

2022 年甘肃省兰州市中考数学真题

一、选择题

1. 计算 $\sqrt{4}$ 的结果是 ()A. ± 2

B. 2

C. $\pm\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$

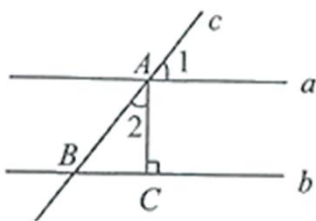
【答案】B

【解析】

【分析】由于 $\sqrt{4}$ 表示 4 的算术平方根，根据算术平方根的定义即可求出结果.【详解】4 的算术平方根是 2，即 $\sqrt{4}=2$,

故选 B.

【点睛】本题考查算术平方根的定义，比较基础，正确把握算术平方根的定义是解题的关键.

2. 如图，直线 $a \parallel b$ ，直线 c 与直线 a, b 分别相交于点 A, B ， $AC \perp b$ ，垂足为 C 。若 $\angle 1 = 52^\circ$ ，则 $\angle 2 =$ ()A. 52° B. 45° C. 38° D. 26°

【答案】C

【解析】

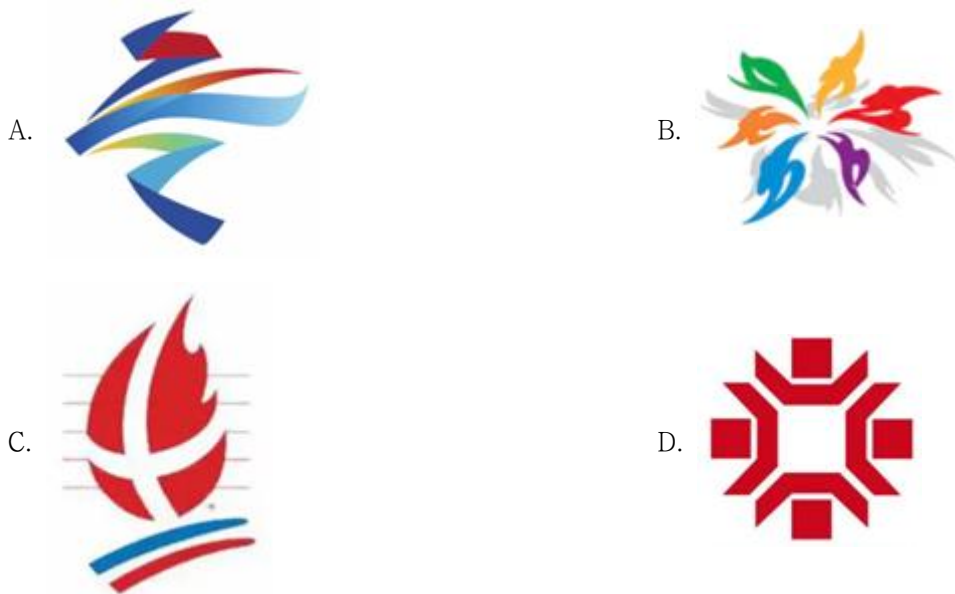
【分析】根据平行线的性质可得 $\angle ABC=52^\circ$ ，根据垂直定义可得 $\angle ACB=90^\circ$ ，然后利用直角三角形的两个锐角互余，进行计算即可解答.【详解】解： $\because a \parallel b$, $\therefore \angle 1 = \angle ABC = 52^\circ$, $\because AC \perp b$, $\therefore \angle ACB = 90^\circ$, $\therefore \angle 2 = 90^\circ - \angle ABC = 38^\circ$,

故选: C.

【点睛】本题考查了平行线的性质，垂线，熟练掌握平行线的性质是解题的关键.

3. 下列分别是 2022 年北京冬奥会、1998 年长野冬奥会、1992 年阿尔贝维尔冬奥运会、1984 年萨拉热窝冬

奥运会徽上的图案，其中是轴对称图形的是（ ）



【答案】 D

【解析】

【分析】 在平面内，一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够完全重合的图形为轴对称图形.

【详解】解：A. 不能沿一条直线折叠完全重合；

B. 不能沿一条直线折叠完全重合；

C. 不能沿一条直线折叠完全重合；

D. 能够沿一条直线折叠完全重合；

故选： D.

【点睛】 本题考查了轴对称图形的概念，关键在于熟练掌握轴对称图形的概念，并对选项作出正确判断.

4. 计算： $(x+2y)^2 = (\quad)$

A. $x^2 + 4xy + 4y^2$

B. $x^2 + 2xy + 4y^2$

C. $x^2 + 4xy + 2y^2$

D. $x^2 + 4x^2$

【答案】 A

【解析】

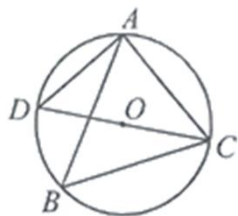
【分析】 根据完全平方公式展开即可.

【详解】解：原式 $= x^2 + 4xy + 4y^2$

故选： A.

【点睛】 本题考查了完全平方公式，熟练掌握完全平方公式是解题的关键.

5. 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， CD 是 $\odot O$ 的直径， $\angle ACD = 40^\circ$ ， 则 $\angle B = (\quad)$



- A. 70° B. 60° C. 50° D. 40°

【答案】C

【解析】

【分析】由 CD 是 $\odot O$ 的直径，根据直径所对的圆周角是直角，得出 $\angle CAD = 90^\circ$ ，根据直角三角形两锐角互余得到 $\angle ACD$ 与 $\angle D$ 互余，即可求得 $\angle D$ 的度数，继而求得 $\angle B$ 的度数.

【详解】解： $\because CD$ 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle D = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACD = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle B = 50^\circ.$$

故选：C.

【点睛】本题考查了圆周角定理，直角三角形的性质，注意掌握数形结合思想是解题的关键.

6. 若一次函数 $y = 2x + 1$ 的图象经过点 $(-3, y_1)$ ， $(4, y_2)$ ，则 y_1 与 y_2 的大小关系是 ()

- A. $y_1 < y_2$ B. $y_1 > y_2$ C. $y_1 \leq y_2$ D. $y_1 \geq y_2$

【答案】A

【解析】

【分析】先根据一次函数的解析式判断出函数的增减性，再根据 $-3 < 4$ 即可得出结论.

【详解】解： $\because$ 一次函数 $y = 2x + 1$ 中， $k = 2 > 0$ ，

$\therefore y$ 随着 x 的增大而增大.

$\because$ 点 $(-3, y_1)$ 和 $(4, y_2)$ 是一次函数 $y = 2x + 1$ 图象上的两个点， $-3 < 4$ ，

$$\therefore y_1 < y_2.$$

故选：A.

【点睛】本题考查的是一次函数图象上点的坐标特征，熟知一次函数图象的增减性是解答此题的关键.

7. 关于 x 的一元二次方程 $kx^2 + 2x - 1 = 0$ 有两个相等的实数根，则 $k =$ ()

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】若一元二次方程有两个相等的实数根，则根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，据此可列出关于 k 的等量关系式，即可求得 k 的值.

【详解】 $\because$ 原方程有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times (-k) = 0, \text{ 且 } k \neq 0;$$

解得 $k = -1$.

故选: B.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式的应用. 切记不要忽略一元二次方程二次项系数不为零这一隐含条件.

8. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $\frac{AB}{DE} = \frac{1}{2}$, 若 $BC = 2$, 则 $EF =$ ()

A. 4

B. 6

C. 8

D. 16

【答案】A

【解析】

【分析】根据相似三角形的性质得到 $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, 代入求解即可.

【详解】解: $\because \triangle ABC \sim \triangle DEF$,

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{2}{EF} = \frac{1}{2},$$

解得 $EF = 4$.

故选: A.

【点睛】此题考查了相似三角形的性质, 解题的关键是熟练掌握相似三角形性质. 相似三角形性质: 相似三角形对应边成比例, 对应角相等. 相似三角形的相似比等于周长比, 相似三角形的相似比等于对应高, 对应角平分线, 对应中线的比, 相似三角形的面积比等于相似比的平方.

9. 无色酚酞溶液是一中常见常用酸碱指示剂, 广泛应用于检验溶液酸碱性, 通常情况下酚酞溶液遇酸溶液不变色, 遇中性溶液也不变色, 遇碱溶液变红色. 现有 5 瓶缺失标签的无色液体: 蒸馏水、白醋溶液、食用碱溶液、柠檬水溶液、火碱溶液, 将酚酞试剂滴入任意一瓶液体后呈现红色的概率是 ()

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据概率公式求解即可.

【详解】解: $\because$ 酚酞溶液遇酸溶液不变色, 遇中性溶液也不变色, 遇碱溶液变红色,

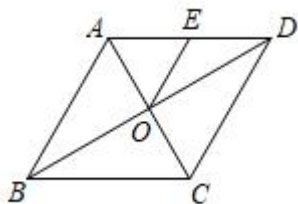
∴ 总共有 5 种溶液, 其中碱性溶液有 2 种,

∴ 将酚酞试剂滴入任意一瓶液体后呈现红色的概率是: $\frac{2}{5}$.

故选: B.

【点睛】此题考查了概率的知识, 解题的关键是熟练掌握概率的求解方法.

10. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O , E 为 AD 的中点, 连接 OE , $\angle ABC = 60^\circ$, $BD = 4\sqrt{3}$, 则 $OE =$ ()



A. 4

B. $2\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据菱形的性质得出 $AB = AD = DC = BC$, $AC \perp BD$, 再由 $\triangle AOD$ 直角三角形斜边上的中线等于斜边一半得出 $OE = \frac{1}{2}AD$. 利用菱形性质、直角三角形边长公式求出 $AD = 4$, 进而求出 $OE = 2$.

【详解】∵ $\square ABCD$ 是菱形, E 为 AD 的中点,

∴ $AB = AD = DC = BC$, $AC \perp BD$.

∴ $\triangle AOD$ 是直角三角形, $OE = \frac{1}{2}AD$.

∵ $\angle ABC = 60^\circ$, $BD = 4\sqrt{3}$,

∴ $\angle ADO = \frac{1}{2}\angle ADC = \frac{1}{2}\angle ABC = 30^\circ$, $OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

∴ $AD^2 - \frac{1}{4}AD^2 = OD^2$, 即 $\frac{3}{4}AD^2 = 12$,

∴ $AD = 4$, $OE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 4 = 2$.

故选: C.

【点睛】本题主要考查菱形、直角三角形的性质的理解与应用能力. 解题关键是得出 $OE = \frac{1}{2}AD$ 并求得 $AD = 4$. 求解本题时应恰当理解并运用菱形对角线互相垂直且平分、对角相等, 直角三角形斜边上的中线等于斜边一半的性质.

11. 已知二次函数 $y = 2x^2 - 4x + 5$, 当函数值 y 随 x 值的增大而增大时, x 的取值范围是 ()

A. $x < 1$

B. $x > 1$

C. $x < 2$

D. $x > 2$

【答案】B

【解析】

【分析】先将函数表达式写成顶点式, 根据开口方向 and 对称轴即可判断.

【详解】解: $\because y = 2x^2 - 4x + 5 = 2(x-1)^2 + 3$

$\therefore$ 开口向上, 对称轴为 $x=1$,

$\therefore x > 1$ 时, 函数值 y 随 x 的增大而增大.

故选: B.

【点睛】本题考查的是二次函数的图像与性质, 比较简单, 需要熟练掌握二次函数的图像与性质.

12. 如图 1 是一块弘扬“社会主义核心价值观”的扇面宣传展板, 该展板的部分示意图如图 2 所示, 它是以 O 为圆心, OA , OB 长分别为半径, 圆心角 $\angle O = 120^\circ$ 形成的扇面, 若 $OA = 3\text{m}$, $OB = 1.5\text{m}$, 则阴影部分的面积为 ()



图 1

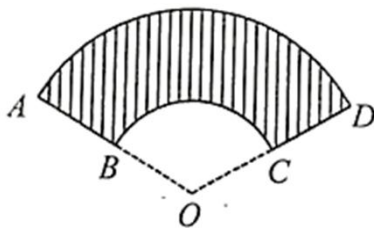


图 2

A. $4.25\pi\text{m}^2$

B. $3.25\pi\text{m}^2$

C. $3\pi\text{m}^2$

D. $2.25\pi\text{m}^2$

【答案】D

【解析】

【分析】根据 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形} AOD} - S_{\text{扇形} BOC}$ 求解即可.

【详解】解: $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形} AOD} - S_{\text{扇形} BOC}$

$$= \frac{120\pi \cdot OA^2}{360} - \frac{120\pi \cdot OB^2}{360}$$

$$= \frac{120\pi(OA^2 - OB^2)}{360}$$

$$= \frac{\pi(3^2 - 1.5^2)}{3}$$

$$= 2.25\pi \text{ (m}^2\text{)}$$

故选: D.

【点睛】 本题考查扇形面积, 不规则图形面积, 熟练掌握扇形面积公式是解题的关键.

二、填空题

13. 因式分解: $a^2 - 16 =$ _____.

【答案】 $(a+4)(a-4)$

【解析】

【分析】 利用平方差公式分解因式即可得.

【详解】 解: 原式 $= a^2 - 4^2$,

$= (a+4)(a-4)$,

故答案为: $(a+4)(a-4)$.

【点睛】 本题考查了利用平方差公式分解因式, 熟练掌握因式分解的方法是解题关键.

14. 如图, 小刚在兰州市平面地图的部分区域建立了平面直角坐标系, 如果白塔山公园的坐标是 $(2, 2)$, 中山桥的坐标是 $(3, 0)$, 那么黄河母亲像的坐标是_____.

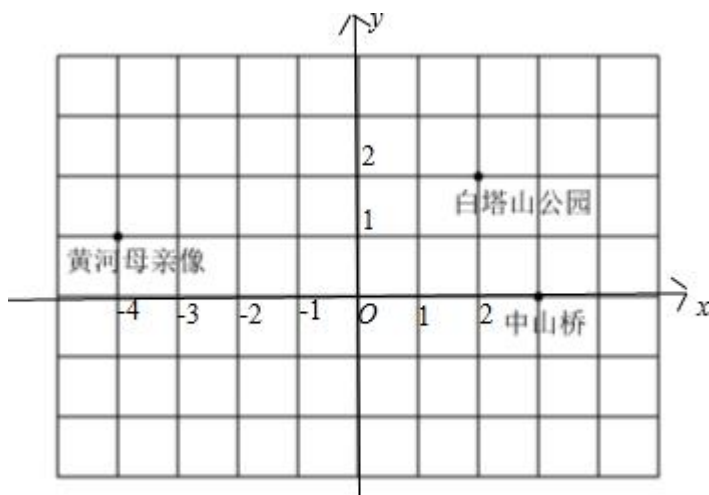


【答案】 $(-4,1)$

【解析】

【分析】 根据白塔山公园的坐标是 $(2, 2)$, 中山桥的坐标是 $(3, 0)$ 画出直角坐标系, 然后根据点的坐标的表示方法写出黄河母亲像的坐标;

【详解】 解: 如图,



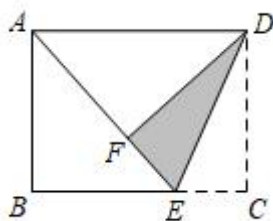
根据白塔山公园的坐标是 $(2, 2)$ ，中山桥的坐标是 $(3, 0)$ 画出直角坐标系，

$\therefore$ 黄河母亲像的坐标是 $(-4, 1)$ 。

故答案为: $(-4, 1)$ 。

【点睛】 本题考查了坐标确定位置: 平面内的点与有序实数对一一对应; 记住直角坐标系中特殊位置点的坐标特征是解题的关键。

15. 如图, 在矩形纸片 $ABCD$ 中, 点 E 在 BC 边上, 将 $\triangle CDE$ 沿 DE 翻折得到 $\triangle FDE$, 点 F 落在 AE 上. 若 $CE = 3\text{cm}$, $AF = 2EF$, 则 $AB = \underline{\hspace{2cm}}\text{cm}$.



【答案】 $3\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 由将 $\triangle CDE$ 沿 DE 翻折得到 $\triangle FDE$, 点 F 落在 AE 上, 可得 $EF = CE = 3\text{cm}$, $CD = DF$, $\angle DEC = \angle DEF$, 由矩形的性质得 $\angle DFE = \angle C = 90^\circ = \angle DFA$, 从而得 $AF = 6\text{cm}$, $AD = AE = 9\text{cm}$, 进而由勾股定理既可以求解。

【详解】 解: $\because$ 将 $\triangle CDE$ 沿 DE 翻折得到 $\triangle FDE$, 点 F 落在 AE 上, $CE = 3\text{cm}$, 四边形 $ABCD$ 是矩形,
 $\therefore EF = CE = 3\text{cm}$, $CD = DF$, $\angle DEC = \angle DEF$, $\angle DFE = \angle C = 90^\circ = \angle DFA$,

$\therefore AF = 2EF$,

$\therefore AF = 6\text{cm}$,

$\therefore AE = AF + EF = 6 + 3 = 9(\text{cm})$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AB=CD=DF, \quad AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle DEC = \angle DEF,$$

$$\therefore AD=AE=9\text{cm},$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle ADF \text{ 中, } AF^2+DF^2=AD^2$$

$$\therefore 6^2+DF^2=9^2,$$

$$\therefore DF=3\sqrt{5} \text{ (cm)},$$

$$AB=DF=3\sqrt{5} \text{ (cm)},$$

故答案为： $3\sqrt{5}$.

【点睛】本题考查矩形的性质、勾股定理及轴对称，熟练掌握轴对称的性质是解题的关键.

16. 2022 年 3 月 12 日是我国第 44 个植树节，某林业部门为了考察某种幼树在一定条件下的移植成活率，在同等条件下，对这种幼树进行大量移植，并统计成活情况，下表是这种幼树移植过程中的一组统计数据：

幼树移植数（棵）	100	1000	5000	8000	10000	15000	20000
幼树移植成活数（棵）	87	893	4485	7224	8983	13443	18044
幼树移植成活的频率	0.870	0.893	0.897	0.903	0.898	0.896	0.902

估计该种幼树在此条件下移植成活的概率是_____.（结果精确到 0.1）

【答案】0.9

【解析】

【分析】大量重复试验时，事件发生的频率在某个固定位置左右摆动，并且摆动的幅度越来越小，根据这个频率稳定性定理，可以用频率的集中趋势来估计概率，这个固定的近似值就是这个事件的概率.

【详解】 $\therefore$ 幼树移植数 20000 时，幼树移植成活的频率是 0.902，

$\therefore$ 估计该种幼树在此条件下移植成活的概率为 0.902，精确到 0.1，即为 0.9，

故答案为：0.9.

【点睛】本题考查了用大量试验得到的频率可以估计事件的概率，大量反复试验下频率稳定值即概率.

三、解答题

17. 解不等式： $2(x-3)<8$.

【答案】 $x<7$

【解析】

【分析】去括号，再移项，合并同类项，系数化 1，解得即可.

【详解】去括号得: $2x-6<8$,

移项得: $2x<8+6$,

合并同类项得: $2x<14$,

系数化1得: $x<7$,

故不等式的解集为: $x<7$.

【点睛】本题考查解一元一次不等式, 熟记基本步骤是解题的关键.

18. 计算: $\left(1+\frac{1}{x}\right) \div \frac{(x^2+x)}{x}$.

【答案】 $\frac{1}{x}$

【解析】

【分析】根据分式的加法法则和除法法则计算即可.

【详解】解: $\left(1+\frac{1}{x}\right) \div \frac{(x^2+x)}{x}$,

$$= \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{x^2+x},$$
$$= \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{x(x+1)},$$
$$= \frac{1}{x}.$$

【点睛】本题考查的是分式的混合运算, 掌握分式的加法法则和除法法则是解题关键.

19. 如图1是小军制作的燕子风筝, 燕子风筝的骨架图如图2所示, $AB=AE$, $AC=AD$, $\angle BAD=\angle EAC$, $\angle C=50^\circ$, 求 $\angle D$ 的大小.



图1

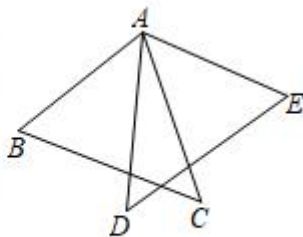


图2

【答案】 $\angle D=50^\circ$

【解析】

【分析】首先根据题意证明 $\triangle ABC \cong \triangle AED$, 然后根据全等三角形对应角相等即可求出 $\angle D$ 的大小.

【详解】解: $\because \angle BAD = \angle EAC$,

$$\therefore \angle BAD + \angle CAD = \angle EAC + \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle EAD,$$

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 中,

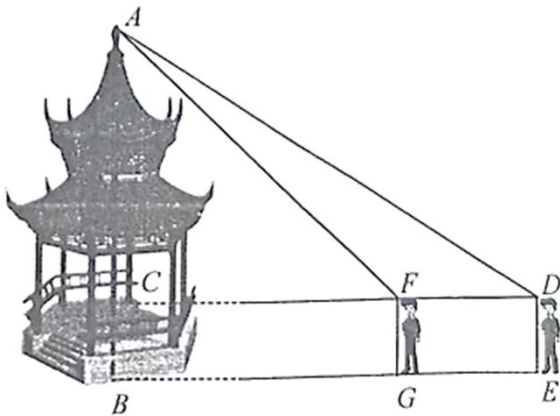
$$\begin{cases} AB = AE \\ \angle BAC = \angle EAD \\ AC = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AED (SAS),$$

$$\therefore \angle D = \angle C = 50^\circ.$$

【点睛】此题考查了三角形全等的性质和判定方法，解题的关键是熟练掌握三角形全等的性质和判定方法. 全等三角形的性质：全等三角形对应边相等，对应角相等. 判定三角形全等的方法有：SSS, SAS, AAS, ASA, HL(直角三角形).

20. 如图，小睿为测量公园的一凉亭 AB 的高度，他先在水平地面点 E 处用高 $1.5m$ 的测角仪 DE 测得 $\angle ADC = 31^\circ$ ，然后沿 EB 方向向前走 $3m$ 到达点 G 处，在点 G 处用高 $1.5m$ 的测角仪 FG 测得 $\angle AFC = 42^\circ$. 求凉亭 AB 的高度. (A, C, B 三点共线， $AB \perp BE$ ， $AC \perp CD$ ， $CD = BE$ ， $BC = DE$. 结果精确到 $0.1m$) (参考数据: $\sin 31^\circ \approx 0.52$ ， $\cos 31^\circ \approx 0.86$ ， $\tan 31^\circ \approx 0.60$ ， $\sin 42^\circ \approx 0.67$ ， $\cos 42^\circ \approx 0.74$ ， $\tan 42^\circ \approx 0.90$)



【答案】 $6.9m$

【解析】

【分析】根据题意可得 $BC = FG = DE = 1.5$ ， $DF = GE = 3$ ， $\angle ACF = 90^\circ$ ，然后设 $CF = x$ ，则 $CD = (x+3)$ ，先在 $Rt\triangle ACF$ 中，利用锐角三角函数的定义求出 AC 的长，再在 $Rt\triangle ACD$ 中，利用锐角三角函数的定义列出关于 x 的方程，进行计算即可解答.

【详解】解：由题意得：

$$BC = FG = DE = 1.5, \quad DF = GE = 3, \quad \angle ACF = 90^\circ,$$

设 $CF = x$,

$$\therefore CD = CF + DF = (x+3),$$

在 $Rt\triangle ACF$ 中, $\angle AFC = 42^\circ$,

$$\therefore AC = CF \cdot \tan 42^\circ \approx 0.9x \text{ (m)},$$

在 $Rt\triangle ACD$ 中, $\angle ADC = 31^\circ$,

$$\therefore \tan 31^\circ = \frac{AC}{CD} = \frac{0.9x}{x+3} \approx 0.6,$$

$$\therefore x = 6,$$

经检验: $x = 6$ 是原方程的根,

$$\therefore AB = AC + BC = 0.9x + 1.5 = 6.9 \text{ (m)},$$

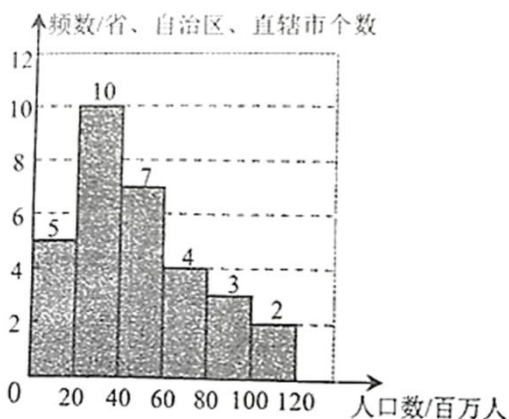
$\therefore$ 凉亭 AB 的高约为 6.9m.

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题, 熟练掌握锐角三角函数的定义是解题的关键.

21. 人口问题是“国之大者”. 以习近平同志为核心的党中央高度重视人口问题, 准确把握人口发展形势, 有利于推动社会持续健康发展, 为开启全面建设社会主义现代化国家新征程、向第二个百年奋斗目标进军创造良好的条件. 某综合与实践研究小组根据我国第七次人口普查数据进行整理、描述和分析, 给出部分数据信息:

信息一: 普查登记的全国大陆 31 个省、自治区、直辖市人口数的频数分布直方图如下:

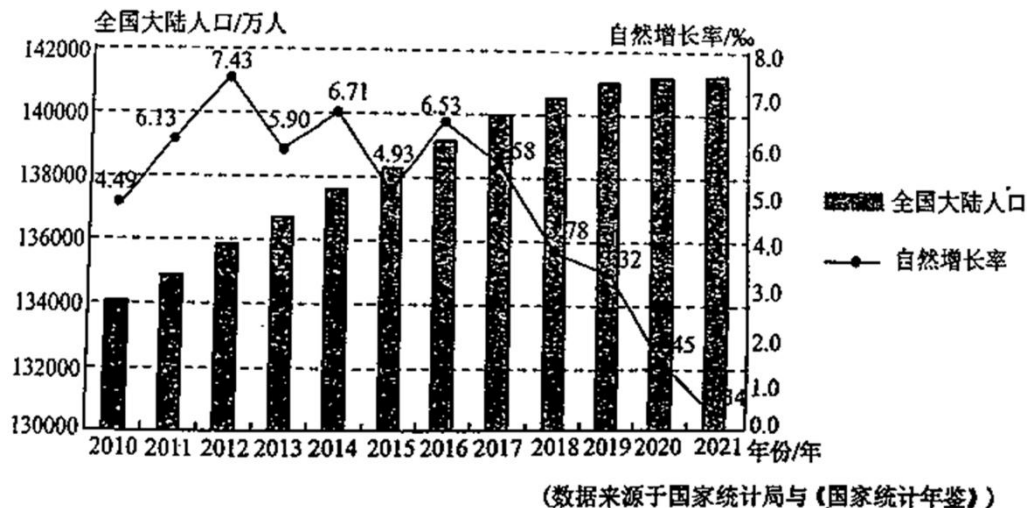
(数据分成 6 组: $0 \leq x < 20$, $20 \leq x < 40$, $40 \leq x < 60$, $60 \leq x < 80$, $80 \leq x < 100$, $100 \leq x \leq 120$)



信息二: 普查登记的全国大陆 31 个省、自治区、直辖市人口数 (百万人) 在 $40 \leq x < 60$ 这一组的数据是:

58, 47, 45, 40, 43, 42, 50;

信息三: 2010——2021 年全国大陆人口数及自然增长率;



请根据以上信息，解答下列问题：

(1) 普查登记的全国大陆 31 个省、自治区、直辖市人口数的中位数为_____百万人.

(2) 下列结论正确的是_____. (只填序号)

- ①全国大陆 31 个省、自治区、直辖市中人口数大于等于 100 (百万人) 的有 2 个地区;
- ②相对于 2020 年, 2021 年全国大陆人口自然增长率降低, 全国大陆人口增长缓慢;
- ③2010-2021 年全国大陆人口自然增长率持续降低.

(3) 请写出 2016-2021 年全国大陆人口数、全国大陆人口自然增长率的变化趋势, 结合变化趋势谈谈自己的看法.

【答案】 (1) 40 (2) ②

(3) 答案见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据已知发现中位数在第二组内, 从小到大排列找出处在中间位置的一个数或两个数的平均数即可求出中位数;

(2) 从频数分布直方图可知, 比 95 亿元多的省份有 5 个, 因此处在第六名;

①根据频数分布直方图进行判断即可;

②根据条形图与折线图即可判断;

③根据折线图即可判断;

(3) 根据条形图与折线图可写出 2016-2021 年全国大陆人口数、全国大陆人口自然增长率的变化趋势, 根据变化趋势写出看法即可.

【小问 1 详解】

解: 将这 31 个省、自治区、直辖市人口数从小到大排列处在中间位置的数是 40 百万人, 因此中位数是 40 百万人,

故答案为: 40;

【小问 2 详解】

解: ①全国大陆 31 个省、自治区、直辖市中人口数大于等于 100 (百万人) 的有 2 个地区, 故原结论正确, 符合题意;

②相对于 2020 年, 2021 年全国大陆人口自然增长率降低, 全国大陆人口增长缓慢, 故原结论正确, 符合题意;

③2010 - 2021 年全国大陆人口自然增长率的情况是: 2010 - 2012, 2013 - 2014, 2015 - 2016 年增长率持续上升; 2012 - 2013, 2014 - 2015, 2016 - 2021 年增长率持续降低,

故原结论错误, 不符合题意.

所以结论正确的是②.

故答案为: ①②;

【小问 3 详解】

解: 2016 - 2021 年全国大陆人口数增长缓慢, 全国大陆人口自然增长率持续降低.

【点睛】本题考查频数分布直方图、条形统计图、折线统计图, 中位数, 理解统计图中数量之间的关系是正确解答的前提.

22. 综合与实践

问题情境: 我国东周到汉代一些出土实物上反映出一些几何作图方法, 如侯马铸铜遗址出土车害范、芯组成的 (如图 1), 它的端面是圆形, 如图 2 是用“矩” (带直角的角尺) 确定端面圆心的方法: 将“矩”的直角尖端 A 沿圆周移动, 直到 $AB = AC$, 在圆上标记 A, B, C 三点; 将“矩”向右旋转, 使它左侧边落在 A, B 点上, “矩”的另一条边与圆的交点标记为 D 点, 这样就用“矩”确定了圆上等距离的 A, B, C, D 四点, 连接 AD, BC 相交于点, 这样就用“矩”确定了圆上等距离的 A, B, C, D 四点, 链接 AD, BC 相较于点 O , 即 O 为圆心.

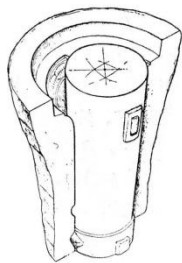


图1

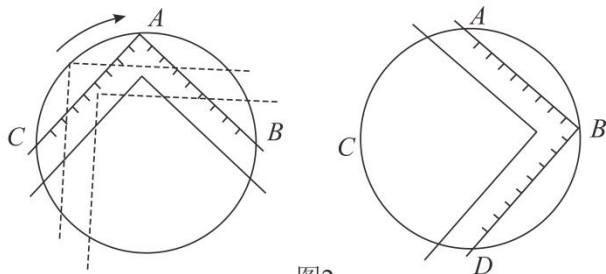


图2

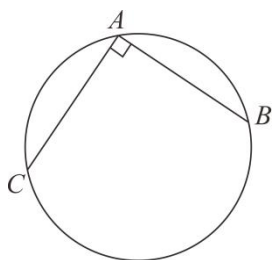


图3

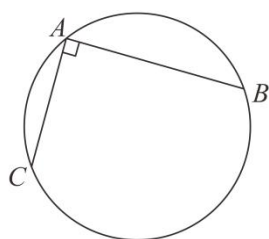


图4

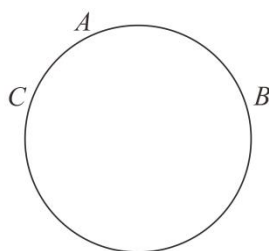


图5

(1) 问题解决: 请你根据“问题情境”中提供的方法, 用三角板还原我国古代几何作图确定圆心 O . 如图 3, 点 A, B, C 在 $\odot O$ 上, $AB \perp AC$, 且 $AB = AC$, 请作出圆心 O . (保留作图痕迹, 不写作法)

(2) 类比迁移: 小梅受此问题的启发, 在研究了用“矩” (带直角的角尺) 确定端面圆心的方法后发现, 如果 AB 和 AC 不相等, 用三角板也可以确定圆心 O . 如图 4, 点 A, B, C 在 $\odot O$ 上, $AB \perp AC$, 请作出圆心 O . (保留作图痕迹, 不写作法)

(3) 拓展探究: 小梅进一步研究, 发现古代由“矩”度量确定圆上等距离点时存在误差, 用平时学的尺规作图的方法确定圆心可以减少误差. 如图 5, 点 A, B, C 是 $\odot O$ 上任意三点, 请用不带刻度的直尺和圆规作出圆心 O . (保留作图痕迹, 不写作法) 请写出你确定圆心的理由: _____.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 见解析

【解析】

【分析】(1) 作 $\angle ABD = 90^\circ$, BD 与圆相交于 D , 连接 BC, AD 相交于点 O , 即可;

(2) 作 $\angle ABD = 90^\circ$, BD 与圆相交于 D , 连接 BC, AD 相交于点 O , 即可;

(3) 作 AB 的垂直平分线 DE , 作 AC 的垂直平分线 MN , DE 交 MN 于 O , 即可, 则垂径定理得出确定圆心的理由即可.

【小问 1 详解】

解: 如图所示, 点 O 就是圆的圆心.

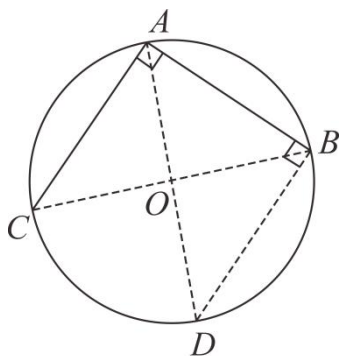


图3

作 $\angle ABD = 90^\circ$, BD 与圆相交于 D , 连接 BC, AD 相交于点 O ,

$\therefore \angle CAB = \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore BC、AD$ 是圆的直径,

$\therefore$ 点 O 是圆的圆心.

【小问 2 详解】

解: 如图所示, 点 O 就是圆的圆心.

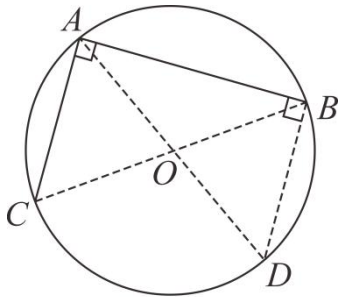


图4

作 $\angle ABD=90^\circ$, BD 与圆相交于 D , 连接 $BC、AD$ 相交于点 O ,

$\therefore \angle CAB=\angle ABC=90^\circ$,

$\therefore BC、AD$ 是圆的直径,

$\therefore$ 点 O 是圆的圆心.

【小问 3 详解】

解: 如图所示, 点 O 就是圆的圆心.

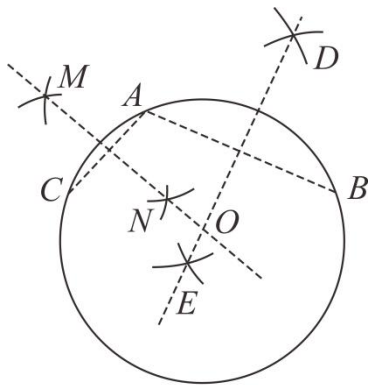


图5

作 AB 的垂直平分线 DE , 作 AC 的垂直平分线 MN , DE 交 MN 于 O ,

$\therefore DE$ 垂直平分 AB ,

$\therefore DE$ 经过圆心, 即圆心必在直线 DE 上,

$\therefore MN$ 垂直平分 AC ,

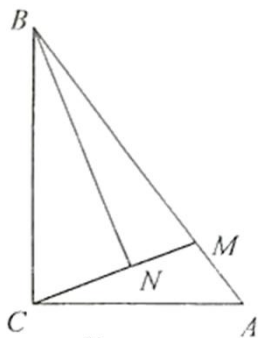
$\therefore MN$ 经过圆心, 即圆心必在直线 MN 上,

$\therefore DE$ 与 MN 的交点 O 是圆心.

确定圆心的理由: 弦的垂直平分线经过圆心.

【点睛】本题考查圆周角定理的推论，垂径定理的推论，尺规作线段垂直平分线，熟练掌握直角的圆周角所对的弦是直径是解题的关键.

23. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 3\text{cm}$ ， $BC = 4\text{cm}$ ， M 为 AB 边上一动点， $BN \perp CM$ ，垂足为 N . 设 A, M 两点间的距离为 $x\text{cm}$ ($0 \leq x \leq 5$)， B, N 两点间的距离为 $y\text{cm}$ (当点 M 和 B 点重合时， B, N 两点间的距离为 0).



小明根据学习函数的经验，对因变量 y 随自变量 x 的变化而变化的规律进行了探究.

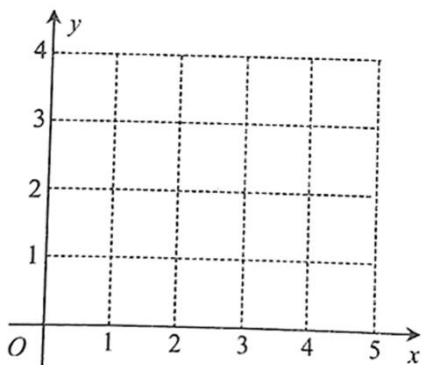
下面是小明的探究过程，请补充完整.

(1) 列表：下表的已知数据是根据 A, M 两点间的距离 x 进行取点、画图、测量，得到了 y 与 x 的几组对应值：

x/cm	0	0.5	1	1.5	1.8	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y/cm	4	3.96	3.79	3.47	a	2.99	2.40	1.79	1.23	0.74	0.33	0

请你通过计算，补全表格： $a =$ _____；

(2) 描点、连线：在平面直角坐标系中，描出表中各组数值所对应的点 (x, y) ，并画出函数 y 关于 x 的图像；



(3) 探究性质：随着自变量 x 的不断增大，函数 y 的变化趋势：_____.

(4) 解决问题：当 $BN = 2AM$ 时， AM 的长度大约是_____cm. (结果保留两位小数)

【答案】(1) 3.2 (2) 答案见解析

(3) y 随 x 的增大而减小

(4) 1.67

【解析】

【分析】(1) 先求出 AB 边上的高, 进而求出 AM' , 判断出点 M 与 M' 重合, 即可得出答案;

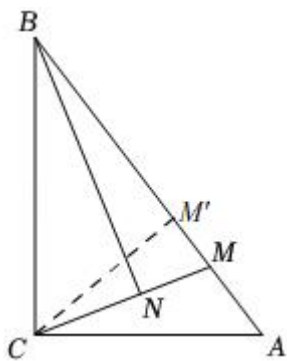
(2) 先描点, 再连线, 即可画出图像;

(3) 根据图像直接得出结论;

(4) 利用表格和图像估算出 AM 的长度.

【小问 1 详解】

解: 如图,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC=3$, $BC=4$, 根据勾股定理得, $AB=5$,过点 C 作 $CM \perp AB$ 于 M ,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CM,$$

$$\therefore CM = \frac{12}{5},$$

在 $\text{Rt}\triangle ACM$ 中, 根据勾股定理得, $AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = 1.8$,当 $a=1.8$ 时, 点 M 与点 M' 重合,

$$\therefore CM \perp AB,$$

$$\therefore BN \perp CM,$$

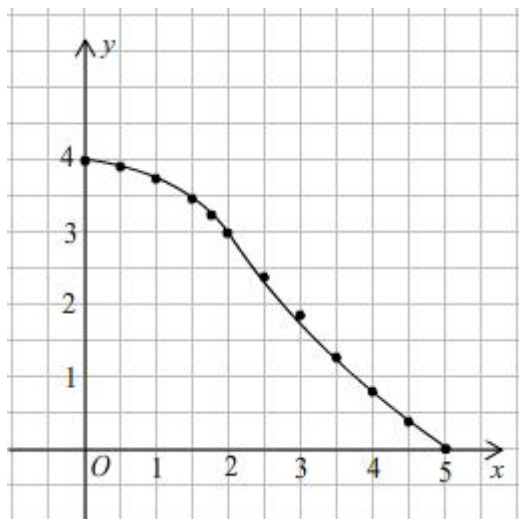
$$\therefore \text{点 } M, N \text{ 重合},$$

$$\therefore a = BN = BM = AB - AM = 3.2,$$

故答案为: 3.2;

【小问 2 详解】

解: 如图所示,



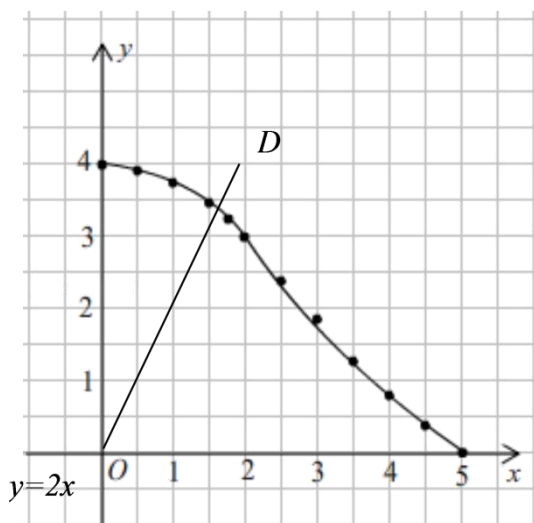
【小问 3 详解】

解：由图像知， y 随 x 的增大而减小，

故答案为： y 随 x 的增大而减小；

【小问 4 详解】

解：如图，直线 OD 的解析式为 $y = 2x$ ，



借助表格和图像得，当 $BN = 2AM$ 时， AM 的长度大约是 1.67cm，

故答案为：1.67.

【点睛】本题主要考查了勾股定理，三角形的面积，函数图像的画法，画出函数图像是解本题的关键.

24. 掷实心球是兰州市高中阶段学校招生体育考试的选考项目. 如图 1 是一名女生投掷实心球，实心球行进路线是一条抛物线，行进高度 y (m) 与水平距离 x (m) 之间的函数关系如图 2 所示，抛出时起点处高度为 $\frac{5}{3}$ m，当水平距离为 $3m$ 时，实心球行进至最高点 $3m$ 处.



图 1

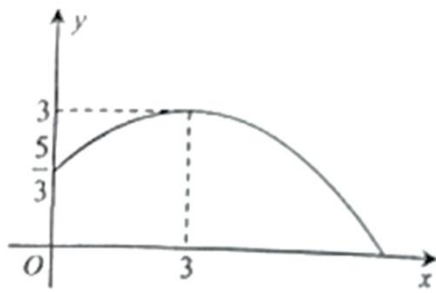


图 2

图 1 来源:《2022 年兰州市高中阶段学校招生体育考试规则与测试要求》

(1) 求 y 关于 x 的函数表达式;

(2) 根据兰州市高中阶段学校招生体育考试评分标准 (女生), 投掷过程中, 实心球从起点到落地点的水平距离大于等于 $6.70m$, 此项考试得分为满分 10 分. 该女生在此项考试中是否得满分, 请说明理由.

【答案】 (1) y 关于 x 的函数表达式为 $y = -\frac{4}{27}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{5}{3}$;

(2) 该女生在此项考试中是得满分, 理由见解析.

【解析】

【分析】 (1) 根据题意设出 y 关于 x 的函数表达式, 再用待定系数法求函数解析式即可;

(2) 根据该同学此次投掷实心球的成绩就是实心球落地时的水平距离, 令 $y=0$, 解方程即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 当水平距离为 $3m$ 时, 实心球行进至最高点 $3m$ 处,

$$\therefore \text{设 } y = a(x-3)^2 + 3,$$

$$\because y = a(x-3)^2 + 3 \text{ 经过点 } (0, \frac{5}{3}),$$

$$\therefore \frac{5}{3} = a(0-3)^2 + 3$$

$$\text{解得: } a = -\frac{4}{27},$$

$$\therefore y = -\frac{4}{27}(x-3)^2 + 3 = -\frac{4}{27}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{5}{3},$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数表达式为 } y = -\frac{4}{27}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{5}{3};$$

【小问 2 详解】

解: 该女生在此项考试中是得满分, 理由如下:

$$\because \text{对于二次函数 } y = -\frac{4}{27}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{5}{3}, \text{ 当 } y=0 \text{ 时, 有 } -\frac{4}{27}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{5}{3} = 0$$

$$\therefore 4x^2 - 24x - 45 = 0,$$

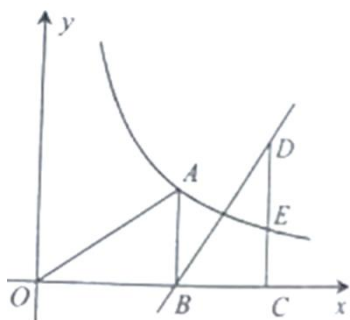
$$\text{解得: } x_1 = \frac{15}{2}, \quad x_2 = -\frac{3}{2} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore \frac{15}{2} > 6.70,$$

$\therefore$ 该女生在此项考试中是得满分.

【点睛】 本题考查二次函数的应用和一元二次方程的解法, 利用待定系数法求出二次函数的解析式是解题的关键.

25. 如图, 点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像上, $AB \perp x$ 轴, 垂足为 $B(3, 0)$, 过 $C(5, 0)$ 作 $CD \perp x$ 轴, 交过 B 点的一次函数 $y = \frac{3}{2}x + b$ 的图像于 D 点, 交反比例函数的图像于 E 点, $S_{\triangle AOB} = 3$.



(1) 求反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 和一次函数 $y = \frac{3}{2}x + b$ 的表达式:

(2) 求 DE 的长.

【答案】 (1) $y = \frac{6}{x}$; $y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$

(2) $\frac{9}{5}$

【解析】

【分析】 (1) 利用反比例函数系数 k 的几何意义即可求得 k 的值, 把 B 的坐标代入 $y = \frac{3}{2}x + b$ 即可求得 b 的值, 从而求得反比例和一次函数的解析式;

(2) 利用两个函数的解析式求得 D 、 E 的坐标, 进一步即可求得 DE 的长度.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像上, $AB \perp x$ 轴,

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |k| = 3,$$

$$\therefore k = 6,$$

$$\therefore \text{反比例函数为 } y = \frac{6}{x},$$

$$\therefore \text{一次函数 } y = \frac{3}{2}x + b \text{ 的图像过点 } B(3, 0),$$

$$\therefore \frac{3}{2} \times 3 + b = 0, \text{ 解得 } b = -\frac{9}{2},$$

$$\therefore \text{一次函数为 } y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2};$$

【小问2详解】

解: $\because$ 过 $C(5, 0)$ 作 $CD \perp x$ 轴, 交过 B 点的一次函数 $y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$ 的图像于 D 点,

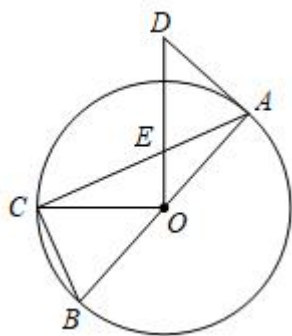
$$\therefore \text{当 } x = 5 \text{ 时 } y = \frac{6}{x} = \frac{6}{5}; \quad y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} = 3,$$

$$\therefore E(5, \frac{6}{5}), D(5, 3),$$

$$\therefore DE = 3 - \frac{6}{5} = \frac{9}{5}.$$

【点睛】本题是反比例函数与一次函数的交点问题, 考查了待定系数法求一次函数的解析式, 反比例函数系数 k 的几何意义, 反比例函数、一次函数图像上点的坐标特征, 求得函数的解析式是解题的关键.

26. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AB 是直径, $OD \perp OC$, 连接 AD , $\angle ADO = \angle BOC$, AC 与 OD 相交于点 E .



(1) 求证: AD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\tan \angle OAC = \frac{1}{2}$, $AD = \frac{3}{2}$, 求 $\odot O$ 的半径.

【答案】(1) 见解析 (2) 2

【解析】

【分析】(1) 先证 $\angle BOC + \angle AOD = 90^\circ$, 再因为 $\angle ADO = \angle BOC$, 得出 $\angle ADO + \angle AOD = 90^\circ$, 即可得 $\angle OAD = 90^\circ$, 即可由切线的判定定理得出结论;

(2) 先证明 $\angle AED = \angle DAE$, 得出 $DE = AD = \frac{3}{2}$, 再证 $\angle OAC = \angle OCA$, 得 $\tan \angle OAC = \tan \angle OCA = \frac{OE}{OC} = \frac{1}{2}$,

设 $OC = OA = R$, 则 $OE = \frac{1}{2}R$, 在 $Rt\triangle OAD$ 中, 由勾股定理, 得

$$\left(\frac{1}{2}R + \frac{3}{2}\right)^2 = R^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2, \text{ 解之即可.}$$

【小问 1 详解】

证明: $\because OD \perp OC$,

$$\therefore \angle COD = 90^\circ,$$

$$\because \angle BOC + \angle COD + \angle AOD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC + \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\because \angle ADO = \angle BOC,$$

$$\therefore \angle ADO + \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\because \angle ADO + \angle AOD + \angle OAD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle OAD = 90^\circ,$$

$\because OA$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore AD$ 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

解: $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAC + \angle CAD = \angle OAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle CAD,$$

$$\because \angle B + \angle BOC + \angle OCB = \angle ADO + \angle CAD + \angle AED = 180^\circ, \quad \angle ADO = \angle BOC,$$

$$\therefore \angle AED = \angle OCB,$$

$$\because OB = OC,$$

$$\therefore \angle B = \angle OCB,$$

$$\therefore \angle AED = \angle CAD,$$

$$\therefore DE = AD = \frac{3}{2},$$

$$\because OC = OA,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA,$$

$$\because OC \perp OD,$$

$$\therefore \angle COE = 90^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle OAC = \tan \angle OCA = \frac{OE}{OC} = \frac{1}{2},$$

设 $OC = OA = R$,

则 $OE = \frac{1}{2} R$,

在 $Rt\triangle OAD$ 中, $\angle OAD=90^\circ$,

由勾股定理, 得 $OD^2=OA^2+AD^2$,

$$\text{即} \left(\frac{1}{2}R + \frac{3}{2}\right)^2 = R^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

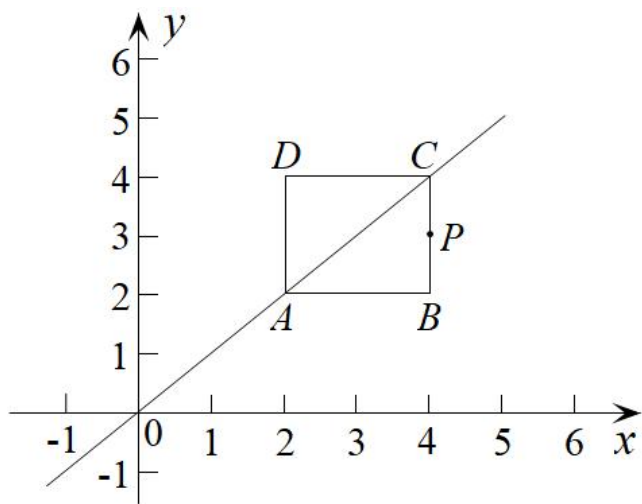
解得: $R=2$ 或 $R=0$ (不符合题意, 舍去),

$\therefore \odot O$ 的半径为 2.

【点睛】本师考查切线的判定, 解直角三角形, 勾股定理, 等腰三角形的判定, 圆周角定理的推论, 本题属圆的综合题目, 熟练掌握相关性质与判定是解题的关键.

27. 在平面直角坐标系中, $P(a,b)$ 是第一象限内一点, 给出如下定义: $k_1 = \frac{a}{b}$ 和 $k_2 = \frac{b}{a}$ 两个值中的最大值

叫做点 P 的“倾斜系数” k .



(1) 求点 $P(6,2)$ 的“倾斜系数” k 的值;

(2) ①若点 $P(a,b)$ 的“倾斜系数” $k=2$, 请写出 a 和 b 的数量关系, 并说明理由;

②若点 $P(a,b)$ 的“倾斜系数” $k=2$, 且 $a+b=3$, 求 OP 的长;

(3) 如图, 边长为 2 的正方形 $ABCD$ 沿直线 $AC: y=x$ 运动, $P(a,b)$ 是正方形 $ABCD$ 上任意一点, 且点 P 的“倾斜系数” $k < \sqrt{3}$, 请直接写出 a 的取值范围.

【答案】(1) 3 (2) ① $a=2b$ 或 $b=2a$, ② $OP=\sqrt{5}$

(3) $\sqrt{3}+1 < a < 3+\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 直接由“倾斜系数”定义求解即可;

(2) ①由点 $P(a, b)$ 的“倾斜系数” $k=2$, 由 $\frac{a}{b}=2$ 或 $\frac{b}{a}=2$ 求解即可;

②由 $a=2b$ 或 $b=2a$, 又因 $a+b=3$, 求出 a, b 值, 即可得点 P 坐标, 从而由勾股定理可求解;

(3) 当点 P 与点 D 重合时, 且 $k=\sqrt{3}$ 时, a 有最小临界值, 此时, $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$, 则 $\frac{a+2}{a}=\sqrt{3}$, 求得 $a=\sqrt{3}+1$;

当点 P 与 B 点重合, 且 $k=\sqrt{3}$ 时, a 有最大临界值, 此时, $\frac{a}{b}=\sqrt{3}$, 则 $\frac{a}{a-2}=\sqrt{3}$, 求得: $a=3+\sqrt{3}$; 即

可求得 $k<\sqrt{3}$ 时, a 的取值范围.

【小问 1 详解】

解: 由题意, 得 $\frac{6}{2}=3$, $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,

$$\therefore 3 > \frac{1}{3},$$

$\therefore$ 点 $P(6, 2)$ 的“倾斜系数” $k=3$;

【小问 2 详解】

解: ① $a=2b$ 或 $b=2a$,

$\therefore$ 点 $P(a, b)$ 的“倾斜系数” $k=2$,

当 $\frac{a}{b}=2$ 时, 则 $a=2b$;

当 $\frac{b}{a}=2$ 时, 则 $b=2a$,

$\therefore a=2b$ 或 $b=2a$;

② $\therefore P(a, b)$ 的“倾斜系数” $k=2$,

当 $\frac{a}{b}=2$ 时, 则 $a=2b$

$$\therefore a+b=3,$$

$$\therefore 2b+b=3,$$

$$\therefore b=1,$$

$$\therefore a=2,$$

$$\therefore P(2, 1),$$

$$\therefore OP = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5};$$

当 $\frac{b}{a}=2$ 时, 则 $b=2a$,

$$\therefore a+b=3,$$

$$\therefore a+2a=3,$$

$$\therefore a=1,$$

$$\therefore b=2,$$

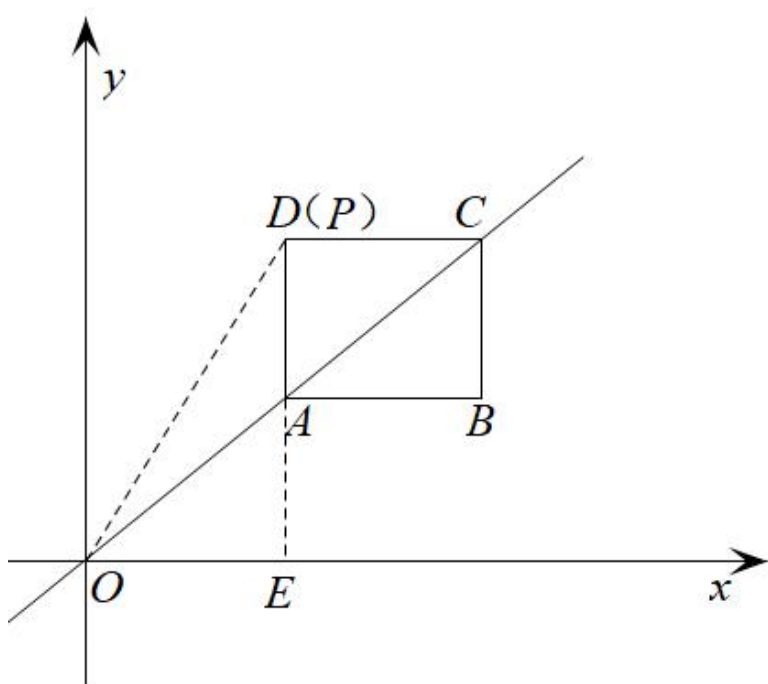
$$\therefore P(1, 2)$$

$$\therefore OP = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5};$$

综上, $OP = \sqrt{5}$;

【小问 3 详解】

解: 由题意知, 当点 P 与点 D 重合时, 且 $k = \sqrt{3}$ 时, a 有最小临界值, 如图, 连接 OD , 延长 DA 交 x 轴于 E ,

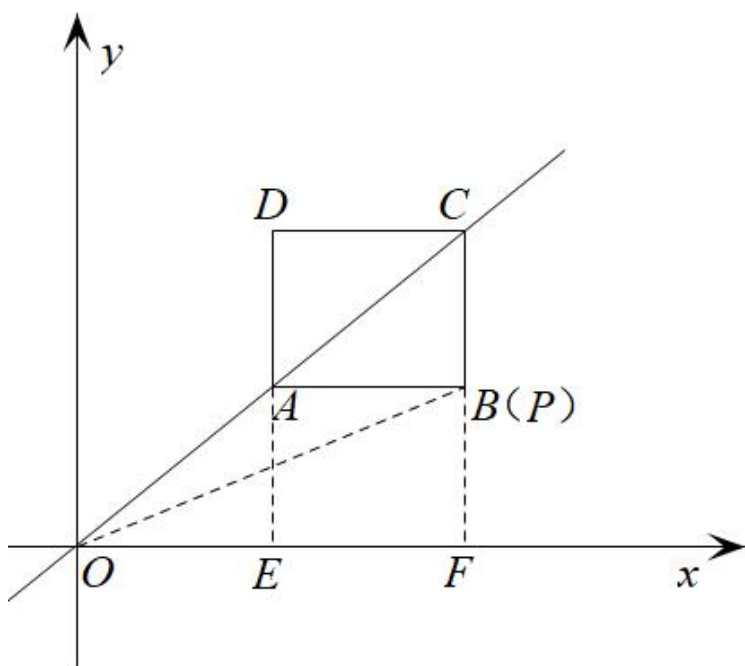


此时, $\frac{b}{a} = \sqrt{3},$

则 $\frac{a+2}{a} = \sqrt{3},$

解得: $a = \sqrt{3} + 1$; 经检验符合题意;

当点 P 与 B 点重合, 且 $k = \sqrt{3}$ 时, a 有最大临界值, 如图, 连接 OB , 延长 CB 交 x 轴于 F ,



此时, $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$,

则 $\frac{a}{a-2} = \sqrt{3}$,

解得: $a = 3 + \sqrt{3}$, 经检验符合题意,

综上, 若 P 的“倾斜系数” $k < \sqrt{3}$, 则 $\sqrt{3} + 1 < a < 3 + \sqrt{3}$.

【点睛】本题考查新定义, 正方形的性质, 正比例函数性质, 解题的关键是: (1) (2) 问理解新定义, (3) 问求临界值.

28. 综合与实践, 【问题情境】: 数学活动课上, 老师出示了一个问题: 如图 1, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是 BC 的中点, $AE \perp EP$, EP 与正方形的外角 $\triangle DCG$ 的平分线交于 P 点. 试猜想 AE 与 EP 的数量关系, 并加以证明;

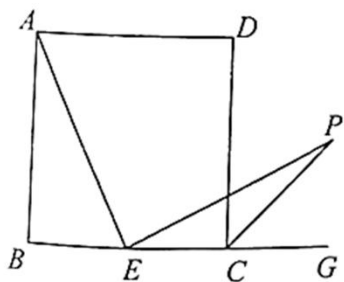


图 1

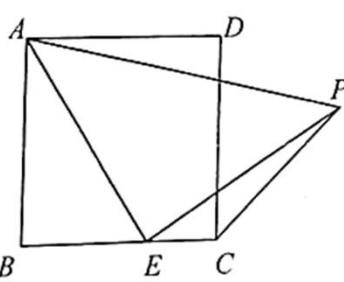


图 2

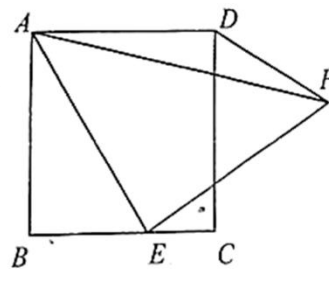


图 3

(1) 【思考尝试】同学们发现, 取 AB 的中点 F , 连接 EF 可以解决这个问题. 请在图 1 中补全图形, 解答老师提出的问题.

(2) 【实践探究】希望小组受此问题启发, 逆向思考这个题目, 并提出新的问题: 如图 2, 在正方形 $ABCD$

$$\therefore \angle AFE = \angle ECP,$$

$$\because AE \perp PE,$$

$$\therefore \angle AEP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB + \angle PEC = 90^\circ,$$

$$\because \angle AEB + \angle BAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PEC = \angle BAE,$$

$$\therefore \triangle AFE \cong \triangle ECP \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AE = EP;$$

【小问 2 详解】

解: 在 AB 上取 $AF = EC$, 连接 EF ,

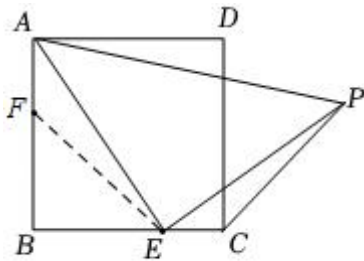


图2

由 (1) 同理可得 $\angle CEP = \angle FAE$,

$$\because AF = EC, AE = EP,$$

$$\therefore \triangle FAE \cong \triangle CEP \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle ECP = \angle AFE,$$

$$\because AF = EC, AB = BC,$$

$$\therefore BF = BE,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle BFE = 45^\circ,$$

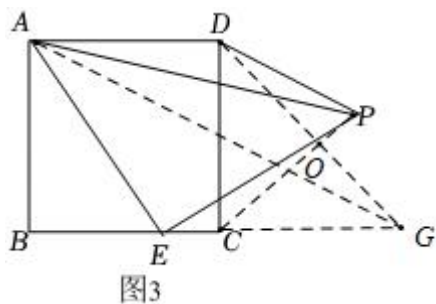
$$\therefore \angle AFE = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle ECP = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle DCP = 45^\circ;$$

【小问 3 详解】

解: 作 $DG \perp CP$, 交 BC 的延长线于 G , 交 CP 于 O , 连接 AG ,



由 (2) 知, $\angle DCP = 45^\circ$,

$$\therefore \angle CDG = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle DCG$ 是等腰直角三角形,

$\therefore$ 点 D 与 G 关于 CP 对称,

$\therefore AP+DP$ 的最小值为 AG 的长,

$$\therefore AB = 4,$$
$$\therefore BG = 8,$$

由勾股定理得 $AG = 4\sqrt{5}$,

$\therefore \triangle ADP$ 周长的最小值为 $AD+AG=4+4\sqrt{5}$.

【点睛】本题是四边形综合题，主要考查了正方形的性质，轴对称 - 最短路线问题，全等三角形的判定与性质，等腰直角三角形的判定与性质等知识，作辅助线构造全等三角形是解题的关键.

