

2022 年湖南省湘西州中考数学试卷

一、选择题 (本大题 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分, 请将每个小题所给四个选项中唯一正确选项的代号填涂在答题卡相应的位置上)

1. 在实数 -5 , 0 , 3 , $\frac{1}{3}$ 中, 最大的实数是 ()

- A. 3 B. 0 C. -5 D. $\frac{1}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用实数大小比较的法则将各数按从小到大排列后即可得出结论.

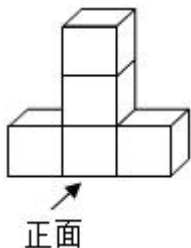
【详解】解: 将各数按从小到大排列为: -5 , 0 , $\frac{1}{3}$, 3 ,

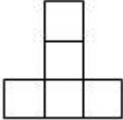
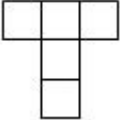
$\therefore$ 最大的实数是 3 ,

故选: A.

【点睛】本题主要考查了实数大小的比较, 利用实数大小比较的法则将各数按从小到大排列是解题的关键.

2. 如图是由 5 个大小相同的正方体搭成的几何体, 则这个几何体的主视图是 ()



- A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据主视图的意义, 从正面看该组合体所得到的图形即可.

【详解】解: 从正面看该组合体, 一共有三列, 从左到右小正方形的个数分别为 1、2、1.

故选: C.

【点睛】本题考查简单组合体的三视图, 理解视图的意义, 掌握主视图的画法是正确判断的关键.

3. 据统计, 2022 年湖南省湘西土家族苗族自治州学业水平考试九年级考生报名人数约为 35000 人, 其中数据 35000 用科学记数法表示为 ()

- A. 35×10^3 B. 0.35×10^5 C. 350×10^2 D. 3.5×10^4

【答案】D

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正整数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负整数．据此解答即可．

【详解】解： $35000 = 3.5 \times 10^4$

故选：D．

【点睛】此题考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要确定 a 的值以及 n 的值．

4. 下面 4 个汉字中，可以看作是轴对称图形的是（ ）

A. 爱 B. 我 C. 中 D. 华

【答案】C

【解析】

【分析】利用轴对称图形的定义进行解答即可．

【详解】解：A、不是轴对称图形，故此选项不合题意；

B、不是轴对称图形，故此选项不合题意；

C、是轴对称图形，故此选项符合题意；

D、不是轴对称图形，故此选项不合题意；

故选：C．

【点睛】此题主要考查了轴对称图形，关键是掌握如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴．

5. “青年大学习”是共青团中央为组织引导广大青少年，深入学习贯彻习近平新时代中国特色社会主义思想的青年学习行动．某校为了解同学们某季度学习“青年大学习”的情况，从中随机抽取 5 位同学，经统计他们的学习时间（单位：分钟）分别为：78，80，85，90，80．则这组数据的众数为（ ）

A. 78 B. 80 C. 85 D. 90

【答案】B

【解析】

【分析】一组数据中出现次数最多的数据叫做众数，根据概念解答即可．

【详解】这组数据中 80 出现 2 次，出现的次数最多，

所以这组数据的众数是 80，

故选：B．

【点睛】本题主要考查众数，求一组数据的众数的方法：找出频数最多的那个数据，若几个数据频数都是最多且相同，此时众数就是这多个数据.

6. 一个正六边形的内角和的度数为 ()

- A. 1080° B. 720° C. 540° D. 360°

【答案】 B

【解析】

【分析】利用多边形的内角和定理解答即可.

【详解】解：一个正六边形的内角和的度数为： $(6-2) \times 180^\circ = 720^\circ$ ，
故选： B.

【点睛】本题主要考查了多边形的内角和，利用多边形的内角和定理解答是解题的关键.

7. 下列运算正确的是 ()

- A. $3a - 2a = a$ B. $(a^3)^2 = a^5$
C. $2\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2$ D. $(a-1)^2 = a^2 - 1$

【答案】 A

【解析】

【分析】A、根据合并同类项的法则计算判断即可；B、根据幂的乘方运算法则计算判断即可；C、根据二次根式的加减运算法则计算判断即可；D、根据完全平方公式计算即可.

【详解】解：A、原式 $= a$ ，正确，符合题意；
B、原式 $= a^6$ ，错误，不合题意；
C、原式 $= \sqrt{5}$ ，错误，不合题意；
D、原式 $= a^2 - 2a + 1$ ，错误，不合题意；
故选： A.

【点睛】此题考查的是完全平方公式、合并同类项、幂的乘方与积的乘方、二次根式的加减法，掌握它们的运算法则是解决此题的关键.

8. 要使二次根式 $\sqrt{3x-6}$ 有意义，则 x 的取值范围是 ()

- A. $x > 2$ B. $x < 2$ C. $x \leq 2$ D. $x \geq 2$

【答案】 D

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件：被开方数是非负数即可得出答案.

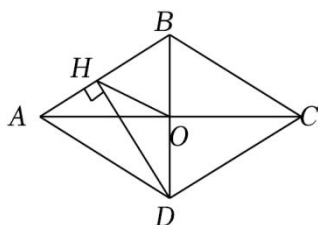
【详解】解： $\because 3x - 6 \geq 0$,

$\therefore x \geq 2$,

故选: D.

【点睛】 本题考查了二次根式有意义的条件, 掌握二次根式有意义的条件: 被开方数是非负数是解题的关键.

9. 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 过点 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H , 连接 OH , $OH = 4$, 若菱形 $ABCD$ 的面积为 $32\sqrt{3}$, 则 CD 的长为 ()



A. 4

B. $4\sqrt{3}$

C. 8

D. $8\sqrt{3}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 在 $Rt\triangle BDH$ 中先求得 BD 的长, 根据菱形面积公式求得 AC 长, 再根据勾股定理求得 CD 长.

【详解】 $\because DH \perp AB$,

$\therefore \angle BHD = 90^\circ$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore OB = OD, OC = OA = \frac{1}{2}AC, AC \perp BD$,

$\therefore OH = OB = OD = \frac{1}{2}BD$ (直角三角形斜边上中线等于斜边的一半),

$\therefore OD = 4, BD = 8$,

由 $\frac{1}{2}AC \cdot BD = 32\sqrt{3}$ 得,

$\frac{1}{2} \times 8 \cdot AC = 32\sqrt{3}$,

$\therefore AC = 8\sqrt{3}$,

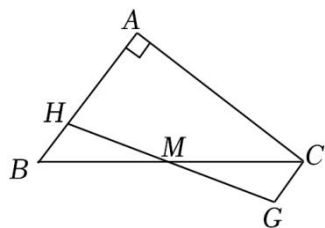
$\therefore OC = \frac{1}{2}AC = 4\sqrt{3}$,

$\therefore CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = 8$,

故答案为: C.

【点睛】 本题考查了菱形性质, 直角三角形性质, 勾股定理等知识, 解决问题的关键是先求得 BD 的长.

10. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, M 为 BC 的中点, H 为 AB 上一点, 过点 C 作 $CG \parallel AB$, 交 HM 的延长线于点 G , 若 $AC = 8$, $AB = 6$, 则四边形 $ACGH$ 周长的最小值是 ()



A. 24

B. 22

C. 20

D. 18

【答案】B

【解析】

【分析】通过证明 $\triangle BMH \cong \triangle CMG$ 可得 $BH = CG$, 可得四边形 $ACGH$ 的周长即为 $AB + AC + GH$, 进而可确定当 $MH \perp AB$ 时, 四边形 $ACGH$ 的周长有最小值, 通过证明四边形 $ACGH$ 为矩形可得 HG 的长, 进而可求解.

【详解】 $\because CG \parallel AB$,

$\therefore \angle B = \angle MCG$,

$\because M$ 是 BC 的中点,

$\therefore BM = CM$,

在 $\triangle BMH$ 和 $\triangle CMG$ 中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle MCG \\ BM = CM \\ \angle BMH = \angle CMG \end{cases},$$

$\therefore \triangle BMH \cong \triangle CMG$ (ASA),

$\therefore HM = GM, BH = CG$,

$\because AB = 6, AC = 8$,

$\therefore$ 四边形 $ACGH$ 的周长 $= AC + CG + AH + GH = AB + AC + GH = 14 + GH$,

$\therefore$ 当 GH 最小时, 即 $MH \perp AB$ 时四边形 $ACGH$ 的周长有最小值,

$\because \angle A = 90^\circ, MH \perp AB$,

$\therefore GH \parallel AC$,

$\therefore$ 四边形 $ACGH$ 为矩形,

$\therefore GH = 8$,

$\therefore$ 四边形 $ACGH$ 的周长最小值为 $14 + 8 = 22$,

故选: B.

【点睛】 本题主要考查全等三角形的判定与性质，确定 GH 的值是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分，请将正确答案填写在答题卡相应的横线上)

11. 2022 的相反数为_____.

【答案】 -2022

【解析】

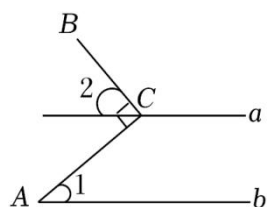
【分析】 直接利用相反数的概念：只有符号不同的两个数叫做互为相反数，进而得出答案.

【详解】 解： 2022 的相反数是： -2022.

故答案为： -2022.

【点睛】 此题主要考查了相反数，正确掌握相反数的定义是解题关键.

12. 1.如图，直线 $a \parallel b$ ，点 C 、 A 分别在直线 a 、 b 上， $AC \perp BC$ ，若 $\angle 1 = 50^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为 _____.

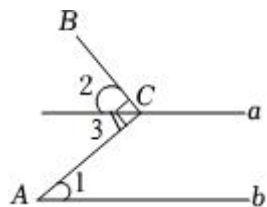


【答案】 40° ##40 度

【解析】

【分析】 利用平行线的性质定理和垂直的意义解答即可.

【详解】 如图,



$\because AC \perp BC$,

$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$,

$\because a \parallel b$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3 = 50^\circ$.

$\therefore \angle 2 = 90^\circ - \angle 3 = 40^\circ$.

故答案为： 40° .

【点睛】 本题主要考查了平行线的性质，垂直的意义，熟练掌握平行线的性质是解题的关键.

13. 计算: $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 由于两分式的分母相同，分子不同，故根据同分母的分式相加减的法则进行计算即可.

【详解】 原式 $= \frac{x-1}{x-1}$

$= 1.$

故答案为 1.

【点睛】 本题考查的是分式的加减法，即同分母的分式想加减，分母不变，把分子相加减.

14. 因式分解: $a^2+3a=$ _____.

【答案】 $a(a+3)$

【解析】

【分析】 直接提公因式法: 观察原式 a^2+3a , 找到公因式 a , 提出即可得出答案.

【详解】 解: $a^2+3a=a(a+3).$

故答案为: $a(a+3)$

15. 在一个袋中, 装有五个除数字外其它完全相同的小球, 球面上分别标有 1、2、3、4、5 这 5 个数字, 从中任摸一个球, 球面数字是奇数的概率是_____.

【答案】 $\frac{3}{5}$.

【解析】

【分析】 让袋中奇数的个数除以数的总个数即为所求的概率.

【详解】 详解: $\because$ 共有 5 个数字, 这 5 个数字中是奇数的有: 1、3、5 共 3 个,

$\therefore$ 从中任摸一个球, 球面数字是奇数的概率是 $\frac{3}{5}$.

【点睛】 此题考查概率的求法: 如果一个事件有 n 种可能, 而且这些事件的可能性相同, 其中事件 A 出现 m 种结果, 那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

16. 在平面直角坐标系中, 已知点 $P(-3, 5)$ 与点 $Q(3, m-2)$ 关于原点对称, 则 $m=$ _____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 平面直角坐标系中任意一点 $P(x, y)$, 关于原点的对称点是 $(-x, -y)$, 即求关于原点的对称点时, 横、纵坐标都变成原数的相反数.

【详解】 解: 根据 P 、 Q 两点关于原点对称, 则横、纵坐标均互为相反数,

$$\therefore m - 2 = -5,$$

$$\therefore m = -3,$$

故答案为: -3 .

【点睛】 本题主要考查了平面直角坐标系内两点关于原点对称时横、纵坐标均互为相反数这一特征, 熟练掌握该特征是解题的关键.

17. 阅读材料: 余弦定理是描述三角形中三边长度与一个角余弦值关系的数学定理, 运用它可以解决一类已知三角形两边及夹角求第三边或者已知三边求角的问题. 余弦定理是这样描述的: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 则三角形中任意一边的平方等于另外两边的平方和减去这两边及这两边的夹角的余弦值的乘积的 2 倍.

用公式可描述为: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$$

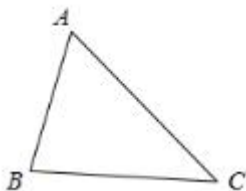
现已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3$, $AC = 4$, $\angle A = 60^\circ$, 则 $BC = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{13}$

【解析】

【分析】 从阅读可得: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$, 将数值代入求得结果.

【详解】 解: 由题意可得,



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$= 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \cdot \cos 60^\circ$$

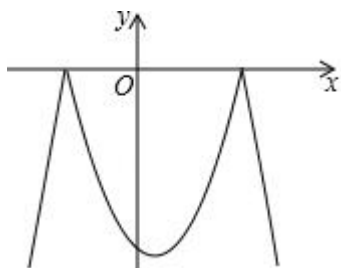
$$= 13,$$

$$\therefore BC = \sqrt{13},$$

故答案为: $\sqrt{13}$.

【点睛】 本题考查了阅读理解能力, 特殊角锐角三角函数值等知识, 解决问题的关键是公式的具体情景运用.

18. 已知二次函数 $y = -x^2 + 4x + 5$ 及一次函数 $y = -x + b$, 将该二次函数在 x 轴上方的图象沿 x 轴翻折到 x 轴下方, 图象的其余部分不变, 得到一个新图象 (如图所示), 当直线 $y = -x + b$ 与新图象有 4 个交点时, b 的取值范围是 _____.

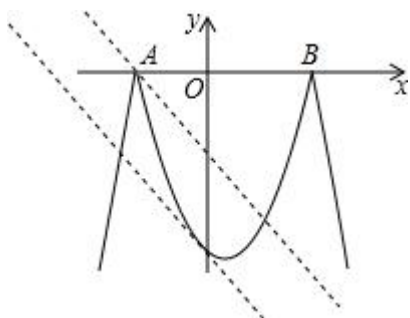


【答案】 $-\frac{29}{4} < b < -1$

【解析】

【分析】解方程 $-x^2 + 4x + 5 = 0$ 得 $A(-1, 0)$, $B(5, 0)$, 再利用折叠的性质求出折叠部分的解析式为 $y = (x+1)(x-5)$, 即 $y = x^2 - 4x - 5$ ($-1 \leq x \leq 5$), 然后求出直线 $y = -x + b$ 经过点 $A(-1, 0)$ 时 b 的值和当直线 $y = -x + b$ 与抛物线 $y = x^2 - 4x - 5$ ($-1 \leq x \leq 5$) 有唯一公共点时 b 的值, 从而得到当直线 $y = -x + b$ 与新图象有 4 个交点时, b 的取值范围.

【详解】解: 如图所示:



当 $y = 0$ 时, $-x^2 + 4x + 5 = 0$, 解得 $x_1 = -1$, $x_2 = 5$, 则 $A(-1, 0)$, $B(5, 0)$,

将该二次函数在 x 轴上方的图象沿 x 轴翻折到 x 轴下方的部分图象的解析式为 $y = (x+1)(x-5)$,

即 $y = x^2 - 4x - 5$ ($-1 \leq x \leq 5$),

当直线 $y = -x + b$ 经过点 $A(-1, 0)$ 时, $1 + b = 0$, 解得 $b = -1$;

当直线 $y = -x + b$ 与抛物线 $y = x^2 - 4x - 5$ ($-1 \leq x \leq 5$) 有唯一公共点时, 方程 $x^2 - 4x - 5 = -x + b$, 即

$x^2 - 3x - 5 - b = 0$ 有相等的实数解, 即 $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-5 - b) = 0$

解得 $b = -\frac{29}{4}$,

所以当直线 $y = -x + b$ 与新图象有 4 个交点时, b 的取值范围为 $-\frac{29}{4} < b < -1$,

故答案为: $-\frac{29}{4} < b < -1$.

【点睛】本题考查了抛物线与 x 轴的交点: 把求二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 与 x 轴的交点坐标问题转化为解关于 x 的一元二次方程. 也考查了二次函数图象与几何变换.

三、解答题 (本大题共 8 小题, 共 78 分, 每个题目都要求在答题卡的相应位置写出计算、解答或证明的主要步骤)

19. 计算: $\sqrt{16} - 2\tan 45^\circ + |-3| + (\pi - 2022)^0$.

【答案】6

【解析】

【分析】先计算算术平方根、绝对值、零指数幂、特殊角三角函数值, 再合并即可.

【详解】解: 原式 $= 4 - 2 \times 1 + 3 + 1$

$$= 4 - 2 + 3 + 1$$

$$= 6$$

【点睛】此题考查的是算术平方根、绝对值、零指数幂、特殊角三角函数值, 掌握其运算法则是解决此题的关键.

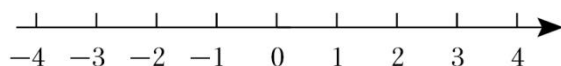
$$20. \text{解不等式组: } \begin{cases} 3x \leq 6 + x & \text{①} \\ x - 1 \leq 3(x + 1) & \text{②} \end{cases}$$

请结合题意填空, 完成本题的解答.

(1) 解不等式①, 得_____.

(2) 解不等式②, 得_____.

(3) 把不等式①和②的解集在数轴上表示出来;



(4) 所以原不等式组的解集为_____.

【答案】(1) $x \leq 3$ (2) $x \geq -2$

(3) 见解析 (4) $-2 \leq x \leq 3$

【解析】

【分析】(1) 按照移项、合并同类项, 再化系数为 1 的步骤计算即可.

(2) 按照去括号、移项、合并同类项, 再化系数为 1 的步骤计算即可.

(3) 把不等式①和②的解集在数轴上分别表示出来即可.

(4) 观察数轴, 找出不等式①和②的解集的公共部分, 即为不等式组的解集.

【小问 1 详解】

解不等式①, 得 $2x \leq 6$

$$x \leq 3,$$

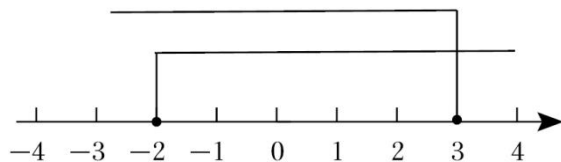
【小问 2 详解】

解不等式②, 得 $x - 1 \leq 3x + 3$

移项得 $2x \geq -4$

$$x \geq -2,$$

【小问 3 详解】

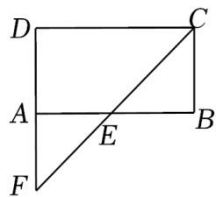


【小问 4 详解】

所以原不等式组的解集为 $-2 \leq x \leq 3$

【点睛】本题考查了解一元一次不等式组, 在数轴上表示不等式的解集, 熟练掌握解一元一次不等式组的解法是解题的关键.

21. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, E 为 AB 的中点, 连接 CE 并延长, 交 DA 的延长线于点 F .



(1) 求证: $\triangle AEF \cong \triangle BEC$.

(2) 若 $CD = 4$, $\angle F = 30^\circ$, 求 CF 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) 8

【解析】

【分析】(1) 先根据矩形性质得出 $AD \parallel BC$, 然后证得 $\angle F = \angle BCE$, 再根据 AAS 即可证明: $\triangle AEF \cong \triangle BEC$.

(2) 根据矩形的性质得出 $\angle D = 90^\circ$, 然后根据 $\angle F = 30^\circ$ 得出 $CF = 2CD$ 即可解答.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle F = \angle BCE,$$

$\because E$ 是 AB 中点,

$$\therefore AE = EB,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle BEC,$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle BEC \text{ (AAS)}.$$

【小问 2 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle D = 90^\circ,$$

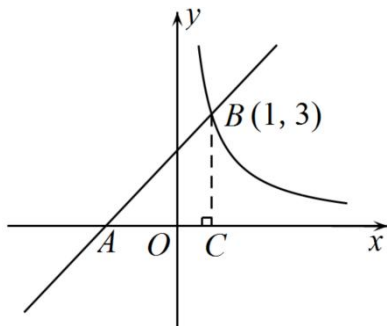
$$\because CD = 4, \angle F = 30^\circ,$$

$$\therefore CF = 2CD = 2 \times 4 = 8,$$

即 CF 的长为 8.

【点睛】 本题考查矩形的性质、全等三角形的判定和性质、含 30° 角的直角三角形, 解题的关键是准确寻找全等三角形解决问题, 属于中考常考题型.

22. 如图, 一次函数 $y = ax + 1$ ($a \neq 0$) 的图象与 x 轴交于点 A , 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象在第一象限交于点 $B(1, 3)$, 过点 B 作 $BC \perp x$ 轴于点 C .



(1) 求一次函数和反比例函数的解析式.

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】 (1) $y = 2x + 1$, $y = \frac{3}{x}$

(2) $\frac{9}{4}$

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法解答即可;

(2) 利用直线的解析式求得点 A 坐标, 利用坐标表示出线段 CA , BC 的长度, 利用三角形的面积公式解答即可.

【小问 1 详解】

$\because$ 一次函数 $y = ax + 1$ ($a \neq 0$) 的图象经过点 $B(1, 3)$,

$$\therefore a + 1 = 3,$$

$$\therefore a = 2.$$

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y = 2x + 1$,

$\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $B(1, 3)$,

$\therefore k = 1 \times 3 = 3,$

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y = \frac{3}{x}.$

【小问 2 详解】

令 $y = 0$, 则 $2x+1 = 0,$

$\therefore x = -\frac{1}{2}.$

$\therefore A \left(-\frac{1}{2}, 0\right).$

$\therefore OA = \frac{1}{2}.$

$\therefore BC \perp x$ 轴于点 $C, B(1, 3),$

$\therefore OC = 1, BC = 3.$

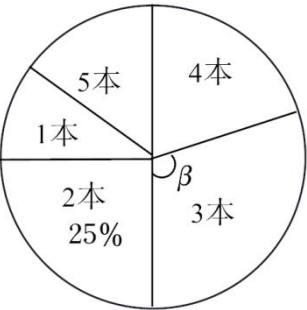
$\therefore AC = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $= \frac{1}{2} \times AC \cdot BC = \frac{9}{4}.$

【点睛】 本题主要考查了待定系数法确定函数的解析式，一次函数图象的性质，一次函数图象上点的坐标的特征，反比例函数的性质，反比例函数图象上点的坐标的特征，利用点的坐标表示出相应线段的长度是解题的关键.

23. 4 月 23 日是世界读书日，习近平总书记说：“读书可以让人保持思想活力，让人得到智慧启发，让人滋养浩然正气”. 某校响应号召，开展了“读红色经典，传革命精神”为主题的读书活动，学校对本校学生五月份阅读该主题相关书籍的读书量进行了随机抽样调查，并对所有随机抽取的学生的读书量（单位：本）进行了统计. 根据调查结果，绘制了不完整的统计表和扇形统计图.

读书量	1 本	2 本	3 本	4 本	5 本
人数	10 人	25 人	30 人	a	15 人



- (1) 本次调查共抽取学生多少人?
- (2) 表中 a 的值为 _____, 扇形统计图中“3 本”部分所对应的圆心角 β 的度数为 _____.
- (3) 已知该校有 3000 名学生, 请估计该校学生中, 五月份读书量不少于“3 本”的学生人数.

【答案】(1) 100 (2) 20; 108°

(3) 1950 人

【解析】

【分析】(1) 由 2 本人数及其所占百分比可得总人数;

(2) 用总人数分别减去其它读书量人数即可得出 a 的值; 用 360° 乘 “3 本” 所占百分比即可得出扇形统计图中 “3 本” 部分所对应的圆心角 β 的度数;

(3) 总人数乘以样本中 “读书量” 不少于 3 本的学生人数所占百分比即可.

【小问 1 详解】

解: 抽样调查的学生总数为: $25 \div 25\% = 100$ (人),

答: 本次调查共抽取学生 100 人;

【小问 2 详解】

$$a = 100 - 10 - 25 - 30 - 15 = 20;$$

$$\text{扇形统计图中 “3 本” 部分所对应的圆心角 } \beta \text{ 的度数为: } 360^{\circ} \times \frac{30}{100} = 108^{\circ},$$

故答案为: 20; 108° ;

【小问 3 详解】

$$3000 \times \frac{30 + 20 + 15}{100} = 1950 \text{ (人)},$$

答: 估计该校学生中, 五月份读书量不少于 “3 本” 的学生人数为 1950 人.

【点睛】本题考查了扇形统计图的综合运用以及用样本估计总体, 从统计图中得到必要的信息是解决问题的关键, 扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

24. 为了传承雷锋精神, 某中学向全校师生发起 “献爱心” 募捐活动, 准备向西部山区学校捐赠篮球、足球两种体育用品. 已知篮球的单价为每个 100 元, 足球的单价为每个 80 元.

(1) 原计划募捐 5600 元, 全部用于购买篮球和足球, 如果恰好能够购买篮球和足球共 60 个, 那么篮球和足球各买多少个?

(2) 在捐款活动中, 由于师生的捐款积极性高涨, 实际收到捐款共 6890 元, 若购买篮球和足球共 80 个, 且支出不超过 6890 元, 那么篮球最多能买多少个?

【答案】(1) 原计划篮球买 40 个, 则足球买 20 个

(2) 篮球最多能买 24 个

【解析】

【分析】(1) 设原计划篮球买 x 个, 则足球买 y 个, 根据: “恰好能够购买篮球和足球共 60 个、原计划募捐 5600 元” 列方程组即可解答;

(2) 设篮球能买 a 个, 则足球 $(80 - a)$ 个, 根据“实际收到捐款共 6890 元”列不等式求解即可解答.

【小问 1 详解】

解: 设原计划篮球买 x 个, 则足球买 y 个, 根据题意得:

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 100x + 80y = 5600 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = 40 \\ y = 20 \end{cases}.$$

答: 原计划篮球买 40 个, 则足球买 20 个.

【小问 2 详解】

解: 设篮球能买 a 个, 则足球 $(80 - a)$ 个,

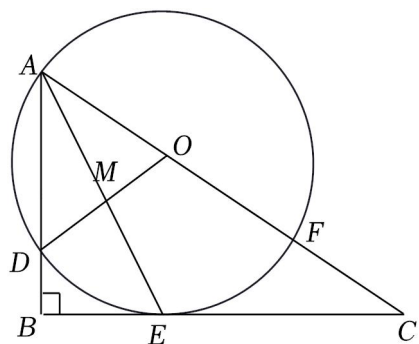
根据题意得: $100a + 80(80 - a) \leq 6890$,

解得: $a \leq 24.5$,

答: 篮球最多能买 24 个.

【点睛】本题考查了二元一次方程组、一元一次不等式的应用, 解决本题的关键是根据题意列出方程组和不等式.

25. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, AE 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 E , O 为 AC 上一点, 经过点 A 、 E 的 $\odot O$ 分别交 AB 、 AC 于点 D 、 F , 连接 OD 交 AE 于点 M .



(1) 求证: BC 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 若 $CF = 2$, $\sin C = \frac{3}{5}$, 求 AE 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

【解析】

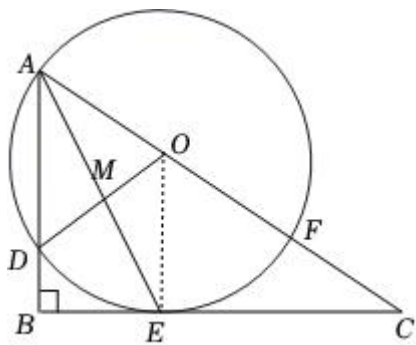
【分析】(1) 连接 OE , 方法一: 根据角平分线的性质及同弧所对的圆周角是圆心角的一半得出 $\angle OEC = 90^\circ$ 即可;

方法二: 根据角平分线的性质和等腰三角形的性质得出 $\angle OEC = 90^\circ$ 即可;

(2) 连接 EF , 根据三角函数求出 AB 和半径的长度, 再利用三角函数求出 AE 的长即可.

【小问 1 详解】

连接 OE ,



方法一: $\because AE$ 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 E ,

$$\therefore \angle BAC = 2\angle OAE,$$

$$\because \angle FOE = 2\angle OAE,$$

$$\therefore \angle FOE = \angle BAC,$$

$$\therefore OE \parallel AB,$$

$$\because \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore OE \perp BC,$$

又 $\because OE$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore BC$ 是 $\odot O$ 的切线;

方法二: $\because AE$ 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 E ,

$$\therefore \angle OAE = \angle BAE,$$

$$\because OA = OE,$$

$$\therefore \angle OAE = \angle OEA,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle OEA,$$

$$\therefore OE \parallel AB,$$

$$\because \angle B = 90^\circ,$$

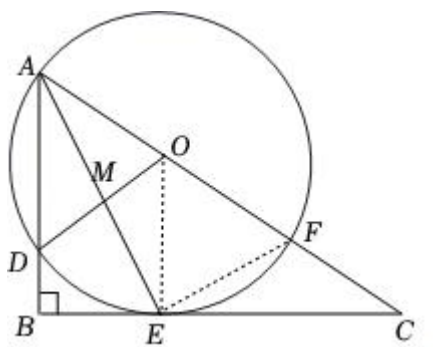
$$\therefore OE \perp BC,$$

又 $\because OE$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore BC$ 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

连接 EF ,



$$\because CF = 2, \sin C = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{OE}{OF + CF} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore OE = OF,$$

$$\therefore OE = OF = 3,$$

$$\therefore OA = OF = 3,$$

$$\therefore AC = OA + OF + CF = 8,$$

$$\therefore AB = AC \cdot \sin C = 8 \times \frac{3}{5} = \frac{24}{5},$$

$$\therefore \angle OAE = \angle BAE,$$

$$\therefore \cos \angle OAE = \cos \angle BAE,$$

$$\text{即 } \frac{AB}{AE} = \frac{AE}{AF},$$

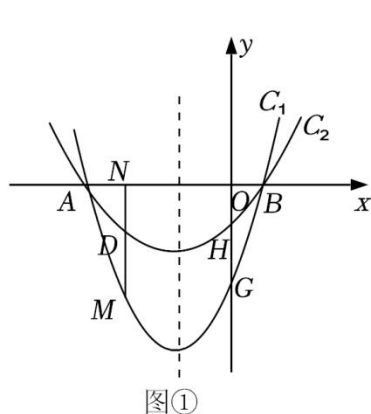
$$\therefore \frac{\frac{24}{5}}{AE} = \frac{AE}{3+3},$$

$$\text{解得 } AE = \frac{12\sqrt{5}}{5} \text{ (舍去负数),}$$

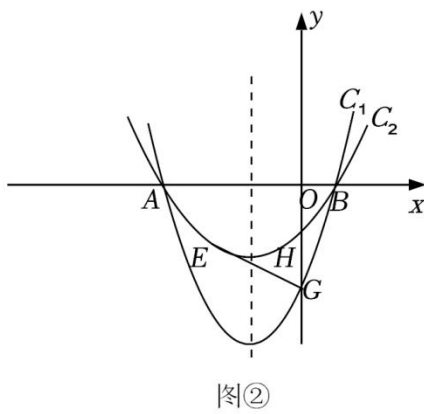
$$\therefore AE \text{ 的长为 } \frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

【点睛】 本题主要考查切线的判定和三角函数的应用，熟练掌握切线的判定定理和三角函数是解题的关键.

26. 定义：由两条与 x 轴有着相同的交点，并且开口方向相同的抛物线所围成的封闭曲线称为“月牙线”，如图①，抛物线 $C_1: y = x^2 + 2x - 3$ 与抛物线 $C_2: y = ax^2 + 2ax + c$ 组成一个开口向上的“月牙线”，抛物线 C_1 和抛物线 C_2 与 x 轴有着相同的交点 $A(-3, 0)$ 、 B (点 B 在点 A 右侧)，与 y 轴的交点分别为 G 、 $H(0, -1)$.



图①



图②

- (1) 求抛物线 C_2 的解析式和点 G 的坐标.
- (2) 点 M 是 x 轴下方抛物线 C_1 上的点, 过点 M 作 $MN \perp x$ 轴于点 N , 交抛物线 C_2 于点 D , 求线段 MN 与线段 DM 的长度的比值.
- (3) 如图②, 点 E 是点 H 关于抛物线对称轴的对称点, 连接 EG , 在 x 轴上是否存在点 F , 使得 $\triangle EFG$ 是以 EG 为腰的等腰三角形? 若存在, 请求出点 F 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 1$, $G(0, -3)$

(2) $\frac{3}{2}$

(3) 存在, $(\sqrt{7} - 2, 0)$ 或 $(-\sqrt{7} - 2, 0)$

【解析】

【分析】 (1) 将 $A(-3, 0)$ 、 $H(0, -1)$ 代入 $y = ax^2 + 2ax + c$ 中, 即可求函数的解析式.

(2) 设 $M(t, t^2 + 2t - 3)$, 则 $D(t, \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3}t - 1)$, $N(t, 0)$, 分别求出 MN , DM , 再求比值即可.

(3) 先求出 $E(-2, -1)$, 设 $F(x, 0)$, 分来两种情况讨论: ①当 $EG = EF$ 时, $2\sqrt{2} = \sqrt{(x+2)^2 + 1}$, 可得 $F(\sqrt{7} - 2, 0)$ 或 $(-\sqrt{7} - 2, 0)$; ②当 $EG = FG$ 时, $2\sqrt{2} = \sqrt{9 + x^2}$, F 点不存在.

【小问 1 详解】

解: 将 $A(-3, 0)$ 、 $H(0, -1)$ 代入 $y = ax^2 + 2ax + c$ 中,

$$\therefore \begin{cases} 9a - 6a + c = 0 \\ c = -1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ c = -1 \end{cases},$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 1,$$

在 $y = x^2 + 2x - 3$ 中, 令 $x = 0$, 则 $y = -3$,

$\therefore G(0, -3)$.

【小问 2 详解】

设 $M(t, t^2 + 2t - 3)$, 则 $D(t, \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3}t - 1)$, $N(t, 0)$,

$$\therefore NM = -t^2 - 2t + 3, \quad DM = \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3}t - 1 - (t^2 + 2t - 3) = -\frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{3}t + 2,$$

$$\therefore \frac{MN}{DM} = \frac{-(t^2 + 2t - 3)}{\frac{2}{3}(t^2 + 2t - 3)} = \frac{3}{2}.$$

【小问 3 详解】

存在点 F , 使得 $\triangle EFG$ 是以 EG 为腰的等腰三角形, 理由如下:

由 (1) 可得 $y = x^2 + 2x - 3$ 的对称轴为直线 $x = -1$,

$\therefore E$ 点与 H 点关于对称轴 $x = -1$ 对称,

$\therefore E(-2, -1)$,

设 $F(x, 0)$,

①当 $EG = EF$ 时,

$\therefore G(0, -3)$,

$$\therefore EG = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore 2\sqrt{2} = \sqrt{(x+2)^2 + 1},$$

解得 $x = \sqrt{7} - 2$ 或 $x = -\sqrt{7} - 2$,

$\therefore F(\sqrt{7} - 2, 0)$ 或 $(-\sqrt{7} - 2, 0)$;

②当 $EG = FG$ 时, $2\sqrt{2} = \sqrt{9 + x^2}$,

此时 x 无解;

综上所述: F 点坐标为 $(\sqrt{7} - 2, 0)$ 或 $(-\sqrt{7} - 2, 0)$.

【点睛】 本题考查二次函数的图象及性质, 熟练掌握二次函数的图象及性质, 等腰三角形的性质, 分类讨论是解题的关键.

