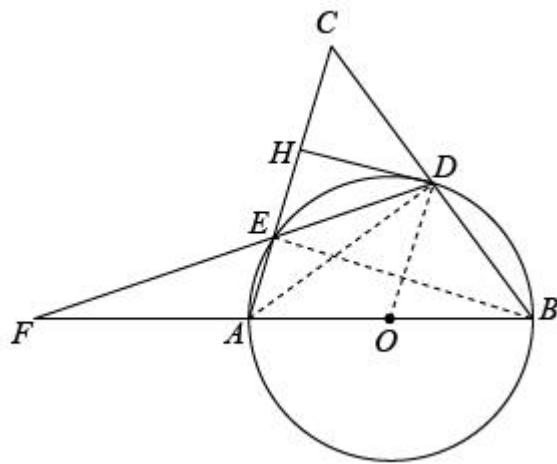
$$\therefore \angle DHC = \angle HDO.$$

$$\because DH \perp AC,$$

$$\therefore \angle DHC = \angle HDO = 90^\circ.$$

$$\therefore DH \perp OD.$$

$\therefore DH$ 是 $\odot O$ 的切线.



【小问 2 详解】

连接 AD 和 BE .

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore OA = OB, \angle ADB = \angle AEB = 90^\circ.$$

$$\because OD \parallel AC$$

$$\therefore \frac{OB}{OA} = \frac{BD}{CD} = 1$$

$$\therefore CD = BD.$$

$$\therefore OD \parallel \frac{1}{2}AC \text{ 且 } OD = \frac{1}{2}AC.$$

$$\because OD \parallel AE,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle ODF.$$

$$\because \angle F = \angle F,$$

$$\therefore \triangle FAE \sim \triangle FOD.$$

$$\therefore \frac{FE}{FD} = \frac{AE}{OD}.$$

$$\because \angle DHA = \angle BEA = 90^\circ$$

$$\therefore DH \parallel BE$$

$$\therefore \frac{CH}{HE} = \frac{CD}{BD} = 1$$

$$\therefore CH = HE.$$

$$\because E \text{ 为 } AH \text{ 的中点},$$

$$\therefore AE = EH = CH.$$

$$\therefore AE = \frac{1}{3}AC$$

$$\therefore \frac{FE}{FD} = \frac{AE}{OD} = \frac{\frac{1}{3}AC}{\frac{1}{2}AC} = \frac{2}{3}.$$

【点睛】 本题考查了切线的判定和性质，圆周角定律，平行线分线段成比例，三角形相似的判定与性质等知识，熟练掌握以上判定和性质是本题解题的关键.

24. 某乡镇新打造的“田园风光”景区今年计划改造一片绿化地，种植 A 、 B 两种花卉，已知 3 盆 A 种花卉和 4 盆 B 种花卉的种植费用为 330 元，4 盆 A 种花卉和 3 盆 B 种花卉的种植费用为 300 元.

(1) 每盆 A 种花卉和每盆 B 种花卉的种植费用各是多少元?

(2) 若该景区今年计划种植 A 、 B 两种花卉共 400 盆，相关资料表明： A 、 B 两种花卉的成活率分别为 70% 和 90%，景区明年要将枯死的花卉补上相同的新花卉，但这两种花卉在明年共补的盆数不多于 80 盆，应如何安排这两种花卉的种植数量，才能使今年该项的种植费用最低？并求出最低费用.

【答案】 (1) 每盆 A 种花卉种植费用为 30 元，每盆 B 种花卉种植费用为 60 元

(2) 种植 A 、 B 两种花卉各 200 盆，能使今年该项的种植费用最低，最低费用为 18000 元

【解析】

【分析】(1) 设每盆 A 种花卉种植费用为 x 元, 每盆 B 种花卉种植费用为 y 元, 根据“3 盆 A 种花卉和 4 盆 B 种花卉的种植费用为 330 元, 4 盆 A 种花卉和 3 盆 B 种花卉的种植费用为 300 元”列二元一次方程组, 解方程组即可求解;

(2) 设种植 A 种花卉的数量为 m 盆, 种植两种花卉的总费用为 w 元, 根据“两种花卉在明年共补的盆数不多于 80 盆”列不等式求得 m 的范围, 再求得 w 与 m 的关系式, 利用一次函数的性质求解.

【小问 1 详解】

解: 设每盆 A 种花卉种植费用为 x 元, 每盆 B 种花卉种植费用为 y 元, 根据题意, 得
$$\begin{cases} 3x + 4y = 330 \\ 4x + 3y = 300 \end{cases}$$

解这个方程组, 得
$$\begin{cases} x = 30 \\ y = 60 \end{cases}$$

答: 每盆 A 种花卉种植费用为 30 元, 每盆 B 种花卉种植费用为 60 元;

【小问 2 详解】

解: 设种植 A 种花卉的数量为 m 盆, 则种植 B 种花卉的数量为 $(400 - m)$ 盆, 种植两种花卉的总费用为 w 元,

根据题意, 得 $(1 - 70\%)m + (1 - 90\%)(400 - m) \leq 80$,

解得 $m \leq 200$,

$$w = 30m + 60(400 - m) = -30m + 24000,$$

$$\because -30 < 0,$$

$\therefore w$ 随 m 增大而减小,

$$\text{当 } m = 200 \text{ 时, } w_{\min} = -30 \times 200 + 24000 = 18000.$$

答: 种植 A 、 B 两种花卉各 200 盆, 能使今年该项的种植费用最低, 最低费用为 18000 元.

【点睛】本题考查一次函数的应用、二元一次方程组的应用、一元一次不等式的应用, 解答本题的关键是明确题意, 列出相应的二元一次方程组, 利用一次函数的性质和不等式的性质解答.

25. 如图 1, 在正方形 $ABCD$ 中, E , F 分别是 BC , CD 边上的点 (点 E 不与点 B , C 重合), 且 $\angle EAF = 45^\circ$.

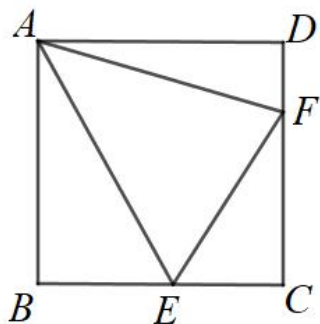


图1

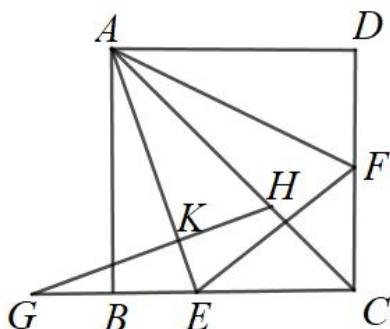


图2

- (1) 当 $BE = DF$ 时, 求证: $AE = AF$;
- (2) 猜想 BE , EF , DF 三条线段之间存在的数量关系, 并证明你的结论;
- (3) 如图 2, 连接 AC , G 是 CB 延长线上一点, $GH \perp AE$, 垂足为 K , 交 AC 于点 H 且 $GH = AE$. 若 $DF = a$, $CH = b$, 请用含 a, b 的代数式表示 EF 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $EF = DF + BE$, 见解析

(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}b + a$

【解析】

【分析】(1) 先利用正方形的性质求得 $AB = AD$, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, 再利用判定三角形全等的“SAS”求得三角形全等, 然后由全等三角形的性质求解;

(2) 延长 CB 至 M , 使 $BM = DF$, 连接 AM , 先易得 $\triangle ABM \cong \triangle ADF$ (SAS), 推出 $AM = AF$, $\angle MAB = \angle FAD$, 进而得到 $\triangle AEM \cong \triangle AEF$ (SAS), 最后利用全等三角形的性质求解;

(3) 过点 H 作 $HN \perp BC$ 于点 N , 易得 $\triangle ABE \cong \triangle GNH$ (AAS), 进而求出 $HN = \frac{\sqrt{2}}{2}CH$, 再根据 (2) 的结论求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = AD, \angle B = \angle D = 90^\circ.$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADF$ 中

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle B = \angle D, \\ BE = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AE = AF;$$

【小问 2 详解】

解: BE , EF , DF 存在的数量关系为 $EF = DF + BE$.

理由如下:

延长 CB 至 M , 使 $BM = DF$, 连接 AM ,

则 $\angle ABM = \angle D = 90^\circ$.

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ADF$ 中

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle ABM = \angle D, \\ BM = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ADF (SAS),$$

$$\therefore AM = AF, \quad \angle MAB = \angle FAD.$$

$$\therefore \angle EAF = 45^\circ,$$

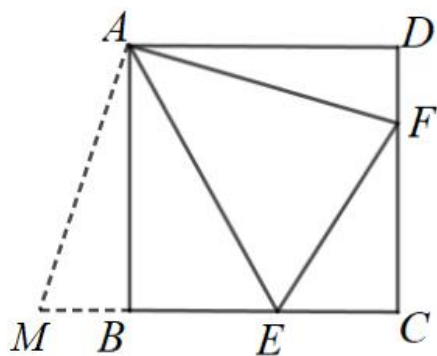
$$\therefore \angle MAB + \angle BAE = \angle FAD + \angle BAE = 45^\circ.$$

在 $\triangle AEM$ 和 $\triangle AEF$ 中

$$\begin{cases} AM = AF \\ \angle MAE = \angle FAE, \\ AE = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEM \cong \triangle AEF (SAS),$$

$$\therefore EM = EF = DF + BE;$$



【小问 3 详解】

解: 过点 H 作 $HN \perp BC$ 于点 N ,

则 $\angle HNG = 90^\circ$.

$$\therefore GH \perp AE,$$

$$\therefore \angle AKG = \angle ABG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BGK = \angle EAB.$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle GNH$ 中

$$\begin{cases} \angle ABE = \angle GNH \\ \angle BAE = \angle NGH, \\ AE = GH \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle GNH (AAS),$$

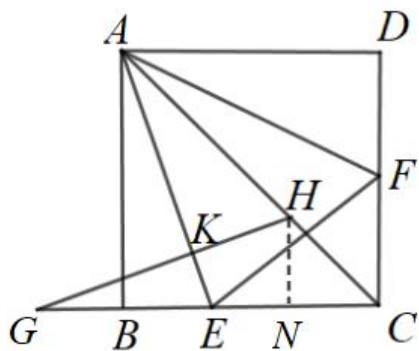
$$\therefore EB = HN.$$

$$\because \angle HCN = 45^\circ, \angle HNC = 90^\circ,$$

$$\therefore \sin 45^\circ = \frac{HN}{HC},$$

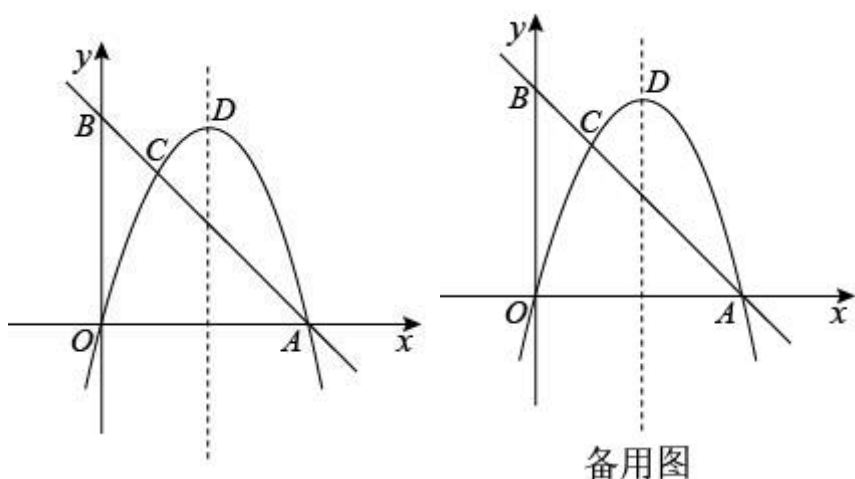
$$\therefore HN = \frac{\sqrt{2}}{2} CH,$$

$$\text{由 (2) 知, } EF = BE + DF = HN + DF = \frac{\sqrt{2}}{2}b + a.$$



【点睛】本题主要考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，特殊角的三角函数值，作出辅助线，构建三角形全等是解答关键.

26. 如图，在平面直角坐标系中，经过点 $A(4,0)$ 的直线 AB 与 y 轴交于点 $B(0,4)$. 经过原点 O 的抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 交直线 AB 于点 A, C ，抛物线的顶点为 D .



- (1) 求抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 的表达式;
- (2) M 是线段 AB 上一点, N 是抛物线上一点, 当 $MN \parallel y$ 轴且 $MN = 2$ 时, 求点 M 的坐标;
- (3) P 是抛物线上一动点, Q 是平面直角坐标系内一点. 是否存在以点 A, C, P, Q 为顶点的四边形是矩形? 若存在, 直接写出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $y = -x^2 + 4x$

(2) $\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$ 或 $(2, 2)$ 或 $(3, 1)$

(3) 存在, $(5, 1)$ 或 $(-4, -2)$ 或 $\left(\frac{7-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求出抛物线的解析式;

(2) 求出直线 AB 的表达式为 $y = -x + 4$, 设 $M(t, -t + 4)$, $N(t, -t^2 + 4t)$, 分当 M 在 N 点上方时,

$MN = -t + 4 - (-t^2 + 4t) = t^2 - 5t + 4 = 2$. 和当 M 在 N 点下方时,

$MN = -t^2 + 4t - (-t + 4) = -t^2 + 5t - 4 = 2$, 即可求出 M 的坐标;

(3) 画出图形, 分 AC 是四边形的边和 AC 是四边形的对角线, 进行讨论, 利用勾股定理、相似三角形的判定与性质、函数图像的交点、平移等知识点进行解答即可得出答案.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 过点 $A(4, 0)$, $O(0, 0)$

$$\therefore \begin{cases} -16 + 4b + c = 0 \\ c = 0. \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b = 4 \\ c = 0 \end{cases},$$

∴ 抛物线的表达式为 $y = -x^2 + 4x$.

【小问 2 详解】

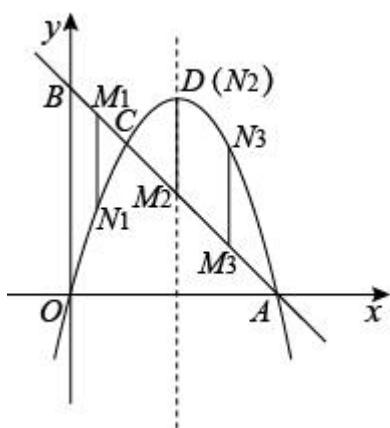
设直线 AB 的解析式为: $y = kx + b$,

∵ 直线 AB 经过 $A(4,0)$, $B(0,4)$,

$$\therefore \begin{cases} 4k + b = 0 \\ b = 4 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -1 \\ b = 4 \end{cases},$$

∴ 直线 AB 的表达式为 $y = -x + 4$.



∵ $MN \parallel y$ 轴, 可设 $M(t, -t + 4)$, $N(t, -t^2 + 4t)$, 其中 $0 \leq t \leq 4$.

当 M 在 N 点上方时, $MN = -t + 4 - (-t^2 + 4t) = t^2 - 5t + 4 = 2$.

解得 $t_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$, $t_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$ (舍去).

$$\therefore M_1\left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right).$$

当 M 在 N 点下方时, $MN = -t^2 + 4t - (-t + 4) = -t^2 + 5t - 4 = 2$.

解得 $t_3 = 2$, $t_4 = 3$.

$$\therefore M_2(2, 2), M_3(3, 1).$$

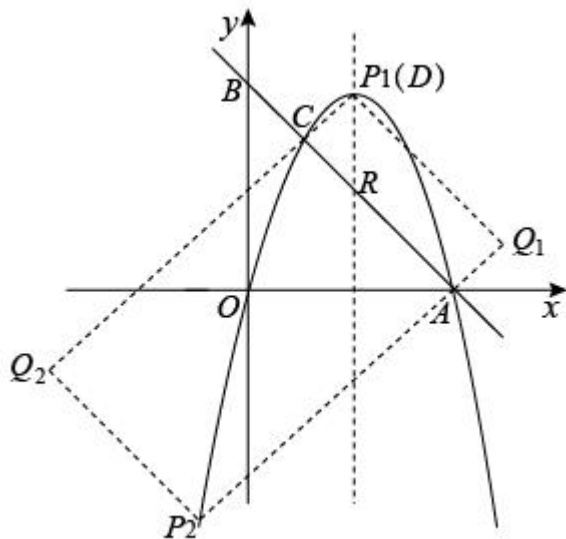
综上所述, 满足条件的点 M 的坐标有三个 $\left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$.

【小问 3 详解】

存在. 满足条件的点 Q 的坐标有 4 个. $(5,1)$, $(-4,-2)$, $\left(\frac{7-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

理由如下:

①如图, 若 AC 是四边形的边.



当 $x=2$ 时, $y=-2+4=2$

$\therefore$ 抛物线的对称轴与直线 AB 相交于点 $R(2,2)$.

过点 C , A 分别作直线 AB 的垂线交抛物线于点 P_1 , P_2 ,

$\therefore C(1,3)$, $D(2,4)$,

$\therefore CD = \sqrt{2}$, $CR = \sqrt{2}$, $RD = 2$.

$\therefore (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 2^2$,

$\therefore CD^2 + CR^2 = DR^2$.

$\therefore \angle RCD = 90^\circ$.

$\therefore$ 点 P_1 与点 D 重合.

当 $CP_1 \parallel AQ_1$, $CP_1 = AQ_1$ 时, 四边形 ACP_1Q_1 是矩形.

$\therefore C(1,3)$ 向右平移 1 个单位, 向上平移 1 个单位得到 $P_1(2,4)$.

$\therefore A(4,0)$ 向右平移 1 个单位, 向上平移 1 个单位得到 $Q_1(5,1)$.

此时直线 P_1C 的解析式为 $y = x + 2$.

$\therefore$ 直线 P_2A 与 P_1C 平行且过点 $A(4,0)$,

$\therefore$ 直线 P_2A 的解析式为 $y = x - 4$.

$\therefore$ 点 P_2 是直线 $y = x - 4$ 与抛物线 $y = -x^2 + 4x$ 的交点,

$$\therefore -x^2 + 4x = x - 4.$$

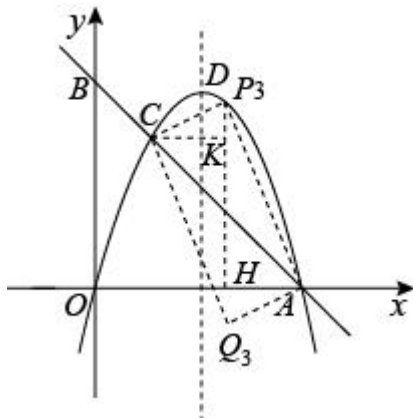
解得 $x_1 = -1$, $x_2 = 4$ (舍去).

$\therefore P_2(-1, -5)$. 当 $AC \parallel P_2Q_2$, $AC = P_2Q_2$ 时, 四边形 ACQ_2P_2 是矩形.

$\therefore A(4,0)$ 向左平移 3 个单位, 向上平移 3 个单位得到 $C(1,3)$.

$\therefore P_2(-1, -5)$ 向左平移 3 个单位, 向上平移 3 个单位得到 $Q_2(-4, -2)$.

②如图, 若 AC 是四边形的对角线,



当 $\angle AP_3C = 90^\circ$ 时. 过点 P_3 作 $P_3H \perp x$ 轴, 垂足为 H , 过点 C 作 $CK \perp P_3H$, 垂足为 K .

可得 $\angle P_3KC = \angle AHP_3 = 90^\circ$, $\angle P_3CK = \angle AP_3H$.

$\therefore \triangle P_3CK \sim \triangle AP_3H$.

$$\therefore \frac{P_3K}{CK} = \frac{AH}{P_3H}.$$

$$\therefore \frac{-t^2 + 4t - 3}{t - 1} = \frac{4 - t}{-t^2 + 4t}.$$

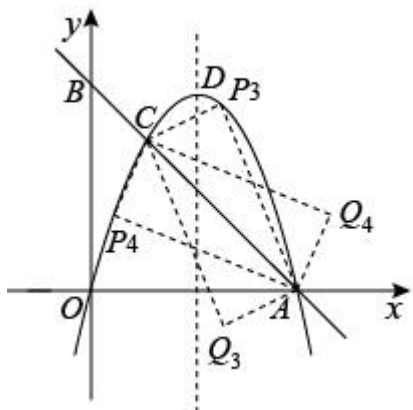
$\therefore$ 点 P 不与点 A , C 重合,

$$\therefore t \neq 1 \text{ 和 } t \neq 4.$$

$$\therefore t^2 - 3t + 1 = 0.$$

$$\therefore t_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$\therefore$ 如图, 满足条件的点 P 有两个. 即 $P_3\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$, $P_4\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$.



当 $P_3C \parallel AQ_3$, $P_3C = AQ_3$ 时, 四边形 AP_3CQ_3 是矩形.

$\therefore P_3\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ 向左平移 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 个单位, 向下平移 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 个单位得到 $C(1,3)$.

$\therefore A(4,0)$ 向左平移 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 个单位, 向下平移 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 个单位得到 $Q_3\left(\frac{7-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

当 $P_4C \parallel AQ_4$, $P_4C = AQ_4$ 时, 四边形 AP_4CQ_4 是矩形.

$\therefore P_4\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$ 向右平移 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 个单位, 向上平移 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 个单位得到 $C(1,3)$.

$\therefore A(4,0)$ 向右平移 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 个单位, 向上平移 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 个单位得到 $Q_4\left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

综上, 满足条件的点 Q 的坐标为 $(5,1)$ 或 $(-4,-2)$ 或 $\left(\frac{7-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

【点睛】 本题主要考查的是二次函数的综合应用, 本题主要涉及了待定系数法求函数的解析式、勾股定理, 矩形的性质, 相似三角形的判定与性质, 点的平移等知识, 根据题意画出符合条件的图形、进行分类讨论是解题的关键.

