

2022 年湖南省岳阳市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 8 小题，共 24 分）

1. 8 的相反数是（ ）

- A. $\frac{1}{8}$ B. $-\frac{1}{8}$ C. 8 D. -8

【答案】D

【解析】

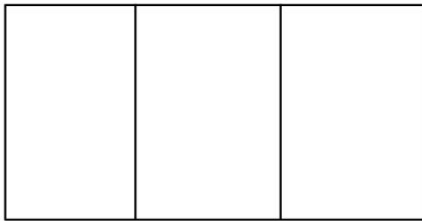
【分析】根据只有符号不同的两个数叫做互为相反数解答.

【详解】解：8 的相反数是-8.

故选：D.

【点睛】本题考查了相反数的定义，熟记概念是解题的关键.

2. 某个立体图形的侧面展开图如图所示，它的底面是正三角形，那么这个立体图形是（ ）



- A. 圆柱 B. 圆锥 C. 三棱柱 D. 四棱柱

【答案】C

【解析】

【分析】根据常见立体图形的底面和侧面即可得出答案.

【详解】解：A 选项，圆柱的底面是圆，故该选项不符合题意；

B 选项，圆锥的底面是圆，故该选项不符合题意；

C 选项，三棱柱的底面是三角形，侧面是三个长方形，故该选项符合题意；

D 选项，四棱柱的底面是四边形，故该选项不符合题意；

故选：C.

【点睛】本题考查了几何体的展开图，掌握 n 棱柱的底面是 n 边形是解题的关键.

3. 下列运算结果正确的是（ ）

- A. $a + 2a = 3a$ B. $a^5 \div a = a^5$ C. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ D. $(a^4)^3 = a^7$

【答案】A

【解析】

【分析】根据合并同类项判断 A 选项；根据同底数幂的除法判断 B 选项；根据同底数幂的乘法判断 C 选项；

根据幂的乘方判断 D 选项.

【详解】解：A 选项，原式 $= 3a$ ，故该选项符合题意；

B 选项，原式 $= a^4$ ，故该选项不符合题意；

C 选项，原式 $= a^5$ ，故该选项不符合题意；

D 选项，原式 $= a^{12}$ ，故该选项不符合题意；

故选：A.

【点睛】本题考查了合并同类项，同底数幂的乘除法，幂的乘方与积的乘方，掌握 $(a^m)^n = a^{mn}$ 是解题的关键.

4. 某村通过直播带货对产出的稻虾米进行线上销售，连续 7 天的销量（单位：袋）分别为：105，103，105，110，108，105，108，这组数据的众数和中位数分别是（ ）

A. 105，108

B. 105，105

C. 108，105

D. 108，108

【答案】B

【解析】

【分析】根据众数和中位数的定义求解即可.

【详解】解：将这组数据重新排列为 103，105，105，105，108，108，110，
这组数据出现次数最多的是 105，

所以众数为 105，

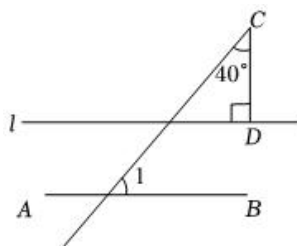
最中间的数据是 105，

所以中位数是 105，

故选：B.

【点睛】本题主要考查众数和中位数，一组数据中出现次数最多的数据叫做众数；将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数. 如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

5. 如图，已知 $l \parallel AB$ ， $CD \perp l$ 于点 D ，若 $\angle C = 40^\circ$ ，则 $\angle 1$ 的度数是（ ）



A. 30°

B. 40°

C. 50°

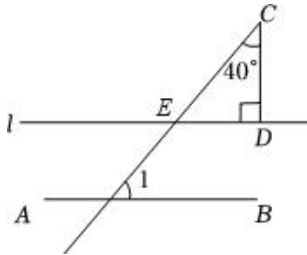
D. 60°

【答案】C

【解析】

【分析】根据直角三角形的性质求出 $\angle CED$ ，再根据平行线的性质解答即可．

【详解】解：在 $Rt\triangle CDE$ 中， $\angle CDE = 90^\circ$ ， $\angle DCE = 40^\circ$ ，



则 $\angle CED = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ ，

$\therefore l \parallel AB$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle CED = 50^\circ$ ，

故选：C．

【点睛】本题考查的是直角三角形的性质、平行线的性质，掌握直角三角形的两锐角互余是解题的关键．

6. 下列命题是真命题的是（ ）

- A. 对顶角相等
- B. 平行四边形的对角线互相垂直
- C. 三角形的内心是它的三条边的垂直平分线的交点
- D. 三角分别相等的两个三角形是全等三角形

【答案】A

【解析】

【分析】根据对顶角性质判断 A，根据平行四边形的性质判断 B，根据三角形的内心定义判断 C，根据全等三角形的判定定理判断 D．

【详解】A.对顶角相等是一个正确的命题，是真命题，故 A 符合题意；

B.菱形的对角线互相垂直，非菱形的平行四边形的对角线不垂直，所以平行四边形的对角线互相垂直是一个假命题，故 B 不符合题意；

C.三角形的内心是三角形内角平分线的交点，不一定是三边的垂直平分线的交点，则三角形的内心是它的三条边的垂直平分线的交点是一个假命题，故 C 不符合题意；

D.三角分别相等的两个三角形不一定全等，故 D 不符合题意；

故选：A．

【点睛】本题考查了真命题与假命题的判断，对顶角的性质，平行四边形的性质，三角形的内心定义，全等三角形的判定，熟练掌握这些性质、定义、定理是解决问题的关键．

7. 我国古代数学著作《孙子算经》中有这样一道题，原文如下：今有百鹿入城，家取一鹿，不尽，又三家共一鹿，适尽，问：城中家几何？大意为：今有 100 头鹿进城，每家取一头鹿，没有取完，剩下的鹿每 3 家共取一头，恰好取完，问：城中有多少户人家？在这个问题中，城中人家的户数为（ ）

- A. 25 B. 75 C. 81 D. 90

【答案】 B

【解析】

【分析】 设城中有 x 户人家，利用鹿的数量 = 城中人均户数 + $\frac{1}{3} \times$ 城中人均户数，即可得出关于 x 的一元一次方程，解之即可得出结论.

【详解】 解：设城中有 x 户人家，

$$\text{依题意得： } x + \frac{1}{3}x = 100,$$

$$\text{解得： } x = 75,$$

$\therefore$ 城中有 75 户人家.

故选： B.

【点睛】 本题考查了一元一次方程的应用，找准等量关系，正确列出一元一次方程是解题的关键.

8. 已知二次函数 $y = mx^2 - 4m^2x - 3$ (m 为常数， $m \neq 0$)，点 $P(x_p, y_p)$ 是该函数图象上一点，当 $0 \leq x_p \leq 4$ 时， $y_p \leq -3$ ，则 m 的取值范围是（ ）

- A. $m \geq 1$ 或 $m < 0$ B. $m \geq 1$
C. $m \leq -1$ 或 $m > 0$ D. $m \leq -1$

【答案】 A

【解析】

【分析】 先求出抛物线的对称轴及抛物线与 y 轴的交点坐标，再分两种情况： $m > 0$ 或 $m < 0$ ，根据二次函数的性质求得 m 的不同取值范围便可.

【详解】 解： $\because$ 二次函数 $y = mx^2 - 4m^2x - 3$ ，

$\therefore$ 对称轴为 $x = 2m$ ，抛物线与 y 轴的交点为 $(0, -3)$ ，

$\therefore$ 点 $P(x_p, y_p)$ 是该函数图象上一点，当 $0 \leq x_p \leq 4$ 时， $y_p \leq -3$ ，

$\therefore$ ①当 $m > 0$ 时，对称轴 $x = 2m > 0$ ，

此时，当 $x = 4$ 时， $y \leq -3$ ，即 $m \cdot 4^2 - 4m^2 \cdot 4 - 3 \leq -3$ ，

解得 $m \geq 1$;

②当 $m < 0$ 时, 对称轴 $x = 2m < 0$,

当 $0 \leq x \leq 4$ 时, y 随 x 增大而减小,

则当 $0 \leq x_p \leq 4$ 时, $y_p \leq -3$ 恒成立;

综上, m 的取值范围是: $m \geq 1$ 或 $m < 0$.

故选: A.

【点睛】本题考查了二次函数的性质, 关键是分情况讨论.

二、填空题 (本大题共 8 小题, 共 32 分)

9. 使 $\sqrt{x-1}$ 有意义的 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq 1$

【解析】

【分析】根据二次根式的被开方数是非负数列出不等式 $x-1 \geq 0$, 解不等式即可求得 x 的取值范围.

【详解】解: 根据题意得 $x-1 \geq 0$,

解得 $x \geq 1$.

故答案为: $x \geq 1$.

【点睛】本题考查了二次根式有意义的条件, 解题的关键是利用被开方数是非负数得出不等式.

10. 2022 年 5 月 14 日, 编号为 B-001J 的 C919 大飞机首飞成功. 数据显示, C919 大飞机的单价约为 653000000 元, 数据 653000000 用科学记数法表示为_____.

【答案】 6.53×10^8

【解析】

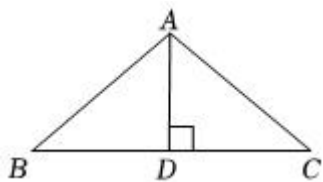
【分析】利用科学记数法的定义解决. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时, n 是正整数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负整数.

【详解】解: $653000000 = 6.53 \times 10^8$.

故答案为: 6.53×10^8 .

【点睛】考查科学记数法的定义, 关键是理解运用科学记数法.

11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $AD \perp BC$ 于点 D , 若 $BC = 6$, 则 $CD =$ _____.



【答案】3

【解析】

【分析】根据等腰三角形的性质可知 D 是 BC 的中点，即可求出 CD 的长.

【详解】解： $\because AB = AC$ ， $AD \perp BC$ ，

$$\therefore CD = BD,$$

$$\because BC = 6,$$

$$\therefore CD = 3,$$

故答案为：3.

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质，熟练掌握等腰三角形三线合一解题的关键.

12. 分式方程 $\frac{3x}{x+1} = 2$ 的解为 $x =$ _____.

【答案】2

【解析】

【分析】去分母，移项、合并同类项，再对所求的根进行检验即可求解.

【详解】解： $\frac{3x}{x+1} = 2$ ，

$$3x = 2x + 2,$$

$$x = 2,$$

经检验 $x = 2$ 是方程的解.

故答案为：2.

【点睛】本题主要考查解分式方程，熟练掌握分式方程的解法，注意对所求的根进行检验是解题的关键.

13. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + m = 0$ 有两个不相等的实数根，则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < 1$

【解析】

【分析】根据判别式的意义得到 $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times m > 0$ ，然后解不等式求出 m 的取值即可.

【详解】解：根据题意得 $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times m > 0$ ，

解得 $m < 1$,

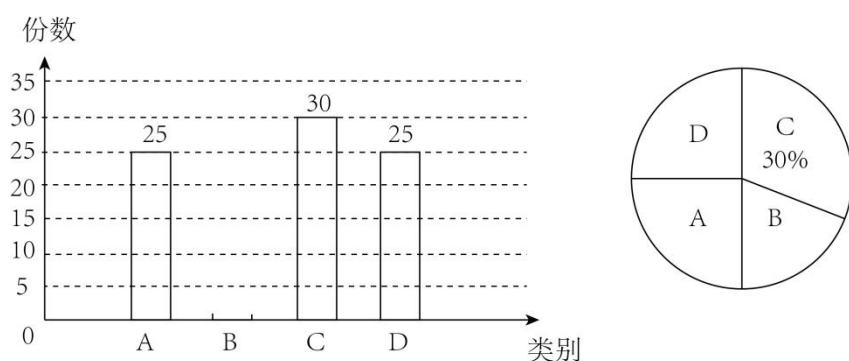
所以实数 m 的取值范围是 $m < 1$.

故答案为: $m < 1$.

【点睛】本题考查了根的判别式: 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系:

当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根.

14. 聚焦“双减”政策落地, 凸显寒假作业特色. 某学校评选出的寒假优质特色作业共分为四类: A (节日文化篇), B (安全防疫篇), C (劳动实践篇), D (冬奥运动篇) 下面是根据统计结果绘制的两幅不完整的统计图, 则 B 类作业有_____份.



【答案】20

【解析】

【分析】由条形统计图可得 A , C , D 类作业分别有 25 份, 30 份, 25 份, 由扇形统计图可得 C 类作业份数占总份数的 30%, 可得总份数为 100 份, 减去 A , C , D 类作业的份数即可求解.

【详解】解: $\because C$ 类作业有 30 份, 且 C 类作业份数占总份数的 30%,

$\therefore$ 总份数为: $30 \div 30\% = 100$ (份),

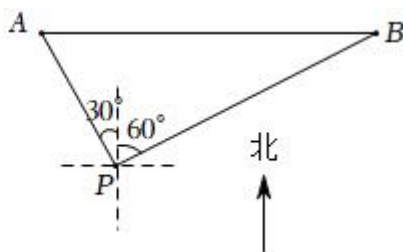
$\because A$, D 类作业分别有 25 份, 25 份,

$\therefore B$ 类作业的份数为: $100 - 25 - 30 - 25 = 20$ (份).

故答案为: 20.

【点睛】本题考查条形统计图, 扇形统计图, 解题的关键是能够根据统计图提取所需信息.

15. 喜迎二十大, “龙舟故里”赛龙舟. 丹丹在汨罗江国际龙舟竞渡中心广场点 P 处观看 200 米直道竞速赛. 如图所示, 赛道 AB 为东西方向, 赛道起点 A 位于点 P 的北偏西 30° 方向上, 终点 B 位于点 P 的北偏东 60° 方向上, $AB = 200$ 米, 则点 P 到赛道 AB 的距离约为_____米 (结果保留整数, 参考数据: $\sqrt{3} \approx 1.732$).



【答案】 87

【解析】

【分析】 过点 P 作 $PC \perp AB$ ，垂足为 P ，设 $PC = x$ 米，然后分别在 $Rt\triangle APC$ 和 $Rt\triangle CBP$ 中，利用锐角三角函数的定义求出 AC ， BC 的长，再根据 $AB = 200$ 米，列出关于 x 的方程，进行计算即可解答.

【详解】 解：过点 P 作 $PC \perp AB$ ，垂足为 P ，

设 $PC = x$ 米，

在 $Rt\triangle APC$ 中， $\angle APC = 30^\circ$ ，

$$\therefore AC = PC \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}x \text{ (米)},$$

在 $Rt\triangle CBP$ 中， $\angle CPB = 60^\circ$ ，

$$\therefore BC = CP \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}x \text{ (米)},$$

$$\therefore AB = 200 \text{ 米},$$

$$\therefore AC + BC = 200,$$

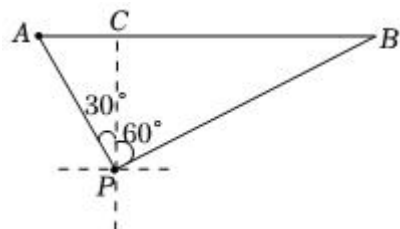
$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}x = 200,$$

$$\therefore x = 50\sqrt{3} \approx 87,$$

$$\therefore PC = 87 \text{ 米},$$

$\therefore$ 点 P 到赛道 AB 的距离约为 87 米，

故答案为：87.



【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用—方向角问题，根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键.

16. 如图，在 $\odot O$ 中， AB 为直径， $AB = 8$ ， BD 为弦，过点 A 的切线与 BD 的延长线交于点 C ， E 为线

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{8^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \frac{32}{5},$$

$$\because OB = OD, EO = ED,$$

$$\therefore \angle EDO = \angle EOD = \angle OBD,$$

$$\therefore \triangle DOE \sim \triangle DBO,$$

$$\therefore \frac{DO}{DB} = \frac{DE}{DO},$$

$$\therefore \frac{4}{\frac{32}{5}} = \frac{DE}{4},$$

$$\therefore DE = \frac{5}{2},$$

$$\therefore BE = BD - DE = \frac{32}{5} - \frac{5}{2} = \frac{39}{10},$$

$$\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{39}{10}} = \frac{25}{39}.$$

故答案为： $\frac{25}{39}$.

【点睛】 本题主要考查圆的相关知识，相似三角形的判定和性质，解直角三角形等知识，熟练掌握各性质及判定定理，正确寻找相似三角形解决问题是解题的关键.

三、解答题（本大题共 8 小题，共 64 分）

17. 计算： $|-3| - 2 \tan 45^\circ + (-1)^{2022} - (\sqrt{3} - \pi)^0$.

【答案】 1

【解析】

【分析】 根据特殊角的三角函数值，零指数幂，实数的运算，有理数的乘方，绝对值等计算法则求解即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解：} & |-3| - 2 \tan 45^\circ + (-1)^{2022} - (\sqrt{3} - \pi)^0 \\ &= 3 - 2 \times 1 + 1 - 1 \\ &= 3 - 2 + 1 - 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了特殊角的三角函数值，零指数幂，实数的运算，有理数的乘方，绝对值，准确熟练地化简各式是解题的关键.

18. 已知 $a^2 - 2a + 1 = 0$ ，求代数式 $a(a-4) + (a+1)(a-1) + 1$ 的值.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 先化简所求的式子，再结合已知求解即可.

【详解】 解： $a(a-4)+(a+1)(a-1)+1$

$$= a^2 - 4a + a^2 - 1 + 1$$

$$= 2a^2 - 4a$$

$$= 2(a^2 - 2a),$$

$$\because a^2 - 2a + 1 = 0,$$

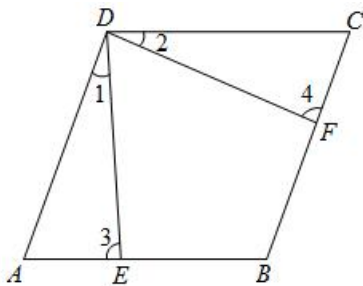
$$\therefore a^2 - 2a = -1,$$

$$\therefore \text{原式} = 2 \times (-1) = -2.$$

【点睛】 本题考查代数式的运算，熟练掌握单项式乘多项式，平方差公式是解题的关键.

19. 如图，点 E ， F 分别在 $\square ABCD$ 的边 AB ， BC 上， $AE = CF$ ，连接 DE ， DF 。请从以下三个条件：

① $\angle 1 = \angle 2$ ；② $DE = DF$ ；③ $\angle 3 = \angle 4$ 中，选择一个合适的作为已知条件，使 $\square ABCD$ 为菱形.



(1) 你添加的条件是_____ (填序号)；

(2) 添加了条件后，请证明 $\square ABCD$ 为菱形.

【答案】 (1) ① (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 添加合适的条件即可；

(2) 证 $\triangle ADE \cong \triangle CDF$ (AAS)，得 $AD = CD$ ，再由菱形的判定即可得出结论.

【小问 1 详解】

解：添加的条件是 $\angle 1 = \angle 2$.

故答案为：①.

【小问 2 详解】

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore \angle A = \angle C,$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ \angle A = \angle C, \\ AE = CF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF (AAS),$$

$$\therefore AD = CD,$$

$\therefore \square ABCD$ 为菱形.

【点睛】 本题考查了菱形的判定、平行四边形的性质、全等三角形的判定与性质等知识，熟练掌握菱形的判定，证明三角形全等是解题的关键.

20. 守护好一江碧水，打造长江最美岸线. 江豚，麋鹿，天鹅已成为岳阳“吉祥三宝”的新名片. 某校生物兴趣小组设计了 3 张环保宣传卡片，正面图案如图所示，它们除此之外完全相同.



江豚



麋鹿



天鹅

(1) 将这 3 张卡片背面朝上，洗匀，从中随机抽取一张，则抽取的卡片正面图案恰好是“麋鹿”的概率为 _____;

(2) 将这 3 张卡片背面朝上，洗匀，从中随机抽取一张，不放回，再从剩余的两张卡片中随机抽取一张，请用列表或画树状图的方法，求抽取的卡片正面图案恰好是“江豚”和“天鹅”的概率.

【答案】 (1) $\frac{1}{3}$

(2) $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 直接利用概率公式求解即可;

(2) 将江豚，麋鹿，天鹅三张卡片分别记作①、②、③，列表得出所有等可能结果，从中找到符合条件的结果数，再根据概率公式求解即可.

【小问 1 详解】

将这 3 张卡片背面朝上，洗匀，从中随机抽取一张，

则抽取的卡片正面图案恰好是“麋鹿”的概率为 $\frac{1}{3}$ ，

故答案为： $\frac{1}{3}$ ；

【小问 2 详解】

将江豚，麋鹿，天鹅三张卡片分别记作①、②、③，

列表如下：

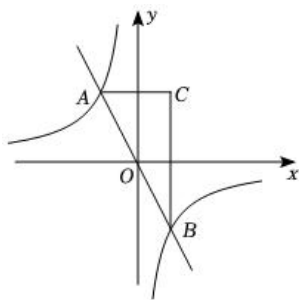
	①	②	③
①		(②, ①)	(③, ①)
②	(①, ②)		(③, ②)
③	(①, ③)	(②, ③)	

由表知，共有 6 种等可能结果，其中抽取的卡片正面图案恰好是“江豚”和“天鹅”的有 2 种结果，

所以抽取的卡片正面图案恰好是“江豚”和“天鹅”的概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 。

【点睛】此题考查了列表法或树状图法求概率。用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比。

21. 如图，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 与正比例函数 $y = mx (m \neq 0)$ 的图象交于点 $A(-1, 2)$ 和点 B ，点 C 是点 A 关于 y 轴的对称点，连接 AC ， BC 。



(1) 求该反比例函数的解析式；

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积；

(3) 请结合函数图象，直接写出不等式 $\frac{k}{x} < mx$ 的解集。

【答案】(1) $y = -\frac{2}{x}$

(2) 4 (3) $x < -1$ 或 $0 < x < 1$

【解析】

【分析】(1) 把点 $A(-1, 2)$ 代入 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 可得 k 的值，求得反比例函数的解析式；

(2) 根据对称性求得 B 、 C 的坐标然后利用三角形面积公式可求解.

(3) 根据图象得出不等式 $\frac{k}{x} < mx$ 的解集即可.

【小问 1 详解】

解：把点 $A(-1, 2)$ 代入 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 得： $2 = \frac{k}{-1}$,

$$\therefore k = -2,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = -\frac{2}{x};$$

【小问 2 详解】

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 与正比例函数 $y = mx (m \neq 0)$ 的图象交于点 $A(-1, 2)$ 和点 B ,

$$\therefore B(1, -2),$$

$\therefore$ 点 C 是点 A 关于 y 轴的对称点,

$$\therefore C(1, 2),$$

$$\therefore CD = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times (2 + 2) = 4.$$

【小问 3 详解】

根据图象得：不等式 $\frac{k}{x} < mx$ 的解集为 $x < -1$ 或 $0 < x < 1$.

【点睛】本题是反比例函数和一次函数的交点问题，考查了待定系数法求函数解析式，反比例函数的性质，三角形的面积，数形结合是解题的关键.

22. 为迎接湖南省第十四届运动会在岳阳举行，某班组织学生参加全民健身线上跳绳活动，需购买 A 、 B 两种跳绳若干. 若购买 3 根 A 种跳绳和 1 根 B 种跳绳共需 140 元；若购买 5 根 A 种跳绳和 3 根 B 种跳绳共需 300 元.

(1) 求 A 、 B 两种跳绳的单价各是多少元？

(2) 若该班准备购买 A 、 B 两种跳绳共 46 根，总费用不超过 1780 元，那么至多可以购买 B 种跳绳多少根？

【答案】(1) A 种跳绳的单价为 30 元， B 种跳绳的单价为 50 元

(2) 至多可以购买 B 种跳绳 20 根

【解析】

【分析】(1) 设 A 种跳绳的单价为 x 元，B 种跳绳的单价为 y 元. 由题意：若购买 3 根 A 种跳绳和 1 根 B 种跳绳共需 140 元；若购买 5 根 A 种跳绳和 3 根 B 种跳绳共需 300 元. 列出二元一次方程组，解方程组即可；

(2) 设购买 B 种跳绳 a 根，则购买 A 种跳绳 $(46-a)$ 根，由题意：总费用不超过 1780 元，列出一元一次不等式，解不等式即可.

【小问 1 详解】

解：设 A 种跳绳的单价为 x 元，B 种跳绳的单价为 y 元.

根据题意得：
$$\begin{cases} 3x + y = 140 \\ 5x + 3y = 300 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} x = 30 \\ y = 50 \end{cases}$$

答：A 种跳绳的单价为 30 元，B 种跳绳的单价为 50 元.

【小问 2 详解】

设购买 B 种跳绳 a 根，则购买 A 种跳绳 $(46-a)$ 根，

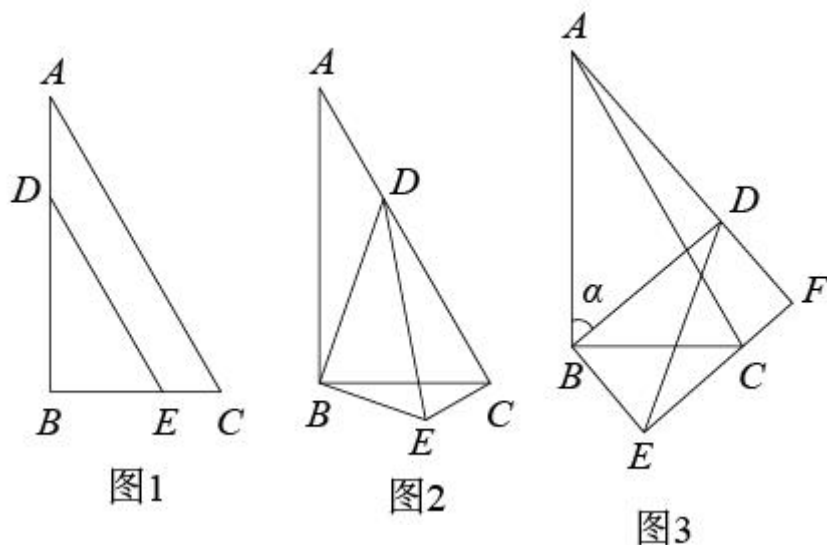
由题意得： $30(46-a) + 50a \leq 1780$,

解得： $a \leq 20$,

答：至多可以购买 B 种跳绳 20 根.

【点睛】本题主要考查了二元一次方程组的应用以及一元一次不等式的应用，解题的关键是：(1) 找准等量关系，正确列出二元一次方程组；(2) 找出不等关系，正确列出一元一次不等式.

23. 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBE$ 的顶点 B 重合， $\angle ABC = \angle DBE = 90^\circ$ ， $\angle BAC = \angle BDE = 30^\circ$ ， $BC = 3$ ， $BE = 2$.



(1) 特例发现：如图 1，当点 D ， E 分别在 AB ， BC 上时，可以得出结论： $\frac{AD}{CE} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，直线 AD 与直线 CE 的位置关系是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 探究证明：如图 2，将图 1 中的 $\triangle DBE$ 绕点 B 顺时针旋转，使点 D 恰好落在线段 AC 上，连接 EC ，

(1) 中的结论是否仍然成立？若成立，请证明；若不成立，请说明理由；

(3) 拓展运用：如图 3，将图 1 中的 $\triangle DBE$ 绕点 B 顺时针旋转 $\alpha (19^\circ < \alpha < 60^\circ)$ ，连接 AD 、 EC ，它们的延长线交于点 F ，当 $DF = BE$ 时，求 $\tan(60^\circ - \alpha)$ 的值。

【答案】(1) $\sqrt{3}$ ，垂直

(2) 成立，理由见解析

(3) $\frac{8\sqrt{5} - 9\sqrt{3}}{11}$

【解析】

【分析】(1) 解直角三角形求出 EC ， AD ，可得结论；

(2) 结论不变，证明 $\triangle ABD \sim \triangle CBE$ ，推出 $\frac{AD}{EC} = \frac{AB}{BC} = \sqrt{3}$ ， $\angle ADB = \angle BEC$ ，可得结论；

(3) 如图 3 中，过点 B 作 $BJ \perp AC$ 于点 J ，设 BD 交 AK 于点 K ，过点 K 作 $KT \perp AC$ 于点 K 。求出 BJ ， JK ，可得结论。

【小问 1 详解】

解：在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $BC = 3$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{3}BC = 3\sqrt{3},$$

在 $Rt\triangle BDE$ 中， $\angle BDE = 30^\circ$ ， $BE = 2$ ，

$$\therefore BD = \sqrt{3}BE = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore EC = 1, AD = \sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{AD}{EC} = \sqrt{3}, \text{ 此时 } AD \perp EC,$$

故答案为： $\sqrt{3}$ ，垂直；

【小问 2 详解】

结论成立。

理由： $\because \angle ABC = \angle DBE = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABD = \angle CBE,$$

$$\because AB = \sqrt{3}BC, \quad BD = \sqrt{3}BE,$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{DB}{EB},$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBE,$$

$$\therefore \frac{AD}{EC} = \frac{AB}{BC} = \sqrt{3}, \quad \angle ADB = \angle BEC,$$

$$\because \angle ADB + \angle CDB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CDB + \angle BEC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE + \angle DCE = 180^\circ,$$

$$\because \angle DBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\therefore AD \perp EC;$$

【小问3 详解】

如图3中，过点B作 $BJ \perp AC$ 于点J，设BD交AK于点K，过点K作 $KT \perp AC$ 于点K。

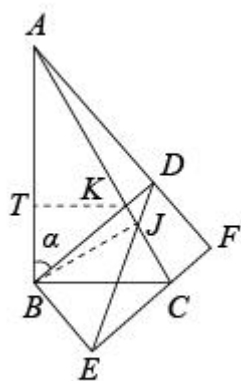


图3

$$\because \angle AJB = 90^\circ, \quad \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABJ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle KBJ = 60^\circ - \alpha.$$

$$\because AB = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore BJ = \frac{1}{2}AB = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad AJ = \sqrt{3}BJ = \frac{9}{2},$$

当 $DF = BE$ 时，四边形 $BEFD$ 是矩形，

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ, \quad AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{15},$$

$$\text{设 } KT = m, \text{ 则 } AT = \sqrt{3}m, \quad AK = 2m,$$

$$\therefore \angle KTB = \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{KT}{BT} = \frac{AD}{BD},$$

$$\therefore \frac{m}{BT} = \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{3}},$$

$$\therefore BT = \frac{2\sqrt{5}}{5}m,$$

$$\therefore \sqrt{3}m + \frac{2\sqrt{5}}{5}m = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore m = \frac{45 - 6\sqrt{15}}{11},$$

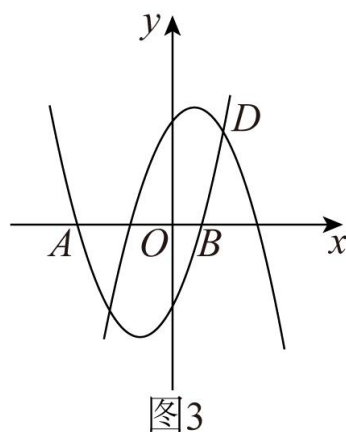
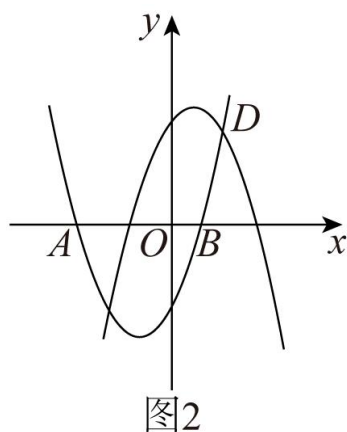
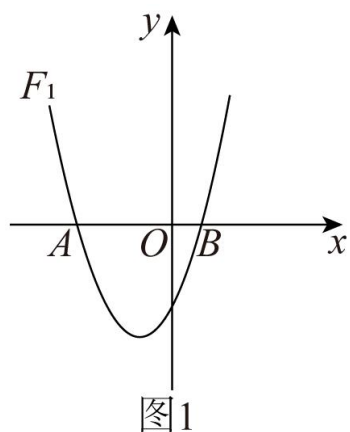
$$\therefore AK = 2m = \frac{90 - 12\sqrt{15}}{11},$$

$$\therefore KJ = AJ - AK = \frac{9}{2} - \frac{90 - 12\sqrt{15}}{11} = \frac{24\sqrt{15} - 81}{22},$$

$$\therefore \tan(60^\circ - \alpha) = \frac{KJ}{BJ} = \frac{8\sqrt{5} - 9\sqrt{3}}{11}.$$

【点睛】本题属于三角形综合题，考查了解直角三角形，相似三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造直角三角形解决问题，属于中考压轴题.

24. 如图 1，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $F_1: y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-3, 0)$ 和点 $B(1, 0)$.



- (1) 求抛物线 F_1 的解析式；
- (2) 如图 2，作抛物线 F_2 ，使它与抛物线 F_1 关于原点 O 成中心对称，请直接写出抛物线 F_2 的解析式；
- (3) 如图 3，将 (2) 中抛物线 F_2 向上平移 2 个单位，得到抛物线 F_3 ，抛物线 F_1 与抛物线 F_3 相交于 C ， D 两点（点 C 在点 D 的左侧）。
- ①求点 C 和点 D 的坐标；
- ②若点 M ， N 分别为抛物线 F_1 和抛物线 F_3 上 C ， D 之间的动点（点 M ， N 与点 C ， D 不重合），试求四边形 $CMDN$ 面积的最大值。

【答案】(1) $y = x^2 + 2x - 3$

(2) $y = -x^2 + 2x + 3$

(3) ① $C(-2, -3)$ 或 $D(2, 5)$ ；② 12

【解析】

【分析】(1) 将点 $A(-3, 0)$ 和点 $B(1, 0)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$ ，即可求解；

(2) 利用对称性求出函数 F_1 顶点 $(-1, -4)$ 关于原点的对称点为 $(1, 4)$ ，即可求函数 F_2 的解析式；

(3) ①通过联立方程组 $\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 5 \\ y = x^2 + 2x - 3 \end{cases}$ ，求出 C 点和 D 点坐标即可；

②求出直线 CD 的解析式，过点 M 作 $MF \parallel y$ 轴交 CD 于点 F ，过点 N 作 $NE \parallel y$ 轴交于点 E ，设

$M(m, m^2 + 2m - 3)$ ， $N(n, -n^2 + 2n + 3)$ ，则 $F(m, 2m + 2)$ ， $N(n, 2n + 1)$ ，可求 $MF = -m^2 + 4$ ，

$NE = -n^2 + 2$ ，由 $S_{\text{四边形}CMDN} = S_{\triangle CDN} + S_{\triangle CDM} = 2(MF + NE)$ ，分别求出 MF 的最大值 4， NE 的最大值 2，即可求解。

【小问 1 详解】

解：将点 $A(-3, 0)$ 和点 $B(1, 0)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$ ，

$$\therefore \begin{cases} 9 - 3b + c = 0 \\ 1 + b + c = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} b = 2 \\ c = -3 \end{cases},$$

$$\therefore y = x^2 + 2x - 3.$$

【小问 2 详解】

$$\therefore y = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4,$$

$\therefore$ 抛物线的顶点 $(-1, -4)$,

$\therefore$ 顶点 $(-1, -4)$ 关于原点的对称点为 $(1, 4)$,

$\therefore$ 抛物线 F_2 的解析式为 $y = -(x-1)^2 + 4$,

$\therefore y = -x^2 + 2x + 3$.

【小问 3 详解】

由题意可得，抛物线 F_3 的解析式为 $y = -(x-1)^2 + 6 = -x^2 + 2x + 5$,

$$\textcircled{1} \text{联立方程组} \begin{cases} y = -x^2 + 2x + 5 \\ y = x^2 + 2x - 3 \end{cases},$$

解得 $x = 2$ 或 $x = -2$,

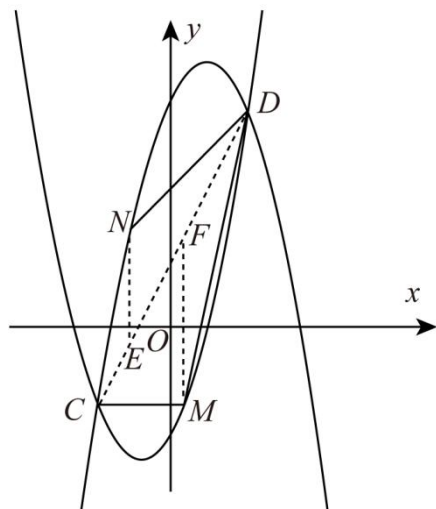
$\therefore C(-2, -3)$ 或 $D(2, 5)$;

$\textcircled{2}$ 设直线 CD 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} -2k + b = -3 \\ 2k + b = 5 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = 2 \\ b = 1 \end{cases},$$

$\therefore y = 2x + 1$,

过点 M 作 $MF \parallel y$ 轴交 CD 于点 F ，过点 N 作 $NE \parallel y$ 轴交于点 E ，如图所示：



设 $M(m, m^2 + 2m - 3)$, $N(n, -n^2 + 2n + 3)$,

则 $F(m, 2m + 1)$, $N(n, 2n + 1)$,

$\therefore MF = 2m + 1 - (m^2 + 2m - 3) = -m^2 + 4$,

$$NE = -n^2 + 2n + 3 - 2n - 1 = -n^2 + 2,$$

$$\because -2 < m < 2, \quad -2 < n < 2,$$

$\therefore$ 当 $m = 0$ 时, MF 有最大值 4,

当 $n = 0$ 时, NE 有最大值 2,

$$\therefore S_{\text{四边形}CMDN} = S_{\triangle CDN} + S_{\triangle CDM} = \frac{1}{2} \times 4 \times (MF + NE) = 2(MF + NE),$$

$\therefore$ 当 $MF + NE$ 最大时, 四边形 $CMDN$ 面积的最大值为 12.

【点睛】 本题考查二次函数的图象及性质, 熟练掌握二次函数的图象及性质, 图象平移和对称的性质是解题的关键.

淘宝：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022