

2022 年湖南省益阳市中考数学试卷

一、选择题 (本题共 10 个小题, 每小题 4 分, 共 40 分; 每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 四个实数 $-\sqrt{2}$, 1, 2, $\frac{1}{3}$ 中, 比 0 小的数是 ()

- A. $-\sqrt{2}$ B. 1 C. 2 D. $\frac{1}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用零大于一切负数来比较即可.

【详解】解: 根据负数都小于零可得, $-\sqrt{2} < 0$, 故 A 正确.

故选: A.

【点睛】本题考查了实数的大小比较, 解答此题关键要明确: 正实数 $>$ 零 $>$ 负实数, 两个负实数绝对值大的反而小.

2. 下列各式中, 运算结果等于 a^2 的是 ()

- A. $a^3 - a$ B. $a + a$ C. $a \cdot a$ D. $a^6 \div a^3$

【答案】C

【解析】

【分析】根据同底数幂的运算及整式的加减运算进行计算判断即可.

【详解】A、 $\because a^3 - a$ 不是同类项, 不能进行合并运算, $\therefore$ 选项 A 不符合题意;

B、 $\because a + a = 2a$, $\therefore$ 选项 B 不符合题意;

C、 $\because a \cdot a = a^2$, $\therefore$ 选项 C 符合题意;

D、 $\because a^6 \div a^3 = a^3$, $\therefore$ 选项 D 不符合题意.

故选: C.

【点睛】本题考查了同底数幂的运算及整式的加减运算, 熟记同底数幂的运算的运算法则及整式的加减运算法则是解题的关键.

3. 若 $x = 2$ 是下列四个选项中的某个不等式组的一个解, 则这个不等式组是 ()

- A. $\begin{cases} x < 1 \\ x < -1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \end{cases}$

【答案】D

【解析】

【分析】先把不等式组的解集求出来，然后根据解集判断 $x=2$ 是否是解集一个解.

【详解】解：A、 $\because$ 不等式组的解集为 $x < -1$ ， $\therefore x=2$ 不在这个范围内，故选项 A 不符合题意；

B、 $\because$ 不等式组的解集为 $-1 < x < 1$ ， $\therefore x=2$ 不在这个范围内，故选项 B 不符合题意；

C、 $\because$ 不等式组无解， $\therefore x=2$ 不在这个范围内，故选项 C 不符合题意；

D、 $\because$ 不等式组的解集为 $x > 1$ ， $\therefore x=2$ 在这个范围内，故选项 D 符合题意.

故选：D.

【点睛】本题考查了不等式组的解集，不等式组解集的确定方法：同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小无解了.

4. 若 $x = -1$ 是方程 $x^2 + x + m = 0$ 的一个根，则此方程的另一个根是 ()

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】根据根与系数的关系即可求出答案.

【详解】设 $x^2 + x + m = 0$ 另一个根是 α ,

$$\therefore -1 + \alpha = -1,$$

$$\therefore \alpha = 0,$$

故选：B.

【点睛】本题考查一元二次方程根与系数的关系，解题的关键是熟练运用一元二次方程根与系数的关系，本题属于基础题型.

5. 已知一个函数的因变量 y 与自变量 x 的几组对应值如表，则这个函数的表达式可以是 ()

x	$\cdots$	-1	0	1	2	$\cdots$
y	$\cdots$	-2	0	2	4	$\cdots$

A. $y = 2x$

B. $y = x - 1$

C. $y = \frac{2}{x}$

D. $y = x^2$

【答案】A

【解析】

【分析】观察表中 x , y 的对应值可以看出， y 的值恰好是 x 值的 2 倍. 从而求出 y 与 x 的函数表达式.

【详解】解：根据表中数据可以看出： y 的值是 x 值的 2 倍，

$$\therefore y = 2x.$$

故选：A.

【点睛】本题考查了列正比例函数表达式，解题的关键是根据所给的数据找出自变量与因变量之间的关系.

6. 在某市组织的物理实验操作考试中，考试所用实验室共有 24 个测试位，分成 6 组，同组 4 个测试位各有一道相同试题，各组的试题不同，分别标记为 A, B, C, D, E, F ，考生从中随机抽取一道试题，则某个考生抽到试题 A 的概率为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{24}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据抽到试题 A 的概率 = 试题 A 出现的结果数 ÷ 所有可能出现的结果数即可得出答案.

【详解】解：总共有 24 道题，试题 A 共有 4 道，

$$P(\text{抽到试题 } A) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6},$$

故选：C.

【点睛】本题考查了概率公式，掌握到试题 A 的概率 = 试题 A 出现的结果数 ÷ 所有可能出现的结果数是解题的关键.

7. 如图 1 所示，将长为 6 的矩形纸片沿虚线折成 3 个矩形，其中左右两侧矩形的宽相等，若要将其围成如图 2 所示的三棱柱形物体，则图中 a 的值可以是 ()

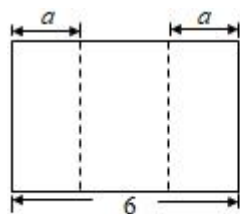


图 1



图 2

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】本题实际上是长为 6 的线段围成一个等腰三角形，求腰的取值范围.

【详解】解：长为 6 的线段围成等腰三角形的两腰为 a ，则底边长为 $6 - 2a$.

$$\text{由题意得, } \begin{cases} 2a > 6 - 2a \\ 6 - 2a > 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \frac{3}{2} < a < 3,$$

所给选项中分别为：1, 2, 3, 4.

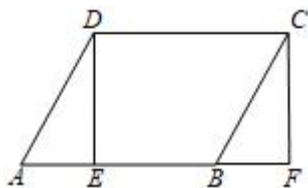
∴只有2符合上面不等式组的解集,

∴ a 只能取2.

故选: B.

【点睛】本题考查了三角形三边之间的关系、解不等式组, 解题的关键是把三棱柱的问题转化为三角形三边的问题.

8. 1. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AB=8$, 点 E 是 AB 上一点, $AE=3$, 连接 DE , 过点 C 作 $CF \parallel DE$, 交 AB 的延长线于点 F , 则 BF 的长为 ()



A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质可知 $CD=AB=8$, 由 $AE=3$, 可得 BE 的长, 再判定四边形 $DEFC$ 是平行四边形, 根据平行四边形的性质可得 EF 的长, 由 $BF=EF-BE$, 即可求出 BF .

【详解】解: $\because$ 在 $\square ABCD$ 中, $AB=8$,

$$\therefore CD=AB=8, \quad AB \parallel CD,$$

$$\because AE=3,$$

$$\therefore BE=AB-AE=5,$$

$$\because CF \parallel DE,$$

$\therefore$ 四边形 $DEFC$ 是平行四边形,

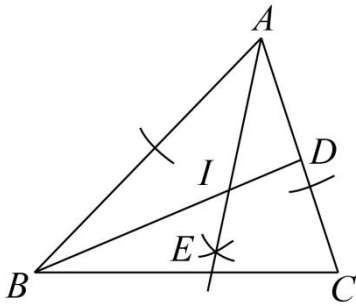
$$\therefore DC=EF=8,$$

$$\therefore BF=EF-BE=8-5=3.$$

故选: C.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质以及判定, 能够熟练运用平行四边形的判定是解题的关键.

9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, BD 平分 $\angle ABC$, 以点 A 为圆心, 以任意长为半径画弧交射线 AB , AC 于两点, 分别以这两点为圆心, 以适当的定长为半径画弧, 两弧交于点 E , 作射线 AE , 交 BD 于点 I , 连接 CI , 以下说法错误的是 ()



- A. I 到 AB , AC 边的距离相等
- B. CI 平分 $\angle ACB$
- C. I 是 $\triangle ABC$ 的内心
- D. I 到 A , B , C 三点的距离相等

【答案】D

【解析】

【分析】根据作图先判断 AE 平分 $\angle BAC$, 再由三角形内心的性质解答即可.

【详解】解: A . 由作图可知, AE 是 $\angle BAC$ 的平分线,

$\therefore I$ 到 AB , AC 边的距离相等, 故选项正确, 不符合题意;

$B. \because BD$ 平分 $\angle ABC$, 三角形三条角平分线交于一点,

$\therefore CI$ 平分 $\angle ACB$, 故选项正确, 不符合题意;

C . 由上可知, I 是 $\triangle ABC$ 的内心, 故选项正确, 不符合题意,

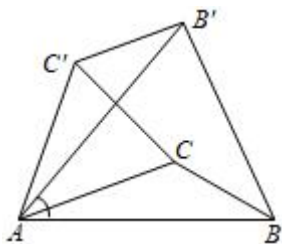
$D. \because I$ 是 $\triangle ABC$ 的内心,

$\therefore I$ 到 AB , AC , BC 的距离相等, 不是到 A , B , C 三点的距离相等, 故选项错误, 符合题意;

故选: D.

【点睛】此题考查尺规作图, 涉及三角形内心的性质, 解题的关键是掌握基本的尺规作图和三角形内心的性质.

10. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 20^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕 A 点逆时针旋转 50° 得到 $\triangle AB'C'$, 以下结论: ① $BC = B'C'$, ② $AC \parallel C'B'$, ③ $C'B' \perp BB'$, ④ $\angle ABB' = \angle ACC'$, 正确的有 ()



- A. ①②③
- B. ①②④
- C. ①③④
- D. ②③④

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据旋转的性质可得, $BC = B'C'$, $\angle C'AB' = \angle CAB = 20^\circ$, $\angle AB'C' = \angle ABC = 30^\circ$, 再根据旋转角的度数为 50° , 通过推理证明对①②③④四个结论进行判断即可.

【详解】 解: ① $\because \triangle ABC$ 绕 A 点逆时针旋转 50° 得到 $\triangle AB'C'$,

$\therefore BC = B'C'$. 故①正确;

② $\because \triangle ABC$ 绕 A 点逆时针旋转 50° ,

$\therefore \angle BAB' = 50^\circ$.

$\because \angle CAB = 20^\circ$,

$\therefore \angle B'AC = \angle BAB' - \angle CAB = 30^\circ$.

$\because \angle AB'C' = \angle ABC = 30^\circ$,

$\therefore \angle AB'C' = \angle B'AC$.

$\therefore AC \parallel C'B'$. 故②正确;

③ 在 $\triangle BAB'$ 中, $AB = AB'$, $\angle BAB' = 50^\circ$,

$\therefore \angle AB'B = \angle ABB' = \frac{1}{2} (180^\circ - 50^\circ) = 65^\circ$.

$\therefore \angle BB'C' = \angle AB'B + \angle AB'C' = 65^\circ + 30^\circ = 95^\circ$.

$\therefore CB'$ 与 BB' 不垂直. 故③不正确;

④ 在 $\triangle ACC'$ 中,

$AC = AC'$, $\angle CAC' = 50^\circ$,

$\therefore \angle ACC' = \frac{1}{2} (180^\circ - 50^\circ) = 65^\circ$.

$\therefore \angle ABB' = \angle ACC'$. 故④正确.

$\therefore$ ①②④这三个结论正确.

故选: B.

【点睛】 此题考查了旋转性质的应用, 图形的旋转只改变图形的位置, 不改变图形的形状与大小, 还考查了等腰三角形的判定和性质、平行线的判定等知识. 熟练掌握旋转的性质是解题的关键.

二、填空题 (本题共 8 个小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 请将答案填在答题卡中对应题号的横线上)

11. $-\frac{1}{3}$ 的绝对值是_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】根据绝对值的几何意义分析即可求解.

【详解】解: 由绝对值的几何意义可知, 在数轴上 $-\frac{1}{3}$ 这个数到原点的距离为 $\frac{1}{3}$,
故 $-\frac{1}{3}$ 的绝对值是 $\frac{1}{3}$,
故答案为 $\frac{1}{3}$.

【点睛】本题考查了绝对值的几何意义, 绝对值的几何意义是指数轴上的点到原点的距离, 本题属于基础题, 熟练掌握绝对值的概念是解决本题的关键.

12. 计算: $\frac{2a}{a-1} - \frac{2}{a-1} = \text{-----}$.

【答案】2

【解析】

【分析】同分母分式相加减, 分母不变, 分子相加减. 根据同分母分式加减法则进行计算即可.

【详解】解: $\frac{2a}{a-1} - \frac{2}{a-1}$
 $= \frac{2a-2}{a-1}$
 $= \frac{2(a-1)}{a-1}$
 $= 2.$

故答案为: 2.

【点睛】此题考查了分式的加减法, 熟练掌握运算法则是解题的关键.

13. 已知 m, n 同时满足 $2m+n=3$ 与 $2m-n=1$, 则 $4m^2-n^2$ 的值是 _____.

【答案】3

【解析】

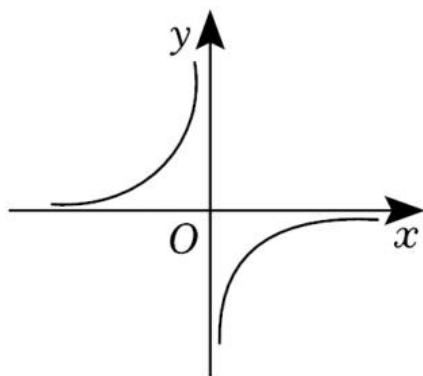
【分析】观察已知和所求可知, $4m^2-n^2=(2m+n)(2m-n)$, 将代数式的值代入即可得出结论.

【详解】解: $\because 2m+n=3, 2m-n=1,$
 $\therefore 4m^2-n^2=(2m+n)(2m-n)=3 \times 1=3,$

故答案为: 3.

【点睛】本题主要考查代数式求值, 平方差公式的应用, 熟知平方差公式的结构是解题关键.

14. 反比例函数 $y = \frac{k-2}{x}$ 的图像分布情况如图所示, 则 k 的值可以是 _____ (写出一个符合条件的 k 值即可).



【答案】1 (答案不唯一)

【解析】

【分析】根据反比例函数的图像所处的位置确定 $k-2$ 的符号，从而确定 k 的范围，可得答案.

【详解】由反比例函数 $y = \frac{k-2}{x}$ 的图像位于第二，四象限可知， $k-2 < 0$,

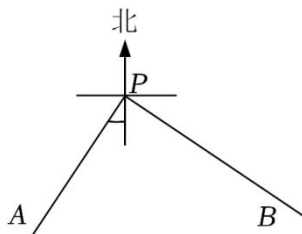
$$\therefore k < 2,$$

$\therefore k$ 的值可以是 1,

故答案为: 1 (答案不唯一).

【点睛】考查了反比例函数的性质及图像，解题的关键是掌握反比例函数的性质.

15. 如图， PA ， PB 表示以 P 为起点的两条公路，其中公路 PA 的走向是南偏西 34° ，公路 PB 的走向是南偏东 56° ，则这两条公路的夹角 $\angle APB = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



【答案】90

【解析】

【分析】根据题意可得 $\angle APC = 34^\circ$ ， $\angle BPC = 56^\circ$ ，然后进行计算即可解答.

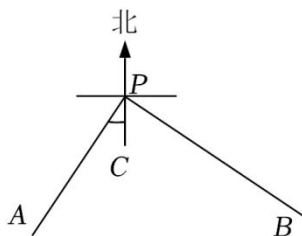
【详解】解：如图：

由题意得：

$$\angle APC = 34^\circ, \quad \angle BPC = 56^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = \angle APC + \angle BPC = 90^\circ,$$

故答案为: 90.



【点睛】 本题考查了方向角，熟练掌握方向角的定义是解题的关键.

16. 近年来，洞庭湖区环境保护效果显著，南迁的候鸟种群越来越多. 为了解南迁到该区域某湿地的 A 种候鸟的情况，从中捕捉 40 只，戴上识别卡并放回；经过一段时间后观察发现，200 只 A 种候鸟中有 10 只佩有识别卡，由此估计该湿地约有 _____ 只 A 种候鸟.

【答案】 800

【解析】

【分析】 在样本中“200 只 A 种候鸟中有 10 只佩有识别卡”，即可求得有识别卡的所占比例，而这一比例也适用于整体，据此即可解答.

【详解】 解： 设该湿地约有 x 只 A 种候鸟，

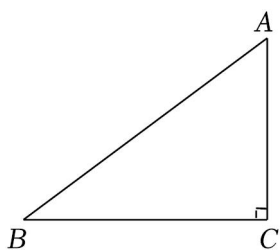
则 $200:10 = x:40$,

解得 $x = 800$.

故答案为： 800.

【点睛】 本题主要考查的是通过样本去估计总体， 只需将样本“成比例地放大”为总体即可.

17. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， 若 $\sin A = \frac{4}{5}$ ， 则 $\cos B =$ _____.



【答案】 $\frac{4}{5}$

【解析】

【分析】 根据三角函数的定义即可得到 $\cos B = \sin A = \frac{4}{5}$.

【详解】 解： 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，

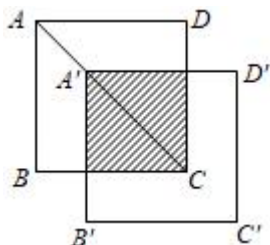
$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}.$$

故答案为: $\frac{4}{5}$.

【点睛】本题考查了三角函数的定义, 由定义可推出互余两角的三角函数的关系: 若 $\angle A + \angle B = 90^\circ$, 则 $\sin A = \cos B$, $\cos A = \sin B$. 熟知相关定义是解题关键.

18. 如图, 将边长为 3 的正方形 $ABCD$ 沿其对角线 AC 平移, 使 A 的对应点 A' 满足 $AA' = \frac{1}{3}AC$, 则所得正方形与原正方形重叠部分的面积是 _____.



【答案】4

【解析】

【分析】由正方形边长为 3, 可求 $AC = 3\sqrt{2}$, 则 $AA' = \frac{1}{3}AC = \sqrt{2}$, 由平移可得重叠部分是正方形, 根据正方形的面积公式可求重叠部分面积.

【详解】解: $\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 3,

$$\therefore AC = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore AA' = \frac{1}{3}AC = \sqrt{2},$$

$$\therefore A'C = 2\sqrt{2},$$

由题意可得重叠部分是正方形,

$$\therefore \text{重叠部分的正方形的边长为 } \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\sqrt{2} = 2,$$

$$\therefore S_{\text{重叠部分}} = 4.$$

故答案为: 4.

【点睛】本题考查了正方形的性质, 平移的性质, 关键是灵活运用这些性质解决问题.

三、解答题 (本题共 8 个小题, 共 78 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

19. 计算: $(-2022)^0 + 6 \times (-\frac{1}{2}) + \sqrt{8} \div \sqrt{2}$.

【答案】0

【解析】

【分析】先利用零指数幂的意义, 有理数的乘法, 二次根式的性质化简, 然后运算即可.

【详解】解: $(-2022)^0 + 6 \times (-\frac{1}{2}) + \sqrt{8} \div \sqrt{2}$

$$= 1 + (-3) + \sqrt{8 \div 2}$$

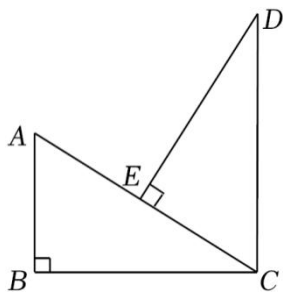
$$= 1 - 3 + \sqrt{4}$$

$$= -2 + 2$$

$$= 0$$

【点睛】本题主要考查了实数的运算, 零指数幂的意义, 有理数的乘法, 二次根式的性质, 正确利用上述法则与性质解答是解题的关键.

20. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $CD \parallel AB$, $DE \perp AC$ 于点 E , 且 $CE = AB$. 求证: $\triangle CED \cong \triangle ABC$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】由垂直的定义可知, $\angle DEC = \angle B = 90^\circ$, 由平行线的性质可得, $\angle A = \angle DCE$, 进而由 ASA 可得结论.

【详解】证明: $\because DE \perp AC$, $\angle B = 90^\circ$,

$$\therefore \angle DEC = \angle B = 90^\circ,$$

$$\because CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle A = \angle DCE,$$

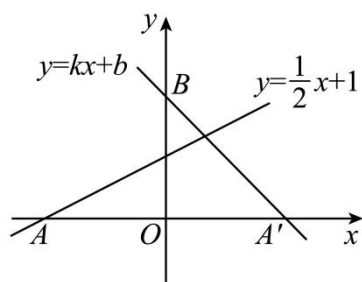
在 $\triangle CED$ 和 $\triangle ABC$ 中,

$$\begin{cases} \angle DCE = \angle A \\ CE = AB \\ \angle DEC = \angle B \end{cases},$$

$$\therefore \triangle CED \cong \triangle ABC \text{ (ASA)}.$$

【点睛】本题主要考查全等三角形的判定、垂直的定义和平行线的性质, 熟知全等三角形的判定定理是解题基础.

21. 如图, 直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 与 x 轴交于点 A , 点 A 关于 y 轴的对称点为 A' , 经过点 A' 和 y 轴上的点 $B(0, 2)$ 的直线设为 $y = kx + b$.



- (1) 求点 A' 的坐标;
- (2) 确定直线 $A'B$ 对应的函数表达式.

【答案】 (1) A' (2, 0)

(2) $y = -x+2$

【解析】

【分析】 (1) 利用直线解析式求得点 A 坐标, 利用关于 y 轴的对称点的坐标的特征解答即可;

(2) 利用待定系数法解答即可.

【小问 1 详解】

解: 令 $y = 0$, 则 $\frac{1}{2}x+1 = 0$,

$$\therefore x = -2,$$

$$\therefore A (-2, 0).$$

$\because$ 点 A 关于 y 轴的对称点为 A' ,

$$\therefore A' (2, 0).$$

【小问 2 详解】

解: 设直线 $A'B$ 的函数表达式为 $y = kx+b$,

$$\therefore \begin{cases} 2k+b=0 \\ b=2 \end{cases},$$

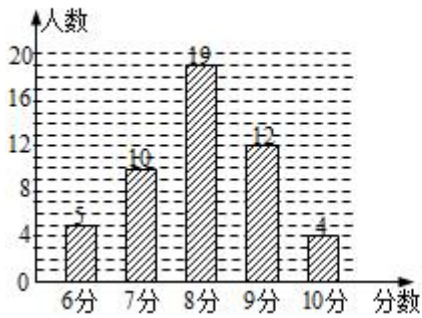
$$\text{解得: } \begin{cases} k=-1 \\ b=2 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 $A'B$ 对应的函数表达式为 $y = -x+2$.

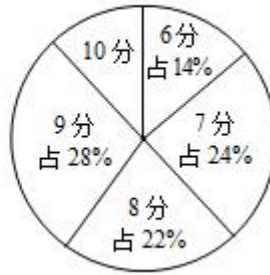
【点睛】 本题主要考查了一次函数图象的性质、一次函数图象上点的坐标的特征、待定系数法确定函数的解析式、关于 y 轴的对称点的坐标的特征等知识, 利用待定系数法求函数解析式是解题的关键.

22. 为了加强心理健康教育, 某校组织七年级 (1) (2) 两班学生进行了心理健康常识测试 (分数为整数, 满分为 10 分), 已知两班学生人数相同, 根据测试成绩绘制了如下所示的统计图.

(1) 班学生成绩条形统计图



(2) 班学生成绩扇形统计图



- (1) 求 (2) 班学生中测试成绩为 10 分的人数;
- (2) 请确定下表中 a , b , c 的值 (只要求写出求 a 的计算过程);

统计量	平均数	众数	中位数	方差
(1) 班	8	8	c	1.16
(2) 班	a	b	8	1.56

- (3) 从上表中选择合适的统计量, 说明哪个班的成绩更均匀.

【答案】 (1) (2) 班学生中测试成绩为 10 分的人数是 6 人

- (2) a , b , c 的值分别为 8, 9, 8

- (3) (1) 班成绩更均匀

【解析】

【分析】 (1) 根据条形图求出人数, 根据扇形统计图求出所占百分比, 即可得出结论;

- (2) 根据 (1) 中数据分别计算 a , b , c 的值即可;

- (3) 根据方差越小, 数据分布越均匀判断即可.

【小问 1 详解】

解: 由题意知, (1) 班和 (2) 班人数相等, 为: $5+10+19+12+4=50$ (人),

$\therefore$ (2) 班学生中测试成绩为 10 分的人数为: $50 \times (1 - 28\% - 22\% - 24\% - 14\%) = 6$ (人),

答: (2) 班学生中测试成绩为 10 分的人数是 6 人;

【小问 2 详解】

由题意知:

$$a = \frac{6 \times 10 + 50 \times 28\% \times 9 + 50 \times 22\% \times 8 + 50 \times 24\% \times 7 + 50 \times 14\% \times 6}{50} = 8;$$

$\therefore$ 9 分占总体的百分比为 28% 是最大的,

$\therefore$ 9 分的人数是最多的,

∴ 众数为 9 分, 即 $b = 9$;

由题意可知, (1) 班的成绩按照从小到大排列后, 中间两个数都是 8,

$$\therefore c = \frac{8+8}{2} = 8;$$

答: a, b, c 的值分别为 8, 9, 8;

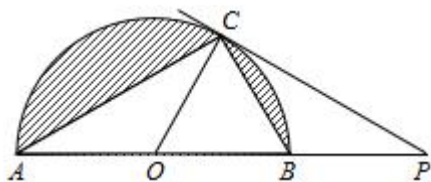
【小问 3 详解】

∴ (1) 班的方差为 1.16, (2) 班的方差为 1.56, 且 $1.16 < 1.56$,

∴ 根据方差越小, 数据分布越均匀可知 (1) 班成绩更均匀.

【点睛】 本题主要考查统计的知识, 根据方差判断稳定性, 熟练根据统计图得出相应的数据是解题的关键.

23. 如图, C 是圆 O 被直径 AB 分成的半圆上一点, 过点 C 的圆 O 的切线交 AB 的延长线于点 P , 连接 CA , CO , CB .



(1) 求证: $\angle ACO = \angle BCP$;

(2) 若 $\angle ABC = 2\angle BCP$, 求 $\angle P$ 的度数;

(3) 在 (2) 的条件下, 若 $AB = 4$, 求图中阴影部分的面积 (结果保留 π 和根号).

【答案】 (1) 见解析 (2) 30°

(3) $2\pi - 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 (1) 由 AB 是半圆 O 的直径, CP 是半圆 O 的切线, 可得 $\angle ACB = \angle OCP$, 即得 $\angle ACO = \angle BCP$;

(2) 由 $\angle ABC = 2\angle BCP$, 可得 $\angle ABC = 2\angle A$, 从而 $\angle A = 30^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$, 可得 $\angle P$ 的度数是 30° ;

(3) $\angle A = 30^\circ$, 可得 $BC = \frac{1}{2}AB = 2$, $AC = \sqrt{3}BC$, 即得 $S_{\triangle ABC}$, 再利用阴影部分的面积等于半圆减去 $S_{\triangle ABC}$

即可解题.

【小问 1 详解】

∵ AB 是半圆 O 的直径,

∴ $\angle ACB = 90^\circ$,

∵ CP 是半圆 O 的切线,

∴ $\angle OCP = 90^\circ$,

∴ $\angle ACB = \angle OCP$,

$$\therefore \angle ACO = \angle BCP;$$

【小问 2 详解】

由 (1) 知 $\angle ACO = \angle BCP$,

$$\therefore \angle ABC = 2\angle BCP,$$

$$\therefore \angle ABC = 2\angle ACO,$$

$$\therefore OA = OC,$$

$$\therefore \angle ACO = \angle A,$$

$$\therefore \angle ABC = 2\angle A,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ, \quad \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACO = \angle BCP = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle P = \angle ABC - \angle BCP = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ,$$

答: $\angle P$ 的度数是 30° ;

【小问 3 详解】

由 (2) 知 $\angle A = 30^\circ$,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore BC = \frac{1}{2}AB = 2, \quad AC = \sqrt{3}BC = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{阴影部分的面积是 } \frac{1}{2}\pi \times \left(\frac{AB}{2}\right)^2 - 2\sqrt{3} = 2\pi - 2\sqrt{3},$$

答: 阴影部分的面积是 $2\pi - 2\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查圆的综合应用, 涉及圆的切线性质, 直角三角形性质及应用等知识, 题目难度不大.

24. 在某市组织的农机推广活动中, 甲、乙两人分别操控 A 、 B 两种型号的收割机参加水稻收割比赛. 已知乙每小时收割的亩数比甲少 40%, 两人各收割 6 亩水稻, 乙则比甲多用 0.4 小时完成任务; 甲、乙在收割过程中对应收稻谷有一定的遗落或破损, 损失率分别为 3%, 2%.

(1) 甲、乙两人操控 A 、 B 型号收割机每小时各能收割多少亩水稻?

(2) 某水稻种植大户有与比赛中规格相同的 100 亩待收水稻, 邀请甲、乙两人操控原收割机一同前去完成收割任务, 要求平均损失率不超过 2.4%, 则最多安排甲收割多少小时?

【答案】 (1) 甲操控 A 型号收割机每小时收割 10 亩水稻, 乙操控 B 型号收割机每小时收割 6 亩水稻

(2) 最多安排甲收割 4 小时

【解析】

【分析】(1) 设甲操控 A 型号收割机每小时收割 x 亩水稻, 则乙操控 B 型号收割机每小时收割 $(1 - 40\%)x$ 亩水稻, 利用工作时间 = 工作总量 ÷ 工作效率, 结合乙比甲多用 0.4 小时完成任务, 即可得出关于 x 的分式方程, 解之经检验后即可求出甲操控 A 型号收割机每小时收割水稻的亩数, 再将其代入 $(1 - 40\%)x$ 中即可求出乙操控 B 型号收割机每小时收割水稻的亩数;

(2) 设安排甲收割 y 小时, 则安排乙收割 $\frac{100-10y}{6}$ 小时, 根据要求平均损失率不超过 2.4%, 即可得出关于 y 的一元一次不等式, 解之取其中的最大值即可得出结论.

【小问 1 详解】

解: 设甲操控 A 型号收割机每小时收割 x 亩水稻, 则乙操控 B 型号收割机每小时收割 $(1 - 40\%)x$ 亩水稻,

依题意得: $\frac{6}{(1-40\%)x} - \frac{6}{x} = 0.4,$

解得: $x = 10,$

经检验, $x = 10$ 是原方程的解, 且符合题意,

$\therefore (1 - 40\%)x = (1 - 40\%) \times 10 = 6.$

答: 甲操控 A 型号收割机每小时收割 10 亩水稻, 乙操控 B 型号收割机每小时收割 6 亩水稻.

【小问 2 详解】

设安排甲收割 y 小时, 则安排乙收割 $\frac{100-10y}{6}$ 小时,

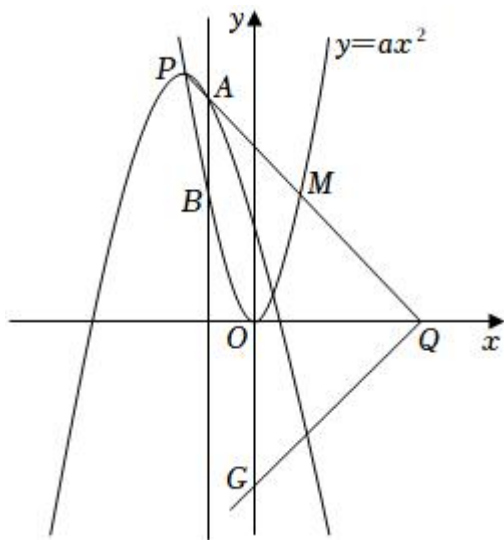
依题意得: $3\% \times 10y + 2\% \times 6 \times \frac{100-10y}{6} \leq 2.4\% \times 100,$

解得: $y \leq 4.$

答: 最多安排甲收割 4 小时.

【点睛】本题考查了分式方程的应用以及一元一次不等式的应用, 解题的关键是: (1) 找准等量关系, 正确列出分式方程; (2) 根据各数量之间的关系, 正确列出一元一次不等式.

25. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $E: y = -(x - m)^2 + 2m^2$ ($m < 0$) 的顶点 P 在抛物线 $F: y = ax^2$ 上, 直线 $x = t$ 与抛物线 E, F 分别交于点 A, B .



- (1) 求 a 的值;
- (2) 将 A, B 的纵坐标分别记为 y_A, y_B , 设 $s = y_A - y_B$, 若 s 的最大值为 4, 则 m 的值是多少?
- (3) Q 是 x 轴的正半轴上一点, 且 PQ 的中点 M 恰好在抛物线 F 上. 试探究: 此时无论 m 为何负值, 在 y 轴的负半轴上是否存在定点 G , 使 $\angle PQG$ 总为直角? 若存在, 请求出点 G 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $a = 2$ (2) $m = -\sqrt{3}$

(3) 存在, $G(0, -\frac{3\sqrt{2}+4}{2})$

【解析】

【分析】(1) 由抛物线的顶点式可直接得出顶点 P 的坐标, 再代入抛物线 F 可得出结论;

(2) 根据题意可分别表达 A, B 的纵坐标, 再根据二次函数的性质可求出 m 的值;

(3) 过点 Q 作 x 轴的垂线 KN , 分别过点 P, G 作 x 轴的平行线, 与 KN 分别交于 K, N , 则 $\triangle PKQ \sim \triangle QNG$, 设出点 M 的坐标, 可表达点 Q 和点 G 的坐标, 从而可得出结论.

【小问 1 详解】

解: 由题意可知, 抛物线 $E: y = -(x-m)^2 + 2m^2 (m < 0)$ 的顶点 P 的坐标为 $(m, 2m^2)$,

$\because$ 点 P 在抛物线 $F: y = ax^2$ 上,

$$\therefore am^2 = 2m^2,$$

$$\therefore a = 2.$$

【小问 2 详解】

解: $\because$ 直线 $x = t$ 与抛物线 E, F 分别交于点 A, B ,

$$\therefore y_A = -(t-m)^2 + 2m^2 = -t^2 + 2mt + m^2, \quad y_B = 2t^2,$$

$$\therefore s = y_A - y_B$$

$$= -t^2 + 2mt + m^2 - 2t^2$$

$$= -3t^2 + 2mt + m^2$$

$$= -3\left(t - \frac{1}{3}m\right)^2 + \frac{4}{3}m^2,$$

$$Q-3 < 0,$$

$$\therefore \text{当 } t = \frac{1}{3}m \text{ 时, } s \text{ 的最大值为 } \frac{4}{3}m^2,$$

$$\therefore s \text{ 的最大值为 } 4,$$

$$\therefore \frac{4}{3}m^2 = 4, \text{ 解得 } m = \pm\sqrt{3},$$

$$\therefore m < 0,$$

$$\therefore m = -\sqrt{3}.$$

【小问 3 详解】

解: 存在, 理由如下:

设点 M 的坐标为 n , 则 $M(n, 2n^2)$,

$$\therefore Q(2n - m, 4n^2 - m^2),$$

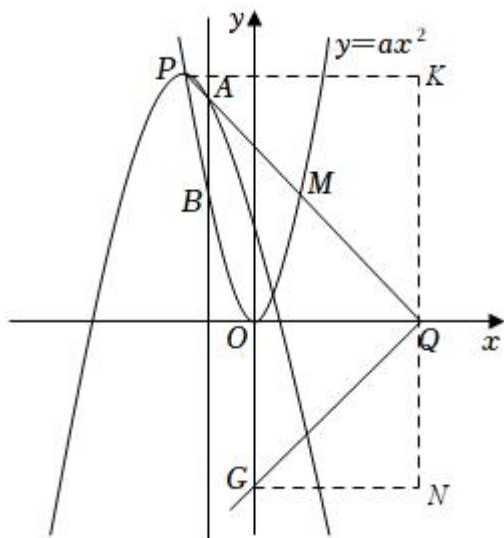
$\therefore$ 点 Q 在 x 轴正半轴上,

$$\therefore 2n - m > 0 \text{ 且 } 4n^2 - m^2 = 0,$$

$$\therefore n = -\frac{\sqrt{2}}{2}m,$$

$$\therefore M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}m, m^2\right), Q(-\sqrt{2}m - m, 0).$$

如图, 过点 Q 作 x 轴的垂线 KN , 分别过点 P , G 作 x 轴的平行线, 与 KN 分别交于 K , N ,



$$\therefore \angle K = \angle N = 90^\circ, \quad \angle QPK + \angle PQK = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PQG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PQK + \angle GQN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle QPK = \angle GQN,$$

$$\therefore \triangle PKQ \sim \triangle QNG,$$

$$\therefore PK : QN = KQ : GN, \quad \text{即 } PK \cdot GN = KQ \cdot QN.$$

$$\therefore PK = -\sqrt{2}m - m - m = -\sqrt{2}m - 2m, \quad KQ = 2m^2, \quad GN = -\sqrt{2}m - m,$$

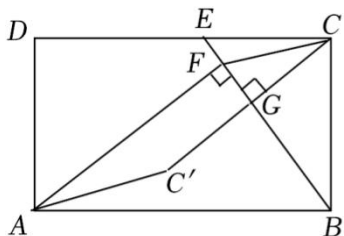
$$\therefore (-\sqrt{2}m - 2m)(-\sqrt{2}m - m) = 2m^2 \cdot QN$$

$$\text{解得 } QM = \frac{3\sqrt{2} + 4}{2}.$$

$$\therefore G(0, -\frac{3\sqrt{2} + 4}{2}).$$

【点睛】本题属于二次函数综合题，涉及待定系数法求函数解析式，二次函数的性质，相似三角形的性质与判定，中点坐标公式等知识，解题的关键是构造相似三角形得出方程进行求解。

26. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 15$ ， $BC = 9$ ， E 是 CD 边上一点（不与点 C 重合），作 $AF \perp BE$ 于 F ， $CG \perp BE$ 于 G ，延长 CG 至点 C' ，使 $C'G = CG$ ，连接 CF ， AC' 。



(1) 直接写出图中与 $\triangle AFB$ 相似的一个三角形；

(2) 若四边形 $AFCC'$ 是平行四边形，求 CE 的长；

(3) 当 CE 的长为多少时，以 C' ， F ， B 为顶点的三角形是以 $C'F$ 为腰的等腰三角形？

【答案】(1) 答案不唯一, 如 $\triangle AFB \sim \triangle BCE$

(2) $CE = 7.5$ (3) 当 CE 的长为 $\frac{54}{5}$ 或 3 时, 以 C', F, B 为顶点的三角形是以 $C'F$ 为腰的等腰三

角形

【解析】

【分析】(1) 因为 $\triangle AFB$ 是直角三角形, 所以和它相似的三角形都是直角三角形, 有三个直角三角形和 $\triangle AFB$ 相似, 解答时任意写出一个即可;

(2) 根据 $\triangle AFB \sim \triangle BGC$, 得 $\frac{AF}{BG} = \frac{AB}{BC}$, 即 $\frac{AF}{BG} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$, 设 $AF = 5x$, $BG = 3x$, 根据 $\triangle AFB \sim \triangle BCE \sim \triangle BGC$, 列比例式可得 CE 的长;

(3) 分两种情况: ①当 $C'F = BC'$ 时, 如图 2, ②当 $C'F = BF$ 时, 如图 3, 根据三角形相似列比例式可得结论.

【小问 1 详解】

解: (任意回答一个即可);

①如图 1, $\triangle AFB \sim \triangle BCE$, 理由如下:

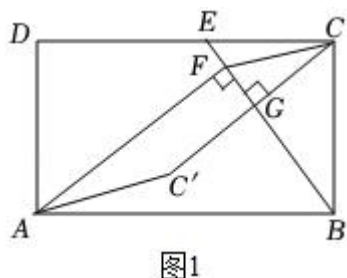


图1

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore DC \parallel AB$, $\angle BCE = \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle BEC = \angle ABF$,

$\because AF \perp BE$,

$\therefore \angle AFB = 90^\circ$,

$\therefore \angle AFB = \angle BCE = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AFB \sim \triangle BCE$;

② $\triangle AFB \sim \triangle CGE$, 理由如下:

$\because CG \perp BE$,

$\therefore \angle CGE = 90^\circ$,

$\therefore \angle CGE = \angle AFB$,

$\because \angle CEG = \angle ABF$,

$$\therefore \triangle AFB \sim \triangle CGE;$$

③ $\triangle AFB \sim \triangle BGC$, 理由如下:

$$\because \angle ABF + \angle CBG = \angle CBG + \angle BCG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle BCG,$$

$$\because \angle AFB = \angle CGB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AFB \sim \triangle BGC;$$

【小问 2 详解】

$\because$ 四边形 $AFCC'$ 是平行四边形,

$$\therefore AF = CC',$$

由 (1) 知: $\triangle AFB \sim \triangle BGC$,

$$\therefore \frac{AF}{BG} = \frac{AB}{BC}, \text{ 即 } \frac{AF}{BG} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3},$$

设 $AF = 5x$, $BG = 3x$,

$$\therefore CC' = AF = 5x,$$

$$\because CG = C'G,$$

$$\therefore CG = C'G = 2.5x,$$

$$\because \triangle AFB \sim \triangle BCE \sim \triangle BGC,$$

$$\therefore \frac{CG}{BG} = \frac{CE}{BC}, \text{ 即 } \frac{2.5x}{3x} = \frac{CE}{9},$$

$$\therefore CE = 7.5;$$

【小问 3 详解】

分两种情况:

① 当 $C'F = BC'$ 时, 如图 2,

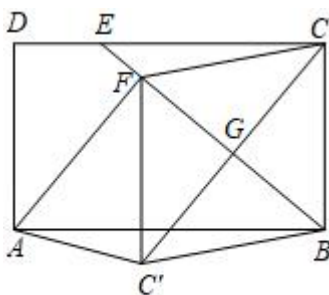


图2

$$\because C'G \perp BE,$$

$$\therefore BG = GF,$$

$$\because CG = C'G,$$

∴ 四边形 $BCFC'$ 是菱形,

$$\therefore CF = CB = 9,$$

由 (2) 知: 设 $AF = 5x$, $BG = 3x$,

$$\therefore BF = 6x,$$

$$\therefore \triangle AFB \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{AF}{BC} = \frac{BF}{CE}, \text{ 即 } \frac{5x}{9} = \frac{6x}{CE},$$

$$\therefore \frac{5x}{6x} = \frac{9}{CE},$$

$$\therefore CE = \frac{54}{5};$$

② 当 $C'F = BF$ 时, 如图 3,

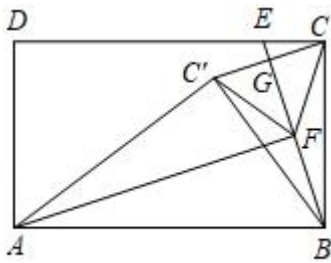


图3

由 (1) 知: $\triangle AFB \sim \triangle BGC$,

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BF}{CG} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3},$$

设 $BF = 5a$, $CG = 3a$,

$$\therefore C'F = 5a,$$

$$\therefore CG = C'G, BE \perp CC',$$

$$\therefore CF = C'F = 5a,$$

$$\therefore FG = \sqrt{CF^2 - CG^2} = 4a,$$

$$\therefore \tan \angle CBE = \frac{CE}{BC} = \frac{CG}{BG},$$

$$\therefore \frac{CE}{9} = \frac{3a}{4a + 5a},$$

$$\therefore CE = 3;$$

综上, 当 CE 的长为 $\frac{54}{5}$ 或 3 时, 以 C' , F , B 为顶点的三角形是以 $C'F$ 为腰的等腰三角形.

【点睛】本题是四边形综合题, 考查了矩形的判定和性质, 菱形的判定和性质, 相似三角形的判定和性质,

平行线的性质，等腰三角形的判定和性质等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考压轴题.

