

2022 年贵州省安顺市中考数学真题

一、选择题

1. 下列实数中, 比 -5 小的数是 ()

- A. -6 B. $-\frac{1}{2}$ C. 0 D. $\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据两个负数比较, 绝对值大的反而小, 正数大于 0 , 负数小于 0 , 即可求解.

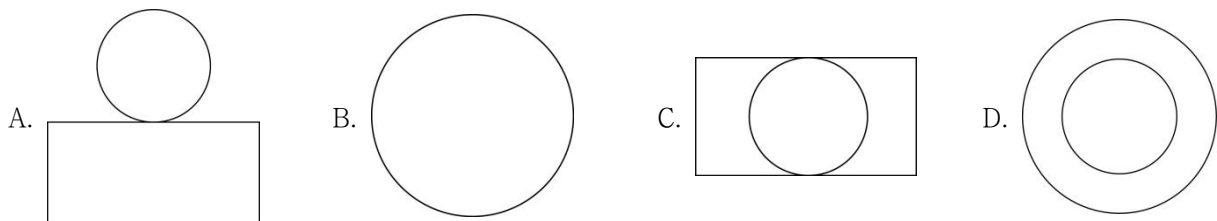
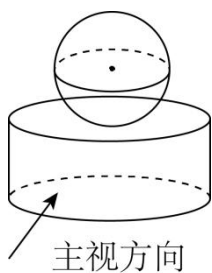
【详解】解: $\because -6 < -5 < -\frac{1}{2} < 0 < \sqrt{3}$.

$\therefore$ 比 -5 小的数是 -6 .

故选 A

【点睛】本题考查了实数大小比较, 掌握两个负数的大小比较是解题的关键.

2. 某几何体如图所示, 它的俯视图是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】根据从上面看得到的图形是俯视图, 即可得答案.

【详解】解: 从上面看, 是两个圆形, 大圆内部有个小圆.

故选: D.

【点睛】本题考查了简单组合体的三视图, 解题的关键是掌握从上面看得到的图形是俯视图.

3. 贵州省近年来经济飞速发展, 经济增长速度名列前茅, 据相关统计, 2021 年全省 GDP 约为 196000000 万元, 则数据 196000000 用科学记数法表示为 ()

- A. 196×10^6 B. 19.6×10^7 C. 1.96×10^8 D. 0.196×10^9

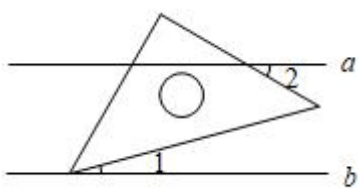
【答案】C

【解析】

【分析】用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数.【详解】解： $196000000 = 1.96 \times 10^8$.

故选 C.

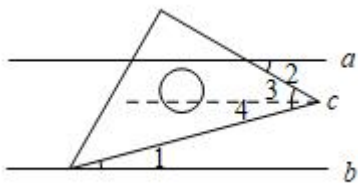
【点睛】本题考查了科学记数法，科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原来的数，变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数，确定 a 与 n 的值是解题的关键.

4. 如图， $a \parallel b$ ，将一个等腰直角三角板放置到如图所示位置. 若 $\angle 1 = 15^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的大小是 ()A. 20° B. 25° C. 30° D. 45°

【答案】C

【解析】

【分析】如图，过等腰直角三角板的一个顶点作直线 $c \parallel a$ ，根据平行线的性质，可得 $\angle 2 = \angle 3$, $\angle 1 = \angle 4$ ，根据三角板可知 $\angle 3 + \angle 4 = 45^\circ$ ，进而等量代换结合已知条件即可求解.

【详解】解：如图，过等腰直角三角板的一个顶点作直线 $c \parallel a$ 

$$\because a \parallel b,$$

$$\therefore a \parallel b \parallel c,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3, \angle 1 = \angle 4,$$

$$\because \angle 3 + \angle 4 = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 45^\circ,$$

$$\because \angle 1 = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 30^\circ.$$

故选: C.

【点睛】本题考查了平行线的性质与判定, 掌握平行线的性质是解题的关键.

5. 一组数据: 3, 4, 4, 6, 若添加一个数据 6, 则不发生变化的统计量是 ()

- A. 平均数 B. 中位数 C. 众数 D. 方差

【答案】B

【解析】

【分析】根据中位数的定义即可求解. 中位数: 把一组数据按从小到大的顺序排列, 在中间的一个数字(或者两个数字的平均值)叫做这组数据的中位数.

【详解】解: $\because$ 一组数据: 3, 4, 4, 6, 的中位数为 $\frac{4+4}{2}=4$, 若添加一个数据 6, 则这组数据变为 3, 4, 4, 6, 6 其中位数为 4,

$\therefore$ 不发生变化的统计量是中位数, 其他统计量均会发生变化,

故选 B

【点睛】本题考查了求中位数, 掌握中位数的定义是解题的关键.

6. 估计 $(2\sqrt{5}+5\sqrt{2})\times\sqrt{\frac{1}{5}}$ 的值应在 ()

- A. 4 和 5 之间 B. 5 和 6 之间 C. 6 和 7 之间 D. 7 和 8 之间

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次根式的混合运算进行化简, 进而估算即可求解.

【详解】解: 原式 $= 2\sqrt{5}\times\sqrt{\frac{1}{5}}+5\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{1}{5}}$

$$= 2+\sqrt{10},$$

$$\because 3<\sqrt{10}<4,$$

$$\therefore 5<2+\sqrt{10}<6,$$

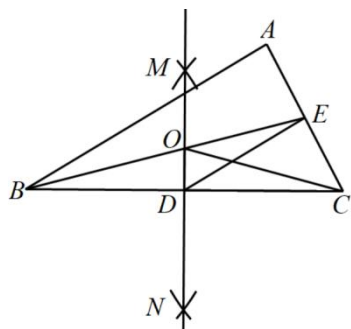
故选 B.

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算, 无数的估算, 正确的计算是解题的关键.

7. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC < 90^\circ$, $AB \neq BC$, BE 是 AC 边上的中线. 按下列步骤作图: ①分别以点

B 和点 C 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}BC$ 的长为半径作弧, 两弧相交于点 M , N ; ②作直线 MN , 分别交 BC , BE

于点 D , O ; ③连接 CO , DE . 则下列结论错误的是 ()



- A. $OB = OC$ B. $\angle BOD = \angle COD$ C. $DE \parallel AB$ D. $\triangle BOC \cong \triangle BDE$

【答案】D

【解析】

【分析】利用基本作图得到 MN 垂直平分 BC , 根据线段垂直平分线的性质得到 $OB = OC$, $BD = CD$, $OD \perp BC$, 则可对 A 选项进行判断, 根据等腰三角形的“三线合一”可对 B 选项进行判断; 根据三角形中位线的性质对 C 选项进行判断; 由于 $BE < BC$, 则可对 D 选项进行判断.

【详解】解: 由作法得 MN 垂直平分 BC ,

$\therefore OB = OC$, $BD = CD$, $OD \perp BC$, 所以 A 选项不符合题意;

$\therefore OD$ 平分 $\angle BOC$,

$\therefore \angle BOD = \angle COD$, 所以 B 选项不符合题意;

$\therefore AE = CE$, $DB = DC$,

$\therefore DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE \parallel AB$, 所以 C 选项不符合题意;

$\therefore BE \neq BC$,

$\therefore \triangle BOC$ 与 $\triangle BDE$ 不全等; 所以 D 选项符合题意.

故选: D.

【点睛】本题考查了作图-基本作图: 熟练掌握 5 种基本作图 (作一条线段等于已知线段; 作一个角等于已知角; 作已知线段的垂直平分线; 作已知角的角平分线; 过一点作已知直线的垂线). 也考查了三角形中位线性质的.

8. 定义新运算 $a * b$: 对于任意实数 a , b 满足 $a * b = (a + b)(a - b) - 1$, 其中等式右边是通常的加法、减法、乘法运算, 例如 $3 * 2 = (3 + 2)(3 - 2) - 1 = 5 - 1 = 4$. 若 $x * k = 2x$ (k 为实数) 是关于 x 的方程, 则它的根的情况是 ()

- A. 有一个实数根 B. 有两个不相等的实数根
C. 有两个相等的实数根 D. 没有实数根

【答案】B

【解析】

【分析】根据新定义运算列出一元二次方程，根据一元二次方程根的判别式即可求解.

【详解】解: $\because a*b=(a+b)(a-b)-1$,

$$\therefore x*k=(x+k)(x-k)-1,$$

$$\therefore (x+k)(x-k)-1=2x$$

$$\text{即 } x^2-2x-k^2-1=0$$

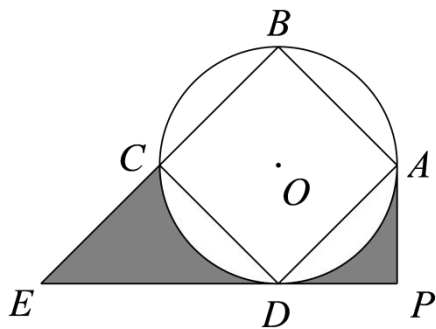
$$\Delta=4+4(k^2+1)=4k^2+8>0$$

 $\therefore$ 原方程有两个不相等的实数根

故选 B

【点睛】本题考查了新定义运算，一元二次方程根的判别式，掌握一元二次方程根的判别式是解题的关键.

9. 如图，边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ， PA ， PD 分别与 $\odot O$ 相切于点 A 和点 D， PD 的延长线与 BC 的延长线交于点 E，则图中阴影部分的面积为 ()



A. $5-\pi$

B. $5-\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{5}{2}-\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{5}{2}-\frac{\pi}{4}$

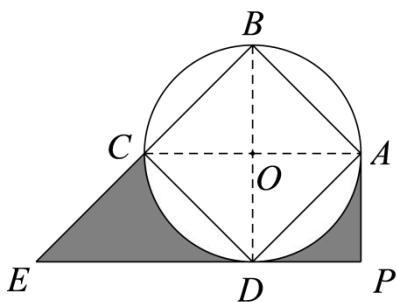
【答案】C

【解析】

【分析】根据正方形的性质以及切线的性质，求得 ED, DP 的长，勾股定理求得 AC 的长，进而根据

$$S_{\text{阴影}}=S_{\text{梯形}ACEP}-\frac{1}{2}S_{\odot O} \text{ 即可求解.}$$

【详解】如图，连接 AC ， BD ，



∵ 边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，即 $CD = \sqrt{2}$ ，

∴ $AC = 2$ ， AC ， BD 为 $\odot O$ 的直径， $\angle ECD = 90^\circ$ ，

∵ PA ， PD 分别与 $\odot O$ 相切于点 A 和点 D ，

∴ $EP \perp BD$ ，

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $\angle EBD = 45^\circ$ ，

∴ $\triangle BED$ 是等腰直角三角形，

∴ $ED = BD = AC = 2$ ，

∵ $AC \perp BD$ ， $PA \perp AO$ ， $PD \perp OD$ ，

∴ 四边形 $OAPD$ 是矩形，

∵ $OA = OD$ ，

∴ 四边形 $OAPD$ 是正方形，

∴ $DP = OA = 1$ ，

∴ $EP = ED + PD = 2 + 1 = 3$ ，

∴ $S_{\text{阴影}} = S_{\text{梯形}ACEP} - \frac{1}{2} S_{\odot O}$

$= \frac{1}{2} (2 + 3) \times 1 - \frac{1}{2} \pi \times 1^2$

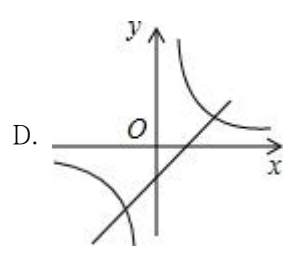
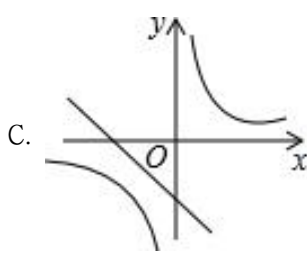
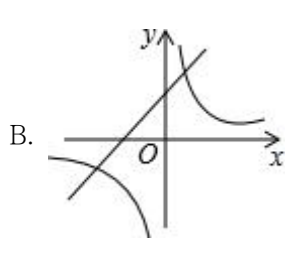
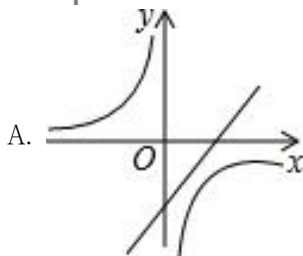
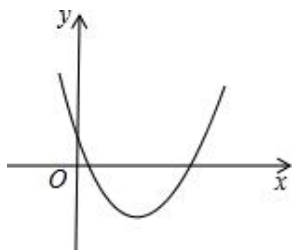
$= \frac{5}{2} - \frac{\pi}{2}$ 。

故选 C。

【点睛】 本题考查了圆的切线的性质，正方形的性质，勾股定理，等腰直角三角形的性质，掌握以上知识是解题的关键。

10. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示，则一次函数 $y = ax + b$ 和反比例函数 $y = \frac{c}{x}$ 在同一平面直角

坐标系中的图象可能是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】根据二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象开口向上，得出 $a > 0$ ，与 y 轴交点在 y 轴的正半轴，得出 $c > 0$ ，利用对称轴 $x = -\frac{b}{2a} > 0$ ，得出 $b < 0$ ，进而对照四个选项中的图象即可得出结论.

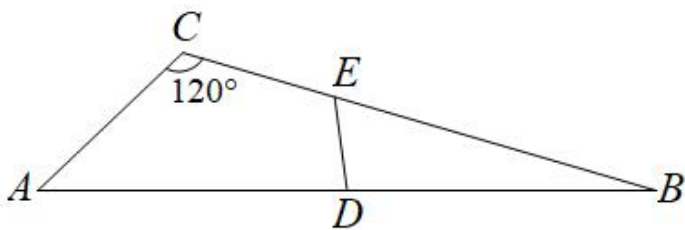
【详解】解：因为二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象开口向上，得出 $a > 0$ ，与 y 轴交点在 y 轴的正半轴，得出 $c > 0$ ，利用对称轴 $x = -\frac{b}{2a} > 0$ ，得出 $b < 0$ ，

所以一次函数 $y = ax + b$ 经过一、三、四象限，反比例函数 $y = \frac{c}{x}$ 经过一、三象限.

故选：D.

【点睛】本题考查了反比例函数的图象、一次函数的图象以及二次函数的图象，根据二次函数图象，得出 $a > 0$ 、 $b < 0$ 、 $c > 0$ 是解题的关键.

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC = 2\sqrt{2}$ ， $\angle ACB = 120^\circ$ ， D 是边 AB 的中点， E 是边 BC 上一点，若 DE 平分 $\triangle ABC$ 的周长，则 DE 的长为（ ）



A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

C. $\sqrt{2}$

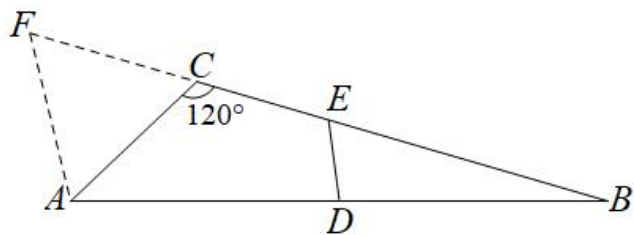
D. $\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】延长 BC 至 F ，使得 $CF = CA$ ，连接 AF ，构造等边三角形，根据题意可得 DE 是 $\triangle AFB$ 的中位线，即可求解。

【详解】解：如图，延长 BC 至 F ，使得 $CF = CA$ ，连接 AF ，



$$\because \angle ACB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle FCA = 60^\circ,$$

$$\text{又} \because CF = CA,$$

$\therefore \triangle AFC$ 是等边三角形，

$$\therefore AF = AC = 2\sqrt{2},$$

$\because D$ 是边 AB 的中点， E 是边 BC 上一点， DE 平分 $\triangle ABC$ 的周长，

$$\therefore AC + CE + AD = BE + BD, \quad AD = BD,$$

$$\therefore AC + CE = BE,$$

$$\because AC = CF,$$

$$\therefore CF + CE = BE,$$

$$\text{即 } EF = EB,$$

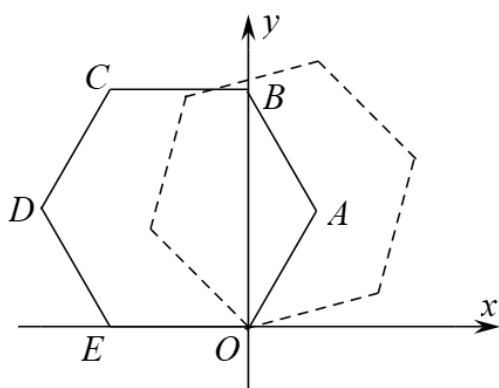
$\therefore ED$ 是 $\triangle ABF$ 的中位线，

$$\therefore ED = \frac{1}{2}FA = \sqrt{2}.$$

故选 C.

【点睛】本题考查了三角形中位线的性质与判定，等边三角形的性质，三角形中线的定义，构造等边三角形是解题的关键。

12. 如图，在平面直角坐标系中，将边长为 2 的正六边形 $OABCDE$ 绕点 O 顺时针旋转 n 个 45° ，得到正六边形 $OA_nB_nC_nD_nE_n$ ，当 $n = 2022$ 时，正六边形 $OA_nB_nC_nD_nE_n$ 的顶点 D_n 的坐标是 ()



- A. $(-\sqrt{3}, -3)$ B. $(-3, -\sqrt{3})$ C. $(3, -\sqrt{3})$ D. $(-\sqrt{3}, 3)$

【答案】A

【解析】

【分析】由于正六边形每次转 45° ，根据 $2022 \div 8 = 252 \cdots 6$ ，则 D_{2022} 的坐标与 D_6 的坐标相同，求得 D_6 的坐标即可求解.

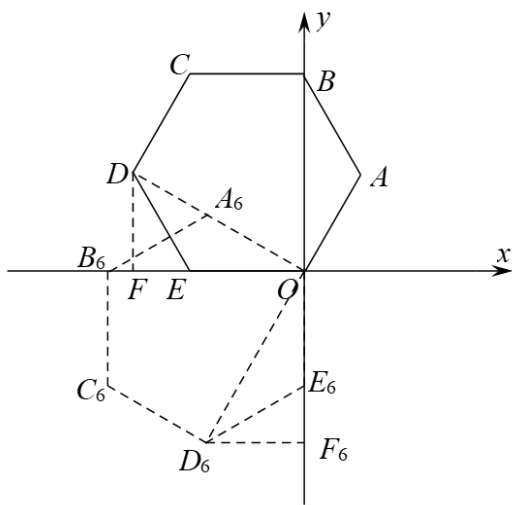
【详解】解：∵将边长为 2 的正六边形 $OABCDE$ 绕点 O 顺时针旋转 n 个 45° ，∵ $45^\circ \times 8 = 360^\circ$

当 $n = 2022$ 时， $2022 \div 8 = 252 \cdots 6$

则 D_{2022} 的坐标与 D_6 的坐标相同，∵ $\angle DOD_6 = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$

则 $OD \perp OD_6$

如图，过点 D 作 $DF \perp x$ 于 F ，过点 D_6 作 $D_6F_6 \perp y$ 轴于点 F_6 ，



∵ $OE = DE = 2$ ， $OD = OD_6$ ，

$$\therefore \triangle ODF \cong \triangle OD_6F_6,$$

$$\therefore DF = D_6F_6, OF = OF_6,$$

$$\because \text{正六边形 } OABCDE \text{ 的一个外角 } \angle DEF = \frac{360}{6} = 60^\circ,$$

$$\therefore DF = \sin \angle DEF \times DE = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3},$$

$$\because \angle DEO = 180^\circ - \angle DEF = 120^\circ, DE = EO,$$

$$\therefore \angle DOF = 30^\circ,$$

$$\therefore OF = \frac{DF}{\tan \angle DOF} = \sqrt{3}DF = 3,$$

$$\therefore D_6F_6 = DF = \sqrt{3}, OF_6 = OF = 3,$$

$$\therefore D_6(-\sqrt{3}, -3),$$

$$\therefore D_{2022}(-\sqrt{3}, -3),$$

故选 A.

【点睛】本题考查了旋转的性质，解直角三角形，正六边形的性质，正多边形的外角和，内角和，求得 D_{2022} 的位置是解题的关键.

二、填空题

13. 若二次根式 $\sqrt{2x-1}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件可直接进行求解.

【详解】解：由二次根式 $\sqrt{2x-1}$ 在实数范围内有意义可得：

$$2x-1 \geq 0, \text{ 解得: } x \geq \frac{1}{2};$$

故答案为 $x \geq \frac{1}{2}$.

【点睛】本题主要考查二次根式有意义的条件，熟练掌握二次根式有意义的条件是解题的关键.

14. 若 $a+2b=8, 3a+4b=18$ ，则 $a+b$ 的值为_____.

【答案】 5

【解析】

【分析】将 $3a + 4b = 18$ 变形可得 $a + 2a + 4b = 18$ ，因为 $a + 2b = 8$ ，所以得到 $a = 2$ ，再求出 b ，得到 $a + b$

【详解】将 $3a + 4b = 18$ 变形可得 $a + 2a + 4b = 18$ ，因为 $a + 2b = 8$ ，所以 $2a + 4b = 16$ ，得到 $a = 2$ ，将 $a = 2$ 代入 $a + 2b = 8$ ，得到 $b = 3$ ，所以 $a + b = 5$ ，故填 5

【点睛】本题考查代数式的求值，以及二元一次方程组的解法，本题也可采用加减消元或者代入消元法进行解题

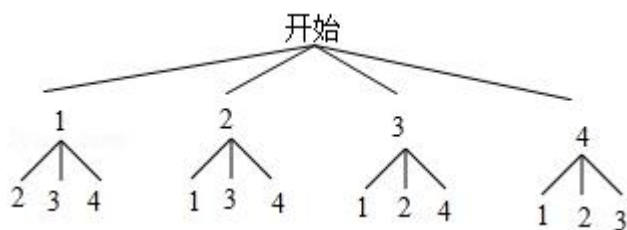
15. 在一个不透明口袋有四个完全相同的小球，把它们分别标号为 1, 2, 3, 4. 随机摸出一个球后不放回，再随机摸出一个，则两次摸出的小球标号之和为 5 的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】先利用树状图列出两次取出的小球标号的所有可能情况数，再找出两次取出的小球标号的和等于 5 的情况数，最后求出概率即可.

【详解】解：画树状图得：



由树状图可知：共有 12 种等可能的结果，两次摸出的小球标号之和等于 5 的有 4 种情况，

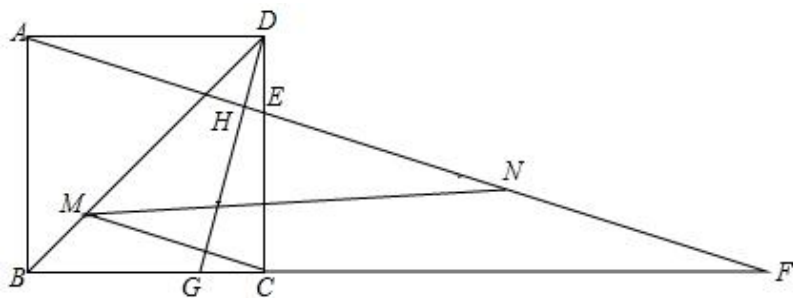
∴ 两次摸出的小球标号之和等于 5 的概率是： $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

故答案为： $\frac{1}{3}$.

【点睛】本题主要考查求随机事件概率的方法，利用树状图列出两次取出的小球标号的所有可能情况是解答本题的关键.

16. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4, E 为 CD 上一点, 连接 AE 并延长交 BC 的延长线于点 F , 过点 D 作 $DG \perp AF$, 交 AF 于点 H , 交 BF 于点 G , N 为 EF 的中点, M 为 BD 上一动点, 分别连接 MC , MN . 若

$\frac{S_{\triangle DCG}}{S_{\triangle FCE}} = \frac{1}{9}$, 则 $MC + MN$ 的最小值为_____.

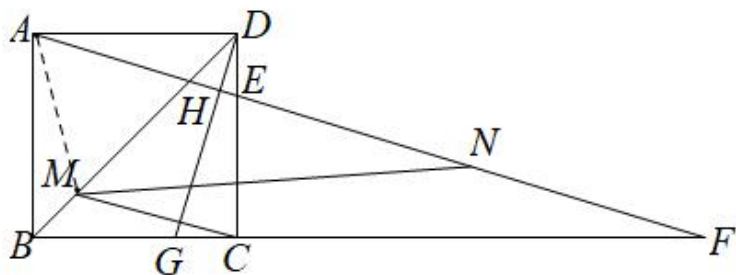


【答案】 $\frac{5\sqrt{17}}{2}$ $\frac{5}{2}\sqrt{17}$

【解析】

【分析】由正方形的性质, 可得 A 点与 C 点关于 BD 对称, 则有 $MN + CM = MN + AM \geq AN$, 所以当 A、M、N 三点共线时, $MN + CM$ 的值最小为 AN , 先证明 $\triangle DCG \sim \triangle FCE$, 再由 $\frac{S_{\triangle DCG}}{S_{\triangle FCE}} = \frac{1}{9}$, 可知 $\frac{CD}{CF} = \frac{1}{3}$, 分别求出 $DE = 1$, $CE = 3$, $CF = 12$, 即可求出 AN .

【详解】解: 连接 AM ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,
 $\therefore$ A 点与 C 点关于 BD 对称,
 $\therefore CM = AM$,
 $\therefore MN + CM = MN + AM \geq AN$,
 $\therefore$ 当 A、M、N 三点共线时, $MN + CM$ 的值最小,
 $\because AD \parallel CF$,
 $\therefore \angle DAE = \angle F$,
 $\because \angle DAE + \angle DEH = 90^\circ$,
 $\because DG \perp AF$,
 $\therefore \angle CDG + \angle DEH = 90^\circ$,
 $\therefore \angle DAE = \angle CDG$,

$$\therefore \angle CDG = \angle F,$$

$$\therefore \triangle DCG \sim \triangle FCE,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle DCG}}{S_{\triangle FCE}} = \frac{1}{9},$$

$$\therefore \frac{CD}{CF} = \frac{1}{3},$$

$\because$ 正方形边长为 4,

$$\therefore CF = 12,$$

$$\therefore AD \parallel CF,$$

$$\therefore \frac{AD}{CF} = \frac{DE}{CE} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore DE = 1, \quad CE = 3,$$

在 $Rt\triangle CEF$ 中, $EF^2 = CE^2 + CF^2$,

$$\therefore EF = \sqrt{3^2 + 12^2} = 3\sqrt{17},$$

$\because N$ 是 EF 的中点,

$$\therefore EN = \frac{3\sqrt{17}}{2},$$

在 $Rt\triangle ADE$ 中, $EA^2 = AD^2 + DE^2$,

$$\therefore AE = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17},$$

$$\therefore AN = AE + EN = \frac{5\sqrt{17}}{2},$$

$$\therefore MN + MC \text{ 的最小值为 } \frac{5\sqrt{17}}{2},$$

故答案为: $\frac{5\sqrt{17}}{2}$.

【点睛】 本题考查轴对称求最短距离, 解题的关键是熟练掌握正方形的性质, 用轴对称求最短距离的方法, 灵活应用三角形相似、勾股定理.

三、解答题

17.

$$(1) \text{ 计算 } (-1)^2 + (\pi - 3.14)^0 + 2\sin 60^\circ + |1 - \sqrt{3}| - \sqrt{12}.$$

$$(2) \text{ 先化简, 再求值: } (x+3)^2 + (x+3)(x-3) - 2x(x+1), \text{ 其中 } x = \frac{1}{2}.$$

【答案】 (1) 1 (2) $4x; 2$

【解析】

【分析】(1) 先化简各式, 然后再进行计算即可解答;

(2) 先利用平方差公式, 完全平方公式、单项式乘多项式计算括号里, 再算括号外, 然后把 x 的值代入化简后的式子进行计算即可解答.

【小问 1 详解】

解: 原式 $=1+1+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}$

$=1+1+\sqrt{3}+\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}$

$=1;$

【小问 2 详解】

解: $(x+3)^2+(x+3)(x-3)-2x(x+1)$

$=x^2+6x+9+x^2-9-2x^2-2x$

$=4x;$

当 $x=\frac{1}{2}$ 时, 原式 $=4\times\frac{1}{2}=2.$

【点睛】本题考查了整式的混合运算-化简求值, 实数的运算, 锐角三角形函数, 零指数幂, 绝对值及二次根式的性质, 准确熟练地进行计算是解题的关键.

18. 国务院教育督导委员会办公室印发的《关于组织责任督学进行“五项管理”督导的通知》指出, 要加强中小学生学习、睡眠、手机、读物、体质管理. 某校数学社团成员采用随机抽样的方法, 抽取了七年级部分学生, 对他们一周内平均每天的睡眠时间 t (单位: 小时) 进行了调查, 将数据整理后得到下列不完整的统计表:

睡眠时间	频数	频率
$t < 7$	3	0.06
$7 \leq t < 8$	a	0.16
$8 \leq t < 9$	10	0.20
$9 \leq t < 10$	24	b
$t \geq 10$	5	0.10

请根据统计表中的信息回答下列问题.

(1) $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 请估计该校 600 名七年级学生中平均每天的睡眠时间不足 9 小时的人数;

(3) 研究表明, 初中生每天睡眠时间低于 9 小时, 会影响学习效率. 请你根据以上调查统计结果, 向学校提出一条合理化的建议.

【答案】(1) 8;0.48

(2) 252 人 (3) 建议学校尽量让学生在学校完成作业, 课后少布置作业

【解析】

【分析】(1) 按照频率=频数÷总体数量进行求解, 根据睡眠时间 $t < 7$ 组别的频数和频率即可求得本次调查的总人数, 再按照频率=频数÷总体数量进行求解, 即可得到 a , b 的值.

(2) 根据频率估计概率, 即可计算出该校 600 名八年级学生中睡眠不足 9 小时的人数.

(3) 根据 (2) 中结果, 即可知道该学校每天睡眠不足 9 小时的人数, 根据实际情况提出建议.

【小问 1 详解】

根据睡眠时间 $t < 7$ 组别的频数和频率, 本次调查的总体数量=频数÷频率= $\frac{3}{0.06}=50$

$\therefore$ 睡眠时间 $7 \leq t < 8$ 组别的频数 $a = 50 \times 0.16 = 8$.

$\therefore$ 睡眠时间 $9 \leq t < 10$ 组别的频率 $b = \frac{24}{50} = 0.48$.

故答案为: 8;0.48

【小问 2 详解】

$\therefore$ 每天的睡眠时间不足 9 小时的人数的频率之和为 $0.20 + 0.16 + 0.06 = 0.42$

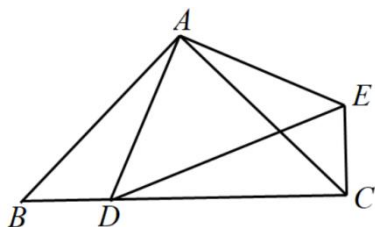
$\therefore$ 该校 600 名八年级学生中睡眠不足 9 小时的人数为 $600 \times 0.42 = 252$ (人).

【小问 3 详解】

根据 (2) 中求得的该学校每天睡眠时长低于 9 小时的人数, 建议学校尽量让学生在学校完成作业, 课后少布置作业.

【点睛】 本题主要考查了用频率估计概率, 解题的关键是掌握频率=频数÷总体数量, 解答本题的关键是掌握频率, 频数和总体数量的关系.

19. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 1$, D 是 BC 边上的一点, 以 AD 为直角边作等腰 $Rt\triangle ADE$, 其中 $\angle DAE = 90^\circ$, 连接 CE .



(1) 求证: $\triangle ABD \cong \triangle ACE$;

(2) 若 $\angle BAD = 22.5^\circ$ 时, 求 BD 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $\sqrt{2} - 1$

【解析】

【分析】(1) 根据等腰直角三角形的性质可得 $\angle DAE = 90^\circ$, $AD = AE$, 进而证明 $\angle BAD = \angle CAE$, 即可根据 SAS 证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$;

(2) 勾股定理求得 $BC = \sqrt{2}$ 根据已知条件证明 $\triangle ADC$ 是等腰三角形可得 $AC = DC$, 进而根据 $BD = BC - CD$ 即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because \triangle ADE$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle DAE = 90^\circ, AD = AE,$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ - \angle DAC = \angle CAE,$$

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACE$ 中

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE; \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE,$$

【小问 2 详解】

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 1$,

$$\therefore BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{2},$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ, \angle BAD = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = 90^\circ - \angle BAD = 67.5^\circ,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ACD = \frac{1}{2}(180^\circ - 90^\circ) = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle ACD - \angle DAC = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ACD,$$

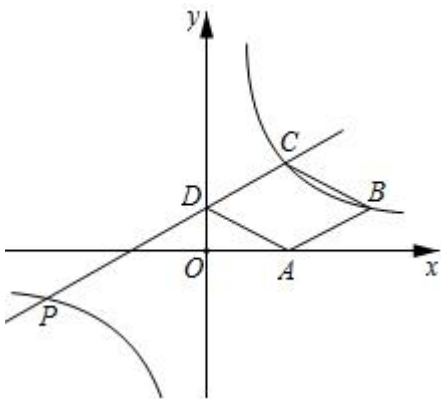
$$\therefore AC = DC = 1,$$

$$\therefore BD = BC - DC = \sqrt{2} - 1.$$

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质与判定，勾股定理，全等三角形的性质与判定，掌握等腰三角形的性质与判定是解题的关键.

20. 如图，在平面直角坐标系中，菱形 $ABCD$ 的顶点 D 在 y 轴上， A ， C 两点的坐标分别为 $(4, 0)$ ， $(4, m)$ ，

直线 CD ： $y = ax + b$ ($a \neq 0$) 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象交于 C ， $P(-8, -2)$ 两点.



(1) 求该反比例函数的解析式及 m 的值;

(2) 判断点 B 是否在该反比例函数的图象上，并说明理由.

【答案】(1) $y = \frac{16}{x}$, $m = 4$

(2) 点 B 在该反比例函数的图象上，理由见解答

【解析】

【分析】(1) 因为点 $P(-8, -2)$ 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上，所以代入 P 点坐标即可求出双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 的函数关系式，

又因为点 $C(4, m)$ 在 $y = \frac{k}{x}$ 双曲线上，代入即可求出 m 的值;

(2) 先求出点 B 的坐标，判断即可得出结论.

【小问 1 详解】

解：将点 $P(-8, -2)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 中，得 $k = -8 \times (-2) = 16$,

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y = \frac{16}{x}$,

将点 $C(4, m)$ 代入 $y = \frac{16}{x}$ 中,

$$\text{得 } m = \frac{16}{4} = 4;$$

【小问 2 详解】

解: 因为四边形 $ABCD$ 是菱形, $A(4, 0)$, $C(4, 4)$,

$$\therefore m = 4, \quad B(8, \frac{1}{2}m),$$

$$\therefore B(8, 2),$$

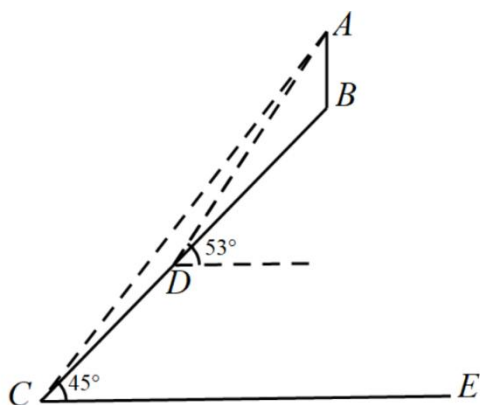
由 (1) 知双曲线的解析式为 $y = \frac{16}{x}$;

$$\because 2 \times 8 = 16,$$

$\therefore$ 点 B 在双曲线上.

【点睛】此题是反比例函数综合题, 主要考查了待定系数法, 菱形的性质, 解题的关键是用 m 表示出点 D 的坐标.

21. 随着我国科学技术的不断发展, 5G 移动通信技术日趋完善. 某市政府为了实现 5G 网络全覆盖, 2021~2025 年拟建设 5G 基站 3000 个, 如图, 在斜坡 CB 上有一建成的 5G 基站塔 AB , 小明在坡脚 C 处测得塔顶 A 的仰角为 45° , 然后他沿坡面 CB 行走了 50 米到达 D 处, D 处离地平面的距离为 30 米且在 D 处测得塔顶 A 的仰角 53° . (点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 均在同一平面内, CE 为地平线) (参考数据: $\sin 53^\circ \approx \frac{4}{5}$, $\cos 53^\circ \approx \frac{3}{5}$, $\tan 53^\circ \approx \frac{4}{3}$)



(1) 求坡面 CB 的坡度;

(2) 求基站塔 AB 的高.

【答案】(1) 3:4

(2) 基站塔 AB 的高为 17.5 米

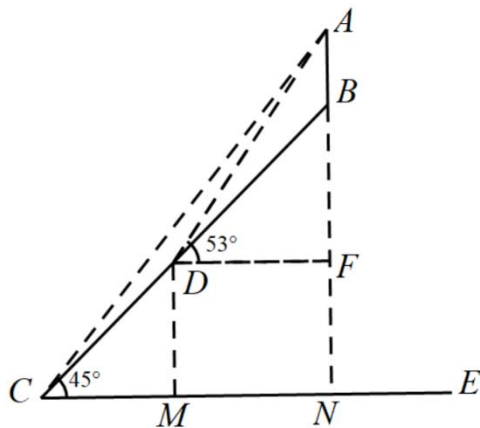
【解析】

【分析】(1) 过点 C 、 D 分别作 AB 的垂线，交 AB 的延长线于点 N 、 F ，过点 D 作 $DM \perp CE$ ，垂足为 M ，利用勾股定理求出 CM ，然后利用坡度的求解方式求解即可；

(2) 设 $DF = 4a$ 米，则 $MN = 4a$ 米， $BF = 3a$ 米，根据 $\angle ACN = 45^\circ$ ，求出 $AN = CN = (40 + 4a)$ 米， $AF = (4a + 10)$ 米. 在 $Rt\triangle ADF$ 中，求出 $a = \frac{15}{2}$ ；再根据 $AB = AF - BF$ (米).

【小问 1 详解】

解：如图，过点 C 、 D 分别作 AB 的垂线，交 AB 的延长线于点 N 、 F ，过点 D 作 $DM \perp CE$ ，垂足为 M .



根据他沿坡面 CB 行走了 50 米到达 D 处， D 处离地平面的距离为 30 米，

$\therefore CD = 50$ (米)， $DM = 30$ (米)，

根据勾股定理得： $CM = \sqrt{CD^2 - DM^2} = 40$ (米)

$\therefore$ 坡面 CB 的坡度为： $\frac{DM}{CM} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$ ，

即坡面 CB 的坡度比为 3:4；

【小问 2 详解】

解：设 $DF = 4a$ 米，则 $MN = 4a$ 米， $BF = 3a$ 米，

$\because \angle ACN = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle CAN = \angle ACN = 45^\circ$ ，

$\therefore AN = CN = (40 + 4a)$ 米，

$\therefore AF = AN - FN = AN - DM = 40 + 4a - 30 = (4a + 10)$ 米.

在 $Rt\triangle ADF$ ，

$\because DF = 4a$ 米， $AF = (4a + 10)$ 米， $\angle ADF = 53^\circ$ ，

$\therefore \tan \angle ADF = \frac{AF}{DF} = \frac{4a + 10}{4a} = \frac{4}{3}$ ，

$\therefore$ 解得 $a = \frac{15}{2}$ ；

$$\therefore AF = 4a + 10 = 4 \times \frac{15}{2} + 10 = 40 \text{ (米)},$$

$$BF = 3a = 3 \times \frac{15}{2} = \frac{45}{2} \text{ (米)},$$

$$\therefore AB = AF - BF = 40 - \frac{45}{2} = \frac{35}{2} \text{ (米)}.$$

答: 基站塔 AB 的高为 17.5 米.

【点睛】 本题考查解直角三角形, 通过作垂线构造直角三角形, 利用直角三角形的边角关系和坡度的意义进行计算是常用的方法.

22. 阅读材料: 被誉为“世界杂交水稻之父”的“共和国勋章”获得者袁隆平, 成功研发出杂交水稻, 杂交水稻的亩产量是普通水稻的亩产量的 2 倍. 现有两块试验田, A 块种植杂交水稻, B 块种植普通水稻, A 块试验田比 B 块试验田少 4 亩.

(1) A 块试验田收获水稻 9600 千克、 B 块试验田收获水稻 7200 千克, 求普通水稻和杂交水稻的亩产量各是多少千克?

(2) 为了增加产量, 明年计划将种植普通水稻的 B 块试验田的一部分改种杂交水稻, 使总产量不低于 17700 千克, 那么至少把多少亩 B 块试验田改种杂交水稻?

【答案】 (1) 普通水稻亩产量是 600 千克, 杂交水稻的亩产量是 1200 千克.

(2) 至少把 B 块试验田改 1.5 亩种植杂交水稻.

【解析】

【分析】 (1) 设普通水稻的亩产量是 x 千克, 则杂交水稻的亩产量是 $2x$ 千克, 利用种植亩数=总产量÷亩产量, 结合 A 块试验田比 B 块试验田少 4 亩, 即可得出关于 x 的分式方程, 解之即可得出普通水稻的亩产量, 再将其代入 $2x$ 中即可求出杂交水稻的亩产量;

(2) 设把 B 块试验田改 y 亩种植杂交水稻, 利用总产量=亩产量×种植亩数, 结合总产量不低于 17700 千克, 即可得出关于 y 的一元一次不等式, 解之取其中的最小值即可得出结论.

【小问 1 详解】

解: 设普通水稻亩产量是 x 千克, 则杂交水稻的亩产量是 $2x$ 千克,

$$\text{依题意得: } \frac{7200}{x} - \frac{9600}{2x} = 4,$$

$$\text{解得: } x = 600;$$

经检验, $x=600$ 是原方程的解, 且符合题意,

$$\therefore 2x = 2 \times 600 = 1200.$$

答: 普通水稻亩产量是 600 千克, 杂交水稻的亩产量是 1200 千克.

【小问 2 详解】

解: 设把 B 块试验田改 y 亩种植杂交水稻,

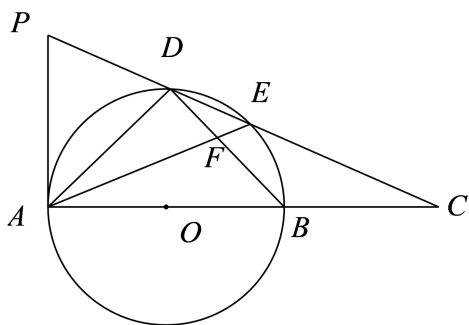
依题意得: $9600 + 600 \left(\frac{7200}{600} - y \right) + 1200y \geq 17700$,

解得: $y \geq 1.5$.

答: 至少把 B 块试验田改 1.5 亩种植杂交水稻.

【点睛】 本题考查了分式方程的应用以及一元一次不等式的应用, 解题的关键是: (1) 找准等量关系, 正确列出分式方程; (2) 根据各数量之间的关系, 正确列出一元一次不等式.

23. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 E 是劣弧 BD 上一点, $\angle PAD = \angle AED$, 且 $DE = \sqrt{2}$, AE 平分 $\angle BAD$, AE 与 BD 交于点 F .



(1) 求证: PA 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\tan \angle DAE = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 EF 的长;

(3) 延长 DE , AB 交于点 C , 若 $OB = BC$, 求 $\odot O$ 的半径.

【答案】 (1) 见解析 (2) 1

(3) 2

【解析】

【分析】 (1) 根据 AB 是 $\odot O$ 的直径, 可得 $\angle ADB = 90^\circ$, 即 $\angle DAB + \angle DBA = 90$, 根据同弧所对的圆周角相等, 以及已知条件可得 $\angle PAD = \angle ABD$, 等量代换后即可得 $\angle PAB = 90^\circ$, 进而得证;

(2) 连接 OE, EB , 根据角平分线的定义, 以及等边对等角可得 $AD \parallel OE$, 根据同弧所对的圆周角相等可得 $\angle DAE = \angle DBE$, 由垂径定理可得 $DE = EB = \sqrt{2}$, 进而可得 $\tan \angle EBF = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即可求解.

(3) 过点 B 作 $BG \parallel AD$, 根据平行线分线段成比例, 求得 $DG = 2\sqrt{2}$, 设 $\odot O$ 的半径为 x , 则 $GB = \frac{1}{2}OE = \frac{1}{2}x$, 证明 $\triangle CGB \sim \triangle CDA$, 可得 $AD = \frac{3}{2}x$, 在 $Rt\triangle ADB$ 中, $AD^2 + DB^2 = AB^2$, 勾股定理建立方程, 解方程即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB + \angle DBA = 90^\circ,$$

$$\because \widehat{AD} = \widehat{AD},$$

$$\therefore \angle AED = \angle ABD,$$

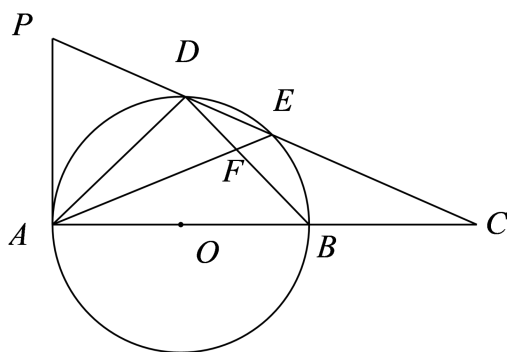
$$\because \angle PAD = \angle AED,$$

$$\therefore \angle PAD = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle PAD = \angle BAD + \angle ABD = 90^\circ,$$

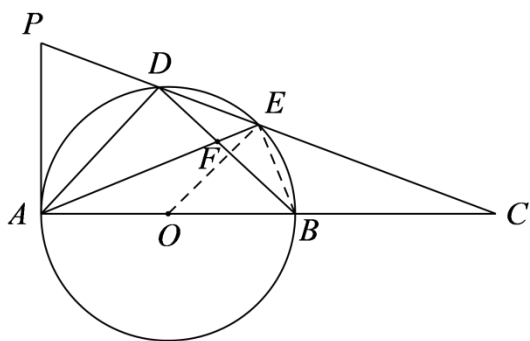
即 $\angle PAB = 90^\circ$,

$\therefore PA$ 是 $\odot O$ 的切线,



【小问 2 详解】

如图, 连接 OE, EB ,



$\because AE$ 平分 $\angle BAD$,

$$\therefore \angle DAE = \angle BAE,$$

$$\therefore DE = BE = \sqrt{2}$$

$$\therefore OE \perp BD$$

$$\because OA = OE,$$

$$\therefore \angle OEA = \angle OAE,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AEO,$$

$$\therefore AD \parallel OE,$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore AD \perp DB, \quad AE \perp EB,$$

即 $\angle ADF = \angle BEF = 90^\circ$,

$$\therefore \overset{\circ}{DE} = \overset{\circ}{DE}$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DBE,$$

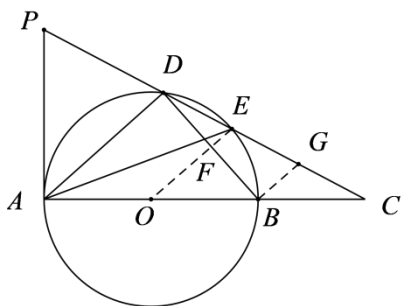
$$\therefore \tan \angle EBF = \tan \angle DAE = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \frac{EF}{EB} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore EF = \frac{\sqrt{2}}{2} EB = 1;$$

【小问 3 详解】

如图, 过点 B 作 $BG \parallel AD$,



由 (2) 可知 $AD \parallel OE$,

$$\therefore OE \parallel BG,$$

$$\because AO = OB = BC,$$

$$\therefore DE = EG = GC,$$

设 $\odot O$ 的半径为 x , 则 $GB = \frac{1}{2} OE = \frac{1}{2} x$,

$$\because AD \parallel BG,$$

$$\therefore \triangle CGB \sim \triangle CDA,$$

$$\therefore \frac{CG}{CD} = \frac{GB}{AD},$$

$$\therefore AD = 3GB = \frac{3}{2}x,$$

$$\because OE \perp DB,$$

$$\therefore DB \perp GB,$$

$$\therefore DE = \sqrt{2},$$

$$\therefore DG = 2DE = 2\sqrt{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle DBG \text{ 中, } DB^2 = DG^2 - GB^2 = 8 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADB \text{ 中, } AD^2 + DB^2 = AB^2,$$

$$\text{即 } \left(\frac{3}{2}x\right)^2 + 8 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = (2x)^2,$$

解得: $x = 2$ (负值舍去),

$\therefore \odot O$ 的半径为 2.

【点睛】 本题考查了切线的判定, 圆周角定理的推论, 平行线分线段成比例, 相似三角形的性质与判定, 解直角三角形, 综合运用以上知识是解题的关键.

24. 在平面直角坐标系中, 如果点 P 的横坐标和纵坐标相等, 则称点 P 为和谐点, 例如: 点 $(1,1)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, ……都是和谐点.

(1) 判断函数 $y = 2x + 1$ 的图象上是否存在和谐点, 若存在, 求出其和谐点的坐标;

(2) 若二次函数 $y = ax^2 + 6x + c$ ($a \neq 0$) 的图象上有且只有一个和谐点 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

①求 a , c 的值;

②若 $1 \leq x \leq m$ 时, 函数 $y = ax^2 + 6x + c + \frac{1}{4}$ ($a \neq 0$) 的最小值为 -1 , 最大值为 3 , 求实数 m 的取值范围.

【答案】 (1) 存在, $(-1, -1)$

(2) ① $a = -1, c = -\frac{25}{4}$; $3 \leq m \leq 5$

【解析】

【分析】 (1) 根据定义可知, 和谐点都在 $y = x$ 上, 联立两直线解析式即可求解;

(2) ①根据题意可知二次函数与 $y = x$ 相切于点 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$, 据此即可求解;

②根据①得到解析式, 根据二次函数图象的性质分析即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 P 的横坐标和纵坐标相等, 则称点 P 为和谐点,

$\therefore$ 和谐点都在 $y = x$ 上,

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2x + 1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases},$$

$\therefore y = 2x + 1$ 上的和谐点为 $(-1, -1)$;

【小问 2 详解】

解: ① $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + 6x + c (a \neq 0)$ 的图象上有且只有一个和谐点 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$,

$$\therefore \begin{cases} y = ax^2 + 6x + c \\ y = x \end{cases} \text{ 即 } ax^2 + 5x + c = 0 \text{ 有两个相等的实数根,}$$

$$\Delta = 25 - 4ac = 0,$$

$$\text{解得 } ac = \frac{25}{4} \text{ ①,}$$

将 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 代入 $y = ax^2 + 6x + c (a \neq 0)$ 得,

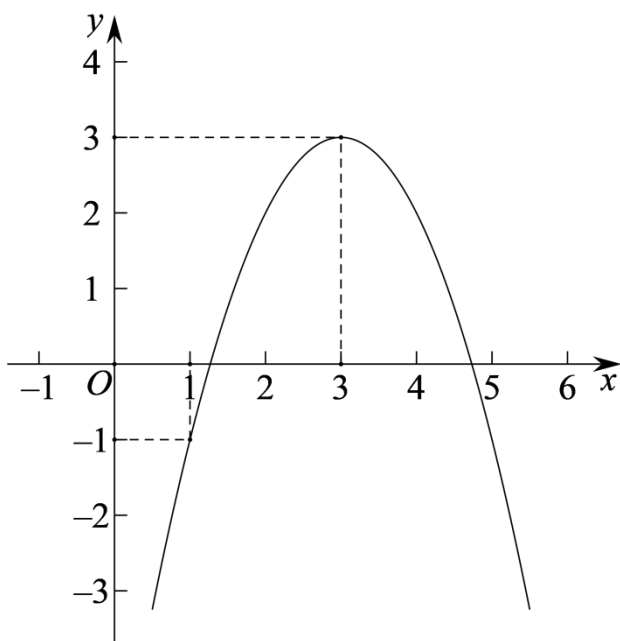
$$\frac{5}{2} = \frac{25}{4}a + \frac{30}{2} + c \text{ ②,}$$

$$\text{联立①②, 得 } a = -1, c = -\frac{25}{4},$$

$$\text{②} \because a = -1, c = -\frac{25}{4},$$

$$\therefore y = ax^2 + 6x + c + \frac{1}{4} = -x^2 + 6x - 6 = -(x-3)^2 + 3,$$

其顶点坐标为 $(3, 3)$, 则最大值为 3,



在 $x < 3$ 时, y 随 x 的增大而增大, 当 $x = 1$ 时, $y = -(1-3)^2 + 3 = -1$,

根据对称轴可知, 当 $x = 5$ 时, $y = -1$,

$\therefore 1 \leq x \leq m$ 时, 函数 $y = -(x-3)^2 + 3$ 的最小值为 -1 , 最大值为 3 ,

根据函数图象可知, 当 $1 \leq x \leq 5$ 时, 函数 $y = -(x-3)^2 + 3$ 的最小值为 -1 , 最大值为 3 ,

$\therefore$ 实数 m 的取值范围为: $3 \leq m \leq 5$.

【点睛】 本题考查了新定义问题, 两直线交点问题, 一次函数与抛物线交点问题, 待定系数法求二次函数解析式, 二次函数的性质, 理解新定义是解题的关键.

25. 如图 1, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 10$, $AD = 8$, E 是 AD 边上的一点, 连接 CE , 将矩形 $ABCD$ 沿 CE 折叠, 顶点 D 恰好落在 AB 边上的点 F 处, 延长 CE 交 BA 的延长线于点 G .

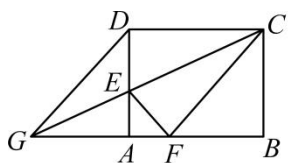


图1

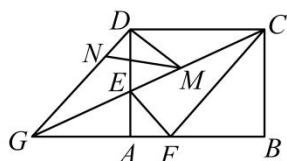
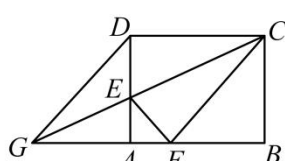


图2



备用图

- (1) 求线段 AE 的长;
- (2) 求证四边形 $DGFC$ 为菱形;
- (3) 如图 2, M , N 分别是线段 CG , DG 上的动点 (与端点不重合), 且 $\angle DMN = \angle DCM$, 设 $DN = x$, 是否存在这样的点 N , 使 $\triangle DMN$ 是直角三角形? 若存在, 请求出 x 的值; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $AE = 3$

(2) 见解析 (3) 存在, $x=2$ 或 2.5

【解析】

【分析】(1) 根据在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中, $AE^2 + AF^2 = EF^2$, 根据矩形的折叠与勾股定理即可求解;

(2) 根据 (1) 的结论分别求得 GF, DG , 根据四边相等的四边形是菱形即可得证;

(3) 分 $\angle NDM = 90^\circ$ 和 $\angle DNM = 90^\circ$ 两种情况分别讨论即可求解.

【小问 1 详解】

解: 如图

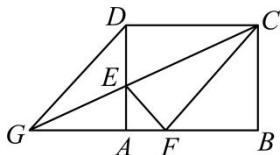


图1

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $AB=10$, $AD=8$,

$\therefore AD=BC=8, DC=AB=10$, $\angle DAB=\angle B=90^\circ$,

$\because$ 将矩形 $ABCD$ 沿 CE 折叠, 顶点 D 恰好落在 AB 边上的点 F 处,

$\therefore CF=CD=10$,

在 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中, $BF=\sqrt{CF^2-BC^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$,

$\therefore AF=AB-BF=10-6=4$,

设 $AE=a$, 则 $DE=EF=8-a$,

在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中, $AE^2+AF^2=EF^2$,

$$a^2+4^2=(8-a)^2,$$

解得 $a=3$,

$\therefore AE=3$;

【小问 2 详解】

$\because DE=AD-AE=8-3=5$,

$$\therefore \tan \angle DCE = \frac{DE}{CD} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2},$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore DC \parallel GB$,

$\therefore \angle EGA = \angle DCE$,

$$\therefore \tan \angle EGA = \frac{EA}{GA} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore EA = 3,$$

$$\therefore GA = 6,$$

$$\text{Rt}\triangle GAD \text{ 中, } DG = \sqrt{AG^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$$\therefore FG = GA + AF = 6 + 4 = 10,$$

$$\therefore GD = DC = CF = GF,$$

$\therefore$ 四边形 $DGFC$ 为菱形;

【小问 3 详解】

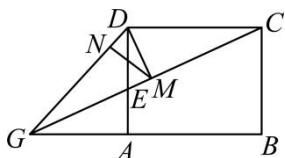
$\because \angle DMN = \angle DCM$, 设 $DN = x$, $\triangle DMN$ 是直角三角形

设 $\angle DMN = \angle DCM = \alpha$

由 (2) 可得 $\tan \angle DCM = \frac{1}{2}$

$$\therefore \tan \angle DMN = \frac{1}{2}$$

①当 $\angle DNM = 90^\circ$ 时, 如图,



$$\therefore DN = \frac{1}{2} NM, \angle GNM = 90^\circ,$$

$$\because GD = CD$$

$$\therefore \angle DGM = \angle DCM = \alpha$$

$$\therefore \angle NMG = 90^\circ - \alpha$$

$$\therefore \angle DMG = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$$

$$\because DG = DC = 10$$

$$\because \tan \angle DGM = \tan \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\therefore GN = 2NM$$

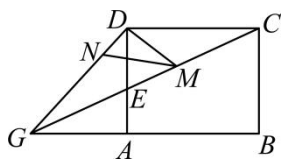
$$\therefore 10 - x = 2 \times 2x$$

解得 $x = 2$;

②当 $\angle NDM = 90^\circ$ 时,

$$\text{同理可得 } DN = \frac{1}{2} DM, DM = \frac{1}{2} GD$$

$$\therefore ND = \frac{1}{4} DG = \frac{5}{2}$$



综上所述, $ND = 2$ 或 2.5

【点睛】 本题考查了矩形的性质, 折叠的性质, 勾股定理, 解直角三角形, 菱形的判定, 掌握以上知识是解题的关键.

