

永州市 2022 年初中学业水平考试数学试卷

温馨提示：1、本试卷包括试题卷和答题卡。考生作答时，选择题和非选择题均须作答在答题卡上，在本试卷上作答无效。考生在答题卡上按答题卡中注意事项的要求答题。

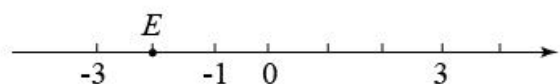
2、考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

3、本试题卷共 6 页，如有缺页，请申明。

4、本试题卷共三道大题，26 个小题。满分 150 分，考试时量 120 分钟。

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。每个小题只有一个正确选项，请将正确的选项填涂到答题卡上）

1. 如图，数轴上点 E 对应的实数是（ ）



A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

【答案】A

【解析】

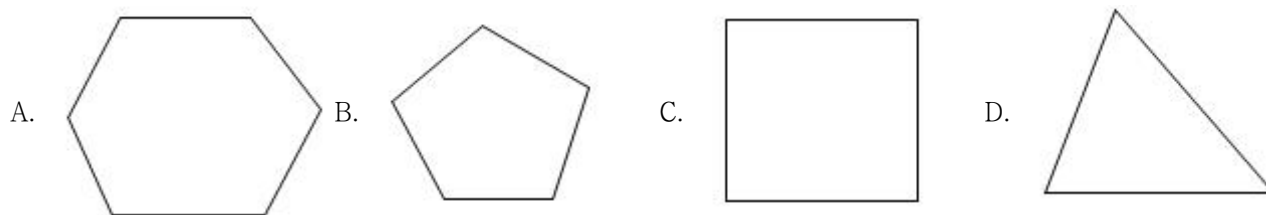
【分析】根据数轴上点 E 所在位置，判断出点 E 所对应的值即可；

【详解】解：根据数轴上点 E 所在位置可知，点 E 在 -1 到 -3 之间，符合题意的只有 -2；

故选：A.

【点睛】本题主要考查数轴上的点的位置问题，根据数轴上点所在位置对点的数值进行判断是解题的关键。

2. 下列多边形具有稳定性的是（ ）



【答案】D

【解析】

【分析】利用三角形具有稳定性直接得出答案。

【详解】解：三角形具有稳定性，四边形、五边形、六边形都具有不稳定性，

故选 D.

【点睛】本题考查三角形的特性，牢记三角形具有稳定性是解题的关键。

3. 剪纸是我国具有独特艺术风格的民间艺术，反映了劳动人民对现实生活的深刻感悟。下列剪纸图形中，是

中心对称图形的有 ()



①



②



③



④

A. ①②③

B. ①②④

C. ①③④

D. ②③④

【答案】A

【解析】

【分析】根据中心对称图形的定义判断即可；

【详解】解：在平面内，把一个图形绕着某个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形；

$\therefore$ 是中心对称图形的是：①②③；

故选：A.

【点睛】本题主要考查中心对称图形的定义，掌握中心对称图形的定义是解题的关键.

4. 水州市大力发展“绿色养殖”，单生猪养殖 2021 年共出栏 7791000 头，同比增长 29.33%，成为湖南省生猪产业发展高地和标杆、将数 7791000 用科学记数法表示为 ()

A. 7791×10^3

B. 77.91×10^5

C. 7.791×10^6

D. 0.7791×10^7

【答案】C

【解析】

【分析】根据科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，确定 a 、 n 的值即可.

【详解】解：由题意知：7791000 = 7.791×10^6 ，

故选：C.

【点睛】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，正确确定 a 的值以及 n 的值是解题的关键.

5. 下列各式正确的是 ()

A. $\sqrt{4} = 2\sqrt{2}$

B. $2^0 = 0$

C. $3a - 2a = 1$

D. $2 - (-2) = 4$

【答案】D

【解析】

【分析】利用二次根式性质化简、零指数幂、合并同类项、有理数减法运算即可判断。

【详解】解：A. $\sqrt{4} = 2$ ，选项错误，不符合题意；

B. $2^0 = 1$ ，选项错误，不符合题意；

C. $3a - 2a = a$ ，选项错误，不符合题意；

D. $2 - (-2) = 4$ ，选项正确，符合题意。

故选：D.

【点睛】本题主要考查二次根式的化简、零指数幂、合并同类项，有理数的减法，掌握运算性质是解题的关键。

6. 下列因式分解正确的是 ()

A. $ax + ay = a(x + y) + 1$

B. $3a + 3b = 3(a + b)$

C. $a^2 + 4a + 4 = (a + 4)^2$

D. $a^2 + b = a(a + b)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据因式分解的方法，提公因式法及公式法依次进行计算判断即可。

【详解】解：A、 $ax + ay = a(x + y)$ ，故选项计算错误；

B、 $3a + 3b = 3(a + b)$ ，选项计算正确；

C、 $a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$ ，选项计算错误；

D、 $a^2 + b$ 不能进行因式分解，选项计算错误；

故选：B.

【点睛】题目主要考查因式分解的判断及应用提公因式法与公式法进行因式分解，熟练掌握因式分解的方法是解题关键。

7. 我市江华县有“神州摇都”的美称，每逢“盘王节”会表演长鼓舞，长鼓舞中使用的“长鼓”内腔挖空，两端相通，两端鼓口为圆形，中间鼓腰较为细小. 如图为类似“长鼓”的几何体，其俯视图的大致形状是 ()



- A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据题目描述，判断几何体的俯视图即可；

【详解】解：根据长鼓舞中使用的“长鼓”内腔挖空，两端相通，可知俯视图中空，两端鼓口为圆形可知俯视图是圆形，鼓腰也是圆形，且是不能直接看见，所以中间是虚圆；

故选：B.

【点睛】本题主要考查几何体的三视图中的俯视图，解本题的关键在于需学生具备一定的空间想象能力.

8. 李老师准备在班内开展“道德”“心理”“安全”三场专题教育讲座，若三场讲座随机安排，则“心理”专题讲座被安排在第一场的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用概率公式求解即可求得答案.

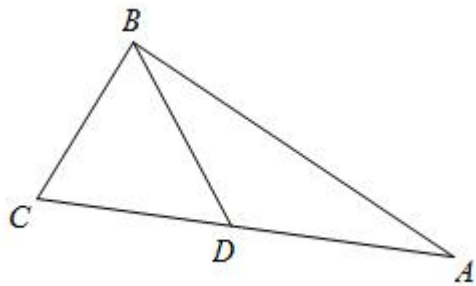
【详解】解：∵ 班内开展“道德”“心理”“安全”三场专题教育讲座，

“心理”专题讲座被安排在第一场的概率 = $\frac{1}{3}$.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了概率公式的应用，用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比，掌握概率公式是解题的关键.

9. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle C = 60^\circ$ ，点 D 为边 AC 的中点， $BD = 2$ ，则 BC 的长为（ ）



- A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 2 D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】根据三角形内角和定理可得 $\angle A=30^\circ$ ，由直角三角形斜边上的中线的性质得出 $AC=2BD=4$ ，再利用含 30° 度角的直角三角形的性质求解即可.

【详解】解： $\because \angle ABC=90^\circ$ ， $\angle C=60^\circ$ ，

$\therefore \angle A=30^\circ$ ，

$\because$ 点 D 为边 AC 的中点， $BD=2$

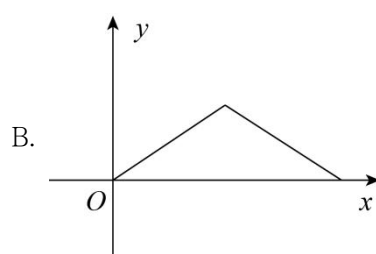
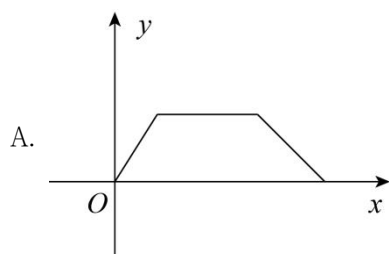
$\therefore AC=2BD=4$ ，

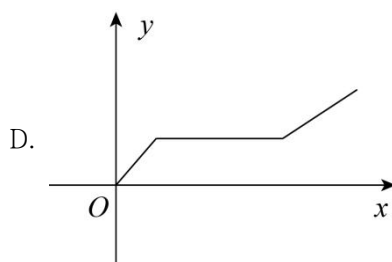
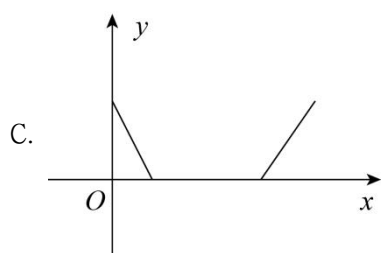
$\therefore BC=\frac{1}{2}AC=2$ ，

故选：C.

【点睛】题目主要考查三角形内角和定理及直角三角形斜边上中线的性质，含 30° 度角的直角三角形的性质等，理解题意，综合运用这些知识点是解题关键.

10. 学校组织部分师生去烈士陵园参加“不忘初心，牢记使命”主题教育活动、师生队伍从学校出发，匀速行走 30 分钟到达烈士陵园，用 1 小时在烈士陵园进行了祭扫和参观学习等活动，之后队伍按原路匀速步行 45 分钟返校、设师生队伍离学校的距离为 y 米，离校的时间为 x 分钟，则下列图象能大致反映 y 与 x 关系的是（ ）





【答案】A

【解析】

【分析】利用排除法，根据开始、结束时 y 均为 0 排除 AC，根据队伍在陵园停留了 1 个小时，排除 B.

【详解】解：队伍从学校出发，最后又返回了学校，因此图象开始、结束时 y 均为 0，由此排除 C，D，因为队伍在陵园停留了 1 个小时，期间， y 值不变，因此排除 B，
故选 A.

【点睛】本题考查函数图象的识别，读懂题意，找准关键点位置是解题的关键.

二、填空题（本大题共 8 个小题，每小题 4 分，共 32 分. 请将答案填在答题卡的答案栏内）

11. 若单项式 $3x^m y$ 的与 $-2x^6 y$ 是同类项，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】6

【解析】

【分析】由题意直接根据同类项的概念，进行分析求解即可.

【详解】解：∵ 单项式 $3x^m y$ 与 $-2x^6 y$ 是同类项，

∴ $m = 6$.

故答案为：6.

【点睛】本题主要考查同类项的定义，解答本题的关键是掌握同类项定义中的两个“相同”即相同字母的指数相同.

12. 请写出一个比 $\sqrt{5}$ 大且比 10 小的无理数：_____.

【答案】 $\sqrt{7}$ （答案不唯一）

【解析】

【分析】根据实数的大小比较即可求出答案.

【详解】解：∵ $5 < 7 < 100$,

∴ $\sqrt{5} < \sqrt{7} < 10$

∴ 比 $\sqrt{5}$ 大且比 10 小的无理数为 $\sqrt{7}$,

故答案为： $\sqrt{7}$ （答案不唯一）.

【点睛】 本题考查实数比较大小，解题的关键是熟练运用实数比较大小的法则，本题属于基础题型.

13. “闪电足球队”参加市中小学生足球比赛，在五场小组赛中，该足球队的进球数分别为：2，0，1，2，3，则此组数据的众数是_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 根据众数的定义（数据中出现的次数最多的数据）求解即可.

【详解】 解：2，0，1，2，3 这组数据中 2 出现的次数最多为 2 次，
∴众数为 2，

故答案为：2.

【点睛】 题目主要考查众数的求法，掌握众数的定义及计算方法是解题关键.

14. 解分式方程 $\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} = 0$ 去分母时，方程两边同乘的最简公分母是_____.

【答案】 $x(x+1)$

【解析】

【分析】 根据解分式方程的方法中确定公分母的方法求解即可.

【详解】 解：分式方程 $\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} = 0$ 的两个分母分别为 x ， $(x+1)$ ，
∴最简公分母为： $x(x+1)$ ，

故答案为： $x(x+1)$ 。

【点睛】 题目主要考查解分式方程中确定公分母的方法，熟练掌握解分式方程的步骤是解题关键.

15. 已知一次函数 $y = x + 1$ 的图象经过点 $(m, 2)$ ，则 $m =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 把点 $(m, 2)$ 代入一次函数 $y = x + 1$ ，列出关于 m 的一元一次方程，解之即可得 m 的值.

【详解】 解：∵一次函数 $y = x + 1$ 的图象经过点 $(m, 2)$

∴把点 $(m, 2)$ 代入一次函数，得

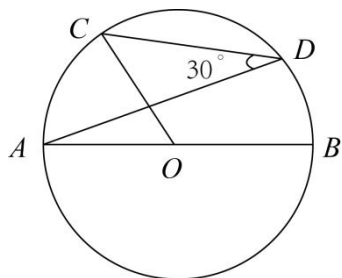
$$m + 1 = 2$$

解得： $m = 1$

故答案为：1.

【点睛】本题考查一次函数图象上点的坐标特征，直线上任意一点的坐标都满足函数关系式．根据一次函数图象上点的特征得出关于 m 的一元一次方程是解题的关键．

16. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 、 D 在 $\odot O$ 上， $\angle ADC = 30^\circ$ ，则 $\angle BOC =$ _____度.



【答案】120

【解析】

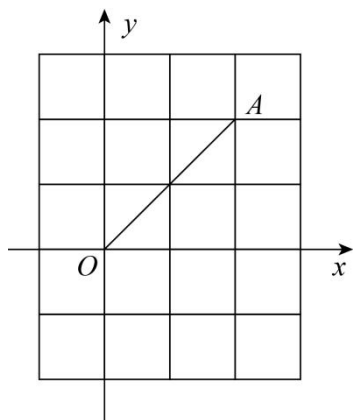
【分析】利用同弧所对的圆周角等于圆心角的一半得出 $\angle AOC = 2\angle ADC = 60^\circ$ ，则 $\angle BOC = 180^\circ - \angle AOC = 120^\circ$ ．

【详解】解： $\because \angle ADC = 30^\circ$ ， $\angle ADC$ 是弧 AC 所对的圆周角， $\angle AOC$ 是弧 AC 所对的圆心角，
 $\therefore \angle AOC = 2\angle ADC = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle BOC = 180^\circ - \angle AOC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ，

故答案为：120.

【点睛】本题考查圆周角定理，熟练掌握“同弧所对的圆周角等于圆心角的一半”是解题的关键．

17. 如图，图中网格由边长为 1 的小正方形组成，点 A 为网格线的交点.若线段 OA 绕原点 O 顺时针旋转 90° 后，端点 A 的坐标变为_____.

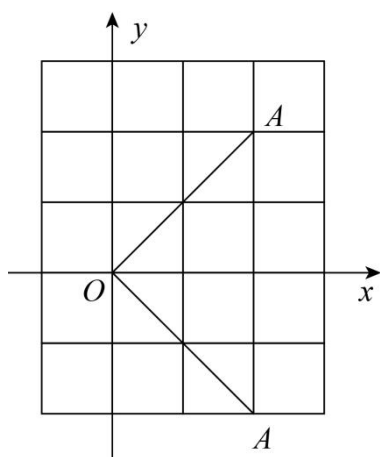


【答案】(2,-2)

【解析】

【分析】根据题意作出旋转后的图形，然后读出坐标系中点的坐标即可.

【详解】解：线段 OA 绕原点 O 顺时针旋转 90° 后的位置如图所示，

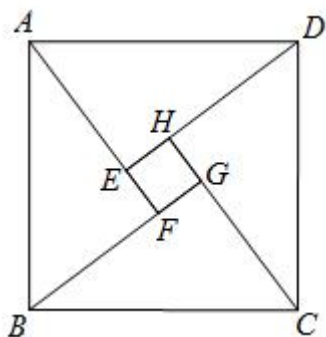


$\therefore$ 旋转后的点 A 的坐标为 $(2, -2)$,

故答案为: $(2, -2)$.

【点睛】题目主要考查图形的旋转，点的坐标，理解题意，作出旋转后的图形读出点的坐标是解题关键.

18. 我国古代数学家赵爽创制了一幅“赵爽弦图”，极富创新意识地给出了勾股定理的证明.如图所示，“赵爽弦图”是由四个全等的直角三角形与中间的小正方形拼成的一个大正方形，若大正方形的面积是 25，小正方形的面积是 1，则 $AE =$ _____.



【答案】3

【解析】

【分析】根据题意得出 $AB=BC=CD=DA=5$, $EF=FG=GH=HE=1$, 设 $AF=DE=CH=BG=x$, 结合图形得出 $AE=x-1$, 利用勾股定理求解即可得出结果.

【详解】解: $\because$ 大正方形的面积是 25, 小正方形的面积是 1,

$\therefore AB=BC=CD=DA=5$, $EF=FG=GH=HE=1$,

根据题意, 设 $AF=DE=CH=BG=x$,

则 $AE=x-1$,

在 $Rt\triangle AED$ 中,

$$AE^2 + ED^2 = AD^2,$$

$$\text{即 } (x-1)^2 + x^2 = 5^2,$$

解得: $x=4$ (负值已经舍去),

$$\therefore x-1=3,$$

故答案为: 3.

【点睛】题目主要考查正方形的性质, 勾股定理解三角形, 一元二次方程的应用等, 理解题意, 综合运用这些知识点是解题关键.

三、解答题 (本大题共 8 个小题, 共 78 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

19. 解关于 x 的不等式组:
$$\begin{cases} x+1 > 4 \\ 2(x-1)-5 > 1 \end{cases}$$

【答案】 $x > 4$

【解析】

【分析】分别解不等式, 取不等式组的解集即可;

【详解】解: 解不等式 $x+1 > 4$ 得, $x > 3$;

解不等式 $2(x-1)-5 > 1$ 得, $x > 4$;

所以, 原不等式组的解集是 $x > 4$.

【点睛】本题主要考查求一元一次不等式组的解集, 掌握不等式的求解步骤是解题的关键.

20. 先化简, 再求值: $\frac{x^2-1}{x} \div \left(\frac{x+2}{x} - \frac{1}{x} \right)$, 其中 $x = \sqrt{2} + 1$.

【答案】 $x-1$; $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】先将括号内的分式进行合并, 将分式的分子分母进行因式分解, 并约分即可, 再代入求值即可.

【详解】解: 原式 $= \frac{x^2-1}{x} \div \frac{x+2-1}{x}$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{x} \cdot \frac{x}{x+1}$$

$$= x-1$$

当 $x = \sqrt{2} + 1$ 时，

$$\text{原式} = \sqrt{2} + 1 - 1 = \sqrt{2}$$

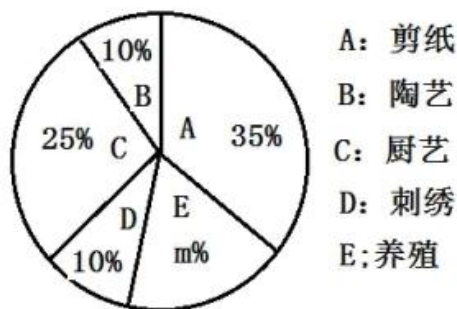
【点睛】 本题考查分式的混合运算，因式分解，能够熟练掌握运算顺序是解决本题的关键.

21. “风华中学”计划在劳动技术课中增设剪纸、陶艺、厨艺、刺绣、养殖等五类选择性“技能课程”，加大培养学生的劳动习惯和实践操作能力，为了解学生选择各“技能课程”的意向，从全校随机抽取了部分学生进行问卷调查，将调查结果整理并绘制如下不完整统计图表：

样本中选择各技能课程的人数统计表

技能课程	人数
A：剪纸	
B：陶艺	20
C：厨艺	a
D：刺绣	20
E：养殖	

样本中选择各技能课程的人数分布扇形统计图



请根据上述统计数据解决下列问题：

- (1) 扇形统计图中 $m =$ _____.
- (2) 抽取样本的样本容量是 _____, 频数统计表中 $a =$ _____.
- (3) 若该校有 2000 名学生，请你估计全校有意向选择“养殖”技能课程的人数.

【答案】 (1) 20 (2) 200 50

(3) 400

【解析】

【分析】 (1) 根据扇形统计图的数据求解即可；

(2) 先求出样本总量，再计算 a 的值；

(3) 用 2000 乘以选择“养殖”学生人数所占比即可；

【小问 1 详解】

解： $m\% = 1 - (10\% + 25\% + 10\% + 35\%) = 20\%$ ，

$$\therefore m = 20$$

故答案案为：20

【小问 2 详解】

抽取样本的样本容量是： $20 \div 10\% = 200$ （人）；

$$a = 200 \times 25\% = 50；$$

故答案为：200，50

【小问 3 详解】

$$2000 \times 20\% = 400 \text{（人）}$$

答：若该校有 2000 名学生，则全校有意向选择“养殖”技能课程的人数为 400 人.

【点睛】 本题主要考查扇形统计图、由样本所占比估计总体，掌握相关知识并正确计算是解题的关键.

22. 受第 24 届北京冬季奥林匹克运动会的形响，小勇爱上了雪上运动.一天，小勇在滑雪场训练滑雪，第一次他从滑雪道 A 端以平均 $(x+2)$ 米/秒的速度滑到 B 端，用了 24 秒；第二次从滑雪道 A 端以平均 $(x+3)$ 米/秒的速度滑到 B 端，用了 20 秒.

(1) 求 x 的值；

(2) 设小勇从滑雪道 A 端滑到 B 端的平均速度为 v 米/秒，所用时间为 t 秒，请用含 t 的代数式表示 v （不要求写出 t 的取值范围）.

【答案】 (1) $x = 3$

$$(2) v = \frac{120}{t}$$

【解析】

【分析】 (1) 根据第一次他从滑雪道 A 端以平均 $(x+2)$ 米/秒的速度滑到 B 端，用了 24 秒；第二次从滑雪道 A 端以平均 $(x+3)$ 米/秒的速度滑到 B 端，用了 20 秒同，列出方程求解即可；

(2) 称算出路程，再列出用含 t 的代数式表示 v 即可.

【小问 1 详解】

根据题意，得 $24(x+2) = 20(x+3)$

解这个方程，得 $x = 3$

【小问 2 详解】

$$24 \times (3 + 2) = 120$$

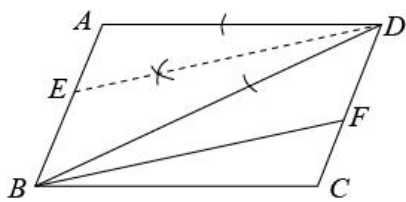
$$v = \frac{120}{t}$$

【点睛】 本题考查了一元一次方程的应用及反比例函数的应用，解决本题的关键是根据题中的等量关系列出方程.

23. 如图， BD 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线， BF 平分 $\angle DBC$ ，交 CD 于点 F .

(1) 请用尺规作 $\angle ADB$ 的角平分线 DE ，交 AB 于点 E （要求保留作图痕迹，不写作法，在确认答案后，请用黑色笔将作图痕迹再填涂一次）；

(2) 根据图形猜想四边形 $DEBF$ 为平行四边形，请将下面的证明过程补充完整.



证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle ADB = \angle \underline{\hspace{1cm}} \quad (\text{两直线平行，内错角相等})$$

又 $\because DE$ 平分 $\angle ADB$ ， BF 平分 $\angle DBC$ ，

$$\therefore \angle EDB = \frac{1}{2} \angle ADB, \quad \angle DBF = \frac{1}{2} \angle DBC$$

$$\therefore \angle EDB = \angle DBF$$

$$\therefore DE \parallel \underline{\hspace{1cm}} \quad (\underline{\hspace{1cm}}) \quad (\text{填推理的依据})$$

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\therefore BE \parallel DF$$

$$\therefore \text{四边形 } DEBF \text{ 为平行四边形} \quad (\underline{\hspace{1cm}}) \quad (\text{填推理的依据}).$$

【答案】 (1) 详见解析

(2) $\angle DBC$ ； BF ；内错角相等，两直线平行；两组对边分别相等的四边形是平行四边形

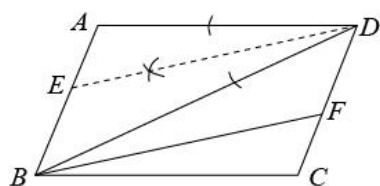
【解析】

【分析】 (1) 根据作角平分线的步骤作 DE 平分 $\angle ADB$ 即可；

(2) 结合图形和已有步骤合理填写即可；

【小问 1 详解】

解：如图，根据角平分线的作图步骤，得到 DE ，即为所求；



【小问 2 详解】

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC. \text{ (两直线平行, 内错角相等) .}$$

又∵ DE 平分 $\angle ADB$ ， BF 平分 $\angle DBC$ ，

$$\therefore \angle EDB = \frac{1}{2} \angle ADB, \quad \angle DBF = \frac{1}{2} \angle DBC$$

$$\therefore \angle EDB = \angle DBF .$$

$$\therefore DE \parallel BF \text{ (内错角相等, 两直线平行) (填推理的依据)}$$

又∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$$\therefore BE \parallel DF ,$$

$$\therefore \text{四边形 } DEBF \text{ 为平行四边形 (两组对边分别平行的四边形是平行四边形) (填推理的依据).}$$

【点睛】 本题主要考查平行四边形的性质、角平分线的性质，掌握相关性质并灵活应用是解题的关键.

24. 为提高耕地灌溉效率，小明的爸妈准备在耕地 A 、 B 、 C 、 D 四个位置安装四个自动喷洒装置（如图 1 所示）， A 、 B 、 C 、 D 四点恰好在边长为 50 米的正方形的四个顶点上，为了用水管将四个自动喷洒装置相互连通，爸妈设计了如下两个水管铺设方案（各图中实线为铺设的水管）.

方案一：如图 2 所示，沿正方形 $ABCD$ 的三边铺设水管；

方案二：如图 3 所示，沿正方形 $ABCD$ 的两条对角线铺设水管.

(1) 请通过计算说明上述两方案中哪个方案铺设水管的总长度更短；

(2) 小明看了爸妈的方案后，根据“蜂集原理”重新设计了一个方案（如图 4 所示），

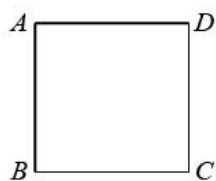


图1

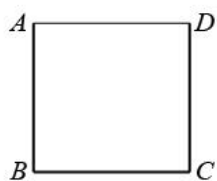


图2

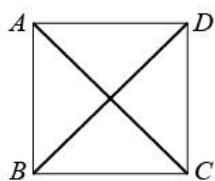


图3

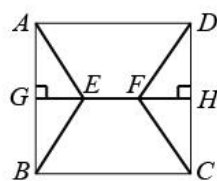


图4

满足 $\angle AEB = \angle CFD = 120^\circ$ ， $AE = BE = CF = DF$ ， $EF \parallel AD$ 、请将小明的方案与爸妈的方案比较，判断谁的方案中铺设水管的总长度更短，并说明理由。（参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.4$ ， $\sqrt{3} \approx 1.7$ ）

【答案】（1）方案二 （2）小明，理由见解析

【解析】

【分析】（1）根据方案铺设管道路线求解即可；

（2）证 $\triangle AEG \cong \triangle BEG \cong \triangle DFH \cong \triangle CFH (HL)$ ，求出小明铺设方案的水管的总长度，进行比较即可得结果；

【小问 1 详解】

解：方案一： $50 \times 3 = 150$ （米）

方案二： $2\sqrt{50^2 + 50^2} = 100\sqrt{2}$ （米）

$100\sqrt{2} = \sqrt{20000} < 150 = \sqrt{22500}$ 所以方案二总长度更短.

【小问 2 详解】

如图，作 $EG \perp AB$ ， $FH \perp CD$ ，垂足分别为 G 和 H .

$$\because AE = BE = CF = DF$$

$$\therefore EG \perp AB, FH \perp CD,$$

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle BEG \cong \triangle DFH \cong \triangle CFH (HL)$$

$$\because \angle AEB = \angle CFD = 120^\circ,$$

$$\therefore AG = BG = DH = CH = 25 \text{ (米)},$$

$$GE = FH = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 25 = \frac{25\sqrt{3}}{3}, EF = GH - 2EG = 50 - \frac{50\sqrt{3}}{3}$$

$$AE = BE = CF = DF = \frac{50\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{总长度: } 4AE + EF = 4 \times \frac{50\sqrt{3}}{3} + 50 - \frac{50\sqrt{3}}{3} = 50\sqrt{3} + 50 = 50(1 + \sqrt{3}) \text{ (米)}$$

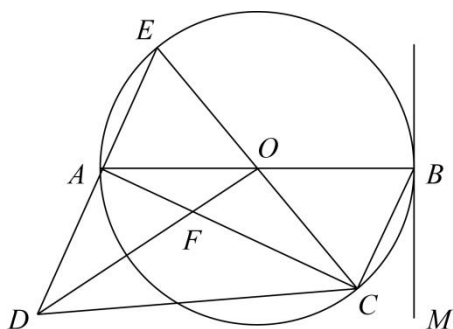
$$\because \frac{100\sqrt{2}}{50(1 + \sqrt{3})} = \frac{100\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{50(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \sqrt{6} - \sqrt{2} > 1$$

$$\therefore 50(1 + \sqrt{3}) < 100\sqrt{2} < 150$$

所以小明的方案总长度最短.

【点睛】本题主要考查正方形的性质、三角形的全等证明，根据题意，灵活应用知识点进行求解是解题的关键。

25. 如图，已知 AB ， CE 是 $\odot O$ 的直径， BM 是 $\odot O$ 的切线，点 D 在 EA 的延长线上， AC ， OD 交于点 F ， $\angle MBC = \angle ACD$



- (1) 求证： $\angle MBC = \angle BAC$ ；
- (2) 求证： $AE = AD$ ；
- (3) 若 $\triangle OFC$ 的面积 $S_1 = 4$ ，求四边形 $AOCD$ 的面积 S 。

【答案】(1) 详见解析

(2) 详见解析 (3) 18

【解析】

【分析】(1) 根据圆切线的性质即可求解；

(2) 根据圆的性质证 $\triangle AEC \cong \triangle ADC$ (ASA)，即可证明；

(3) 由 $\angle BAC = \angle ACD$ 得 $AB \parallel DC$ ，进而得 $\frac{AO}{DC} = \frac{EO}{EC} = \frac{1}{2}$ ，所以 $\frac{AO}{DC} = \frac{FO}{DF} = \frac{AF}{CF} = \frac{1}{2}$ ，由

$S_{\text{四边形}AOCD} = S_{\triangle AOF} + S_{\triangle ADF} + S_{\triangle COF} + S_{\triangle CDF}$ 即可求解；

【小问 1 详解】

证明 $\because CE$ 是 $\odot O$ 的直径， BM 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore \angle ABC + \angle MBC = 90^\circ$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC + \angle BAC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle MBC = \angle BAC$ 。

【小问 2 详解】

证明 $\because OA = OC$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle ACE$ ，

$\therefore \angle MBC = \angle ACD$ ， $\angle MBC = \angle BAC$ ，

$$\therefore \angle ACD = \angle ACE,$$

$\because CE$ 是直径,

$$\therefore \angle EAC = \angle DAC = 90^\circ,$$

$$\because AC = AC,$$

$$\therefore \triangle AEC \cong \triangle ADC (ASA),$$

$$\therefore AE = AD.$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } \because \angle BAC = \angle ACD,$$

$$\therefore AB \parallel DC,$$

$$\backslash \quad EAO \sim EDC, \quad AOF \sim CDF,$$

$$\therefore \frac{AO}{DC} = \frac{EO}{EC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AO}{DC} = \frac{FO}{DF} = \frac{AF}{CF} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle OFC} = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle AOF} = 2, \quad S_{\triangle ADF} = S_{\triangle COF} = 4, \quad S_{\triangle CDF} = 8,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}AOCD} = S_{\triangle AOF} + S_{\triangle ADF} + S_{\triangle COF} + S_{\triangle CDF} = 2 + 4 + 4 + 8 = 18.$$

【点睛】本题主要考查圆的性质、三角形的全等、相似三角形的判定与性质，掌握相关知识并灵活应用是解题的关键.

26. 已知关于 x 的函数 $y = ax^2 + bx + c$.

(1) 若 $a = 1$ ，函数的图象经过点 $(1, -4)$ 和点 $(2, 1)$ ，求该函数的表达式和最小值；

(2) 若 $a = 1$ ， $b = -2$ ， $c = m + 1$ 时，函数的图象与 x 轴有交点，求 m 的取值范围.

(3) 阅读下面材料：

设 $a > 0$ ，函数图象与 x 轴有两个不同的交点 A ， B ，若 A ， B 两点均在原点左侧，探究系数 a ， b ， c 应满足的条件，根据函数图像，思考以下三个方面：

①因为函数的图象与 x 轴有两个不同的交点，所以 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ；

②因为 A ， B 两点在原点左侧，所以 $x = 0$ 对应图象上的点在 x 轴上方，即 $c > 0$ ；

③上述两个条件还不能确保 A ， B 两点均在原点左侧，我们可以通过抛物线的对称轴位置来进一步限制抛

物线的位置：即需 $-\frac{b}{2a} < 0$.

综上所述，系数 a ， b ， c 应满足的条件可归纳为：

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac > 0 \\ c > 0 \\ -\frac{b}{2a} < 0 \end{cases}$$

请根据上面阅读材料，类比解决下面问题：

若函数 $y = ax^2 - 2x + 3$ 的图象在直线 $x = 1$ 的右侧与 x 轴有且只有一个交点，求 a 的取值范围。

【答案】 (1) $y = x^2 + 2x + 1$ 或 $y = (x + 1)^2$ ，0

(2) $m \leq 0$

(3) $-1 < a \leq 0$ 或 $a = \frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法即可求得函数解析式，然后化顶点式即可求得最小值；

(2) 利用函数的图象与 x 轴有交点 $\Delta \geq 0$ ，即可得出结论；

(3) 根据 $a > 0$ 、 $a = 0$ 、 $a < 0$ ，分别讨论，再利用 Δ ， $x = 1$ 处函数值的正负、函数对称轴画出草图，结合图象分析即可。

【小问 1 详解】

根据题意，得
$$\begin{cases} 1 + b + c = -4 \\ 4 + 2b + c = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

解之，得
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -7 \end{cases}$$
，所以 $y = x^2 + 2x - 7 = (x + 1)^2 - 8$

函数的表达式 $y = x^2 + 2x - 7$ 或 $y = (x + 1)^2 - 8$ ，当 $x = -1$ 时， y 的最小值是 -8。

【小问 2 详解】

根据题意，得 $y = x^2 - 2x + m + 1$ 而函数的图象与 x 轴有交点，所以 $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(m + 1) \geq 0$ 所以 $m \leq 0$ 。

【小问 3 详解】

函数 $y = ax^2 - 2x + 3$ 的图象

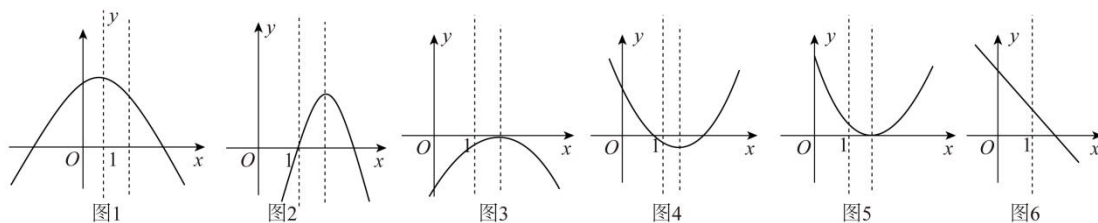


图 1:
$$\begin{cases} a < 0 \\ (-2)^2 - 12a > 0 \\ -\frac{2}{2a} < 1 \\ a - 2 + 3 > 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a < 0 \\ a < \frac{1}{3} \\ a > 1 \\ a > -1 \end{cases},$$

所以, a 的值不存在.

图 2:
$$\begin{cases} a < 0 \\ (-2)^2 - 12a > 0 \\ -\frac{2}{2a} > 1 \\ a - 2 + 3 > 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a < 0 \\ a < \frac{1}{3} \\ a < 1 \\ a > -1 \end{cases} \text{ 的值 } -1 < a < 0.$$

图 3:
$$\begin{cases} a < 0 \\ (-2)^2 - 12a = 0 \\ -\frac{2}{2a} > 1 \\ a - 2 + 3 < 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a < 0 \\ a = \frac{1}{3} \\ a < 1 \\ a < -1 \end{cases}$$

所以 a 的值不存在

图 4:
$$\begin{cases} a > 0 \\ (-2)^2 - 12a > 0 \\ -\frac{2}{2a} > 1 \\ a - 2 + 3 < 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{1}{3} \\ a < 1 \\ a < -1 \end{cases}$$

所以 a 的值不存在.

图 5:
$$\begin{cases} a > 0 \\ (-2)^2 - 12a = 0 \\ -\frac{2}{2a} > 1 \\ a - 2 + 3 > 0 \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} a > 0 \\ a = \frac{1}{3} \\ a < 1 \\ a > -1 \end{cases}$$

所以 a 的值为 $\frac{1}{3}$

图 6: $y = -2x + 3$ 函数与 x 轴的交点为 $(1.5, 0)$

所以 a 的值为 0 成立.

综上所述, a 的取值范围是 $-1 < a \leq 0$ 或 $a = \frac{1}{3}$.

【点睛】 本题考查二次函数的应用. (1) 中掌握待定系数法是解题关键; (2) 中掌握二次函数与 x 轴交点个数与 Δ 的关系是解题关键; (3) 中需注意分类讨论, 结合图象分析更加直观.

淘宝：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022