

黄石市 2022 年初中学业水平考试

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. $1-\sqrt{2}$ 的绝对值是 ()

- A. $1-\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}-1$ C. $1+\sqrt{2}$ D. $\pm(\sqrt{2}-1)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据绝对值的意义求解即可.

【详解】解: $\because \sqrt{2} > 1$,

$$\therefore |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1,$$

故选: B.

【点睛】本题考查绝对值, 估算无理数, 熟练掌握一个正数的绝对值是它的本身, 一个负数的绝对值是它的相反数, 0 的绝对值是 0 是解题的关键.

2. 下面四幅图是我国一些博物馆的标志, 其中既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()

A. 温州博物馆



B. 西藏博物馆



C. 广东博物馆



D. 湖北博物馆



【答案】A

【解析】

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的定义解答即可.

【详解】解: A: 既是中心对称图形, 又是轴对称图形, 故此选项符合题意;

B: 不是中心对称图形, 是轴对称图形, 故此选项不合题意;

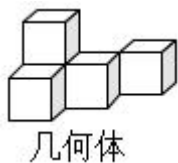
C: 不是中心对称图形, 也不是轴对称图形, 故此选项不合题意;

D: 不是中心对称图形, 是轴对称图形, 故此选项不合题意;

故选: A.

【点睛】本题主要考查中心对称图形和轴对称图形的概念，轴对称图形：在同一平面内，一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够完全重合的图形；中心对称图形：在同一平面内，如果把一个图形绕某一点旋转 180 度，旋转后的图形和原图完全重合，那么这个图形就叫做中心图形。

3. 由 5 个大小相同的小正方体搭成的几何体如图所示，它的主视图是 ()



【答案】B

【解析】

【分析】找到从正面看所得到的图形即可，注意所有的看到的或看不到的棱都应表现在主视图中，看得见的用实线，看不见的用虚线，虚实重合用实线。

【详解】解：从正面看，底层是三个小正方形，上层的左边是一个小正方形，
故选：B.

【点睛】本题考查了三视图的知识，主视图是从物体的正面看得到的视图。

4. 下列运算正确的是 ()

A. $a^9 - a^7 = a^2$ B. $a^6 \div a^3 = a^2$ C. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ D. $(-2a^2b)^2 = 4a^4b^2$

【答案】D

【解析】

【分析】根据合并同类项法则，同底数幂的乘除法法则以及积的乘方运算法则即可求出答案。

【详解】解：A. a^9 与 a^7 不是同类项，所以不能合并，故 A 不符合题意

B. 原式 $= a^3$ ，故 B 不符合题意

C. 原式 $= a^5$ ，故 C 不符合题意

D. 原式 $= 4a^4b^2$ ，故 D 符合题意。

故选：D.

【点睛】本题考查合并同类项法则，同底数幂的乘除法法则以及积的乘方运算法则，本题属于基础题型。

5. 函数 $y = \frac{x}{\sqrt{x+3}} + \frac{1}{x-1}$ 的自变量 x 的取值范围是 ()

- A. $x \neq -3$ 且 $x \neq 1$ B. $x > -3$ 且 $x \neq 1$ C. $x > -3$ D. $x \geq -3$ 且 $x \neq 1$

【答案】B

【解析】

【分析】直接利用二次根式有意义的条件、分式有意义的条件分析得出答案.

【详解】解: 依题意,
$$\begin{cases} x+3 > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$$

$\therefore x > -3$ 且 $x \neq 1$

故选 B

【点睛】此题主要考查了函数自变量的取值范围, 正确掌握二次根式与分式有意义的条件是解题关键.

6. 我市某校开展共创文明班, 一起向未来的古诗文朗诵比赛活动, 有 10 位同学参加了初赛, 按初赛成绩由高到低取前 5 位进入决赛. 如果小王同学知道了自己的成绩后, 要判断能否进入决赛, 他需要知道这 10 位同学成绩的 ()

- A. 平均数 B. 众数 C. 中位数 D. 方差

【答案】C

【解析】

【分析】共有 10 名同学参加比赛, 取前 5 名进入决赛, 而成绩的中位数应为第 5, 第 6 名同学的成绩的平均数, 如果小王的成绩大于中位数, 则在前 5 名, 由此即可判断.

【详解】解: $\because$ 一共有 10 名同学参加比赛, 取前 5 名进入决赛,

$\therefore$ 成绩的中位数应为第 5, 第 6 名同学的成绩的平均数,

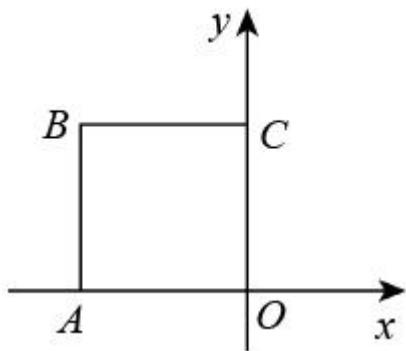
如果小王的成绩大于中位数, 则可以晋级, 反之则不能晋级,

故只需要知道 10 名同学成绩的中位数即可,

故选: C.

【点睛】本题考查求一组数的中位数, 中位数的实际应用, 能够求出一组数据的中位数是解决本题的关键.

7. 如图, 正方形 $OABC$ 的边长为 $\sqrt{2}$, 将正方形 $OABC$ 绕原点 O 顺时针旋转 45° , 则点 B 的对应点 B_1 的坐标为 ()



- A. $(-\sqrt{2}, 0)$ B. $(-\sqrt{2}, 0)$ C. $(0, \sqrt{2})$ D. $(0, 2)$

【答案】D

【解析】

【分析】连接 OB ，由正方形 $ABCD$ 绕原点 O 顺时针旋转 45° ，推出 $\angle A_1OB_1 = 45^\circ$ ，得到 $\triangle A_1OB_1$ 为等腰直角三角形，点 B_1 在 y 轴上，利用勾股定理求出 OB_1 即可。

【详解】解：连接 OB ，

$\because$ 正方形 $ABCD$ 绕原点 O 顺时针旋转 45° ，

$\therefore \angle AOA_1 = 45^\circ$ ， $\angle AOB = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle A_1OB_1 = 45^\circ$ ，

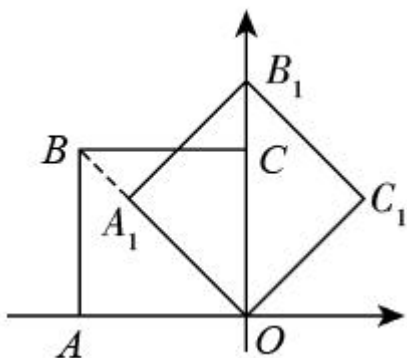
$\therefore \triangle A_1OB_1$ 为等腰直角三角形，点 B_1 在 y 轴上，

$\because \angle B_1A_1O = 90^\circ$ ， $A_1B_1 = OA_1 = \sqrt{2}$ ，

$\therefore OB_1 = \sqrt{A_1B_1^2 + OA_1^2} = \sqrt{2+2} = 2$ ，

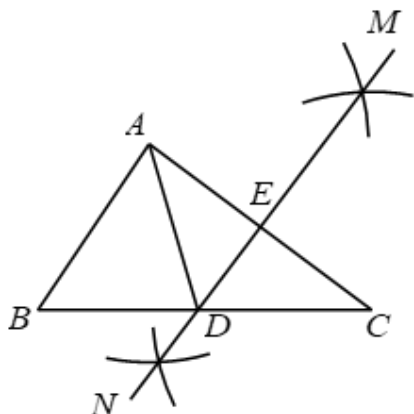
$\therefore B_1 (0, 2)$ ，

故选：D。



【点睛】本题考查了正方形的性质，旋转的性质，特殊三角形的性质．关键是根据旋转角证明点 B_1 在 y 轴上.

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，分别以 A, C 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AC$ 长为半径作弧，两弧分别相交于 M, N 两点，作直线 MN ，分别交线段 BC, AC 于点 D, E ，若 $AE = 2\text{cm}$ ， $\triangle ABD$ 的周长为 11cm ，则 $\triangle ABC$ 的周长为 ()



- A. 13 cm B. 14 cm C. 15 cm D. 16 cm

【答案】C

【解析】

【分析】根据作法可知 MN 垂直平分 AC ，根据中垂线的定义和性质找到相等的边，进而可算出三角形 ABC 的周长.

【详解】解：由作法得 MN 垂直平分 AC ，

$$\therefore DA = DC, AE = CE = 2\text{cm},$$

$$\because \triangle ABD \text{ 的周长为 } 11\text{cm},$$

$$\therefore AB + BD + AD = 11,$$

$$\therefore AB + BD + DC = 11, \text{ 即 } AB + BC = 11,$$

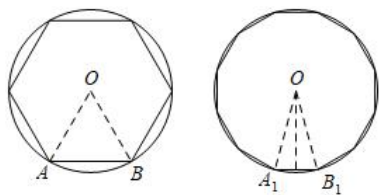
$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周长} = AB + BC + AC = 11 + 2 \times 2 = 15 \text{ (cm)},$$

故选：C.

【点睛】本题考查线段的中垂线的定义以及性质，三角形的周长，能够熟练运用线段中垂线的性质是解决本题的关键.

9. 我国魏晋时期的数学家刘徽首创割圆术：割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣”，即通过圆内接正多边形割圆，从正六边形开始，每次边数成倍增加，依次可得圆内接正

十二边形, 内接正二十四边形, …… 边数越多割得越细, 正多边形的周长就越接近圆的周长. 再根据“圆周率等于圆周长与该圆直径的比”来计算圆周率. 设圆的半径为 R , 图 1 中圆内接正六边形的周长 $l_6 = 6R$, 则 $\pi \approx \frac{l_6}{2R} = 3$. 再利用圆的内接正十二边形来计算圆周率则圆周率约为 ()



- A. $12 \sin 15^\circ$ B. $12 \cos 15^\circ$ C. $12 \sin 30^\circ$ D. $12 \cos 30^\circ$

【答案】A

【解析】

【分析】求出正十二边形的中心角, 利用十二边形周长公式求解即可.

【详解】解: $\because$ 十二边形 $A_1A_2 \cdots A_{12}$ 是正十二边形,

$$\therefore \angle A_6OA_7 = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ,$$

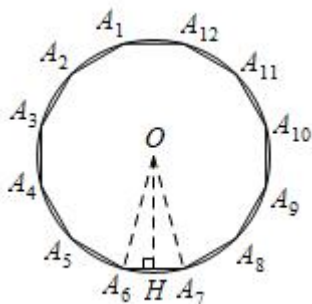
$$\because OH \perp A_6A_7 \text{ 于 } H, \text{ 又 } OA_6 = OA_7,$$

$$\therefore \angle A_6OH = 15^\circ,$$

$$\therefore \text{圆内接正十二边形的周长 } l_{12} = 12 \times 2R \sin 15^\circ = 24R \sin 15^\circ,$$

$$\therefore \pi \approx \frac{l_{12}}{2R} = 12 \sin 15^\circ$$

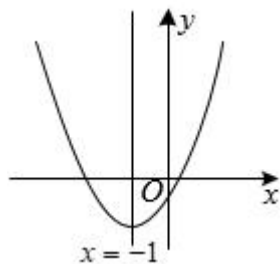
故选: A.



【点睛】本题考查的是正多边形和圆、等腰三角形的性质, 解直角三角形, 求出正十二边形的周长是解题的关键.

10. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的部分图象如图所示, 对称轴为直线 $x = -1$, 有以下结论: ① $abc < 0$;

②若 t 为任意实数, 则有 $a-bt \leq at^2+b$; ③当图象经过点 $(1,3)$ 时, 方程 $cx^2+bx+c-3=0$ 的两根为 x_1 , x_2 ($x_1 < x_2$), 则 $x_1+3x_2=0$, 其中, 正确结论的个数是 ()



A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】利用抛物线开口方向得到 $a > 0$, 利用抛物线的对称轴方程得到 $b = 2a > 0$, 利用抛物线与 y 轴的交点位置得到 $c < 0$, 则可对①进行判断; 利用二次函数当 $x=-1$ 时有最小值可对②进行判断; 由于二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y=3$ 的一个交点为 $(1, 3)$, 利用对称性得到二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=3$ 的另一个交点为 $(-3, 3)$, 从而得到 $x_1=-3$, $x_2=1$, 则可对③进行判断.

【详解】 $\because$ 抛物线开口向上,

$\therefore a > 0$,

$\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x = -1$, 即 $x = -\frac{b}{2a} = -1$,

$\therefore b = 2a > 0$,

$\because$ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴下方,

$\therefore c < 0$,

$\therefore abc < 0$, 所以①正确;

$\because x = -1$ 时, y 有最小值,

$\therefore a - b + c \leq at^2 + bt + c$ (t 为任意实数), 即 $a - bt \leq at^2 + b$, 所以②正确;

$\because$ 图象经过点 $(1,3)$ 时, 代入解析式可得 $c = 3 - 3a$,

方程 $ax^2 + bx + c - 3 = 0$ 可化为 $ax^2 + 2ax - 3a = 0$, 消 a 可得方程的两根为 $x_1 = -3$, $x_2 = 1$,

$\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x = -1$,

$\therefore$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = 3$ 的另一个交点为 $(-3, 3)$,

$x_1 = -3$, $x_2 = 1$ 代入可得 $x_1 + 3x_2 = 0$,

所以③正确.

综上所述, 正确的个数是 3.

故选 D.

【点睛】本题考查了二次函数图象与系数的关系: 二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小. 当 $a > 0$ 时, 抛物线向上开口; 当 $a < 0$ 时, 抛物线向下开口; 一次项系数 b 和二次项系数 a 共同决定对称轴的位置: 当 a 与 b 同号时, 对称轴在 y 轴左; 当 a 与 b 异号时, 对称轴在 y 轴右. 常数项 c 决定抛物线与 y 轴交点: 抛物线与 y 轴交于 $(0, c)$.

二、填空题 (本大题共 8 小题, 第 11-14 每小题 3 分, 第 15-18 每小题 4 分, 共 28 分)

11. 计算: $(-2)^2 - (2022 - \sqrt{3})^0 =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】根据有理数的乘法与零次幂进行计算即可求解.

【详解】解: 原式 $= 4 - 1 = 3$.

故答案为: 3.

【点睛】本题考查了实数的混合运算, 掌握零次幂以及有理数的乘方运算是解题的关键.

12. 分解因式: $x^3y - 9xy =$ _____.

【答案】 $xy(x+3)(x-3)$.

【解析】

【分析】先提取公因式 x , 再利用平方差公式进行分解.

【详解】 $x^3y - 9xy$

$$= xy(x^2 - 9)$$

$$= xy(x+3)(x-3)$$

故答案为: $xy(x+3)(x-3)$.

【点睛】此题主要考查了分解因式, 根据题目选择适合的方法是解题关键.

13. 据新华社 2022 年 1 月 26 日报道, 2021 年全年新增减税降费约 1.1 万亿元, 有力支持国民经济持续稳定恢复用科学计数法表示 1.1 万亿元, 可以表示为 _____ 元.

【答案】 1.1×10^{12}

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数

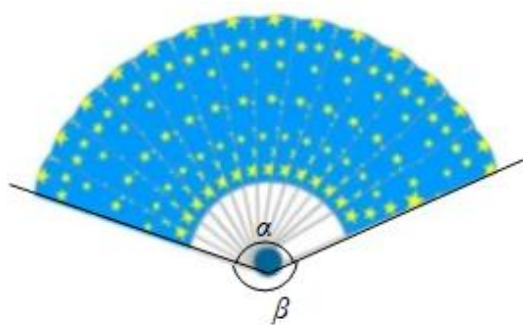
变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时, n 是正整数.

【详解】解: 1.1 万亿 $= 1100000000000 = 1.1 \times 10^{12}$.

故答案为: 1.1×10^{12} .

【点睛】此题主要考查了科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要确定 a 的值以及 n 的值.

14. 如图, 圆中扇子对应的圆心角 α ($\alpha < 180^\circ$) 与剩余圆心角 β 的比值为黄金比时, 扇子会显得更加美观, 若黄金比取 0.6 , 则 $\beta - \alpha$ 的度数是_____.



【答案】 90° 度

【解析】

【分析】根据题意得出 $\alpha = 0.6\beta$, 结合图形得出 $\beta = 225^\circ$, 然后求解即可.

【详解】解: 由题意可得: $\alpha : \beta = 0.6$, 即 $\alpha = 0.6\beta$,

$$\therefore \alpha + \beta = 360^\circ,$$

$$\therefore 0.6\beta + \beta = 360^\circ,$$

解得: $\beta = 225^\circ$,

$$\therefore \alpha = 360^\circ - 225^\circ = 135^\circ,$$

$$\therefore \beta - \alpha = 90^\circ,$$

故答案为: 90° .

【点睛】题目主要考查圆心角的计算及一元一次方程的应用, 理解题意, 得出两个角度的关系是解题关键.

15. 已知关于 x 的方程 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+a}{x(x+1)}$ 的解为负数, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a < 1$ 且 $a \neq 0$

【解析】

【分析】把 a 看作常数, 去分母得到一元一次方程, 求出 x 的表达式, 再根据方程的解是负数及分母不为 0 列不等式并求解即可.

【详解】解：由 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+a}{x(x+1)}$ 得 $x = a - 1$,

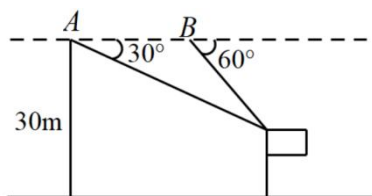
$\therefore$ 关于 x 的方程 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+a}{x(x+1)}$ 的解为负数,

$$\therefore \begin{cases} x < 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a-1 < 0 \\ a-1 \neq 0 \\ a-1 \neq -1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a < 1 \\ a \neq 1 \\ a \neq 0 \end{cases}, \text{ 即 } a < 1 \text{ 且 } a \neq 0,$$

故答案为: $a < 1$ 且 $a \neq 0$.

【点睛】本题考查解分式方程, 根据题意及分式的分母不等于零列出不等式组是解决问题的关键.

16. 某校数学兴趣小组开展无人机测旗杆的活动: 已知无人机的飞行高度为 30m, 当无人机飞行至 A 处时, 观测旗杆顶部的俯角为 30° , 继续飞行 20m 到达 B 处, 测得旗杆顶部的俯角为 60° , 则旗杆的高度约为 _____ m. (参考数据: $\sqrt{3} \approx 1.732$, 结果按四舍五八保留一位小数)



【答案】12.7

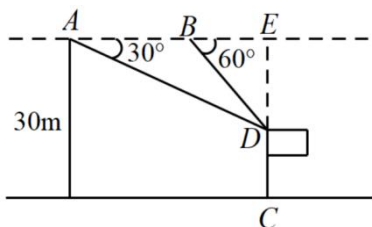
【解析】

【分析】设旗杆底部为点 C , 顶部为点 D , 过点 D 作 $DE \perp AB$, 交直线 AB 于点 E . 设 $DE = x$ m, 在 $Rt\triangle BDE$

中, $\tan 60^\circ = \frac{DE}{BE} = \frac{x}{BE} = \sqrt{3}$, 进而求得 AE , 在 $Rt\triangle ADE$ 中, $\tan 30^\circ = \frac{DE}{AE} = \frac{x}{20 + \frac{\sqrt{3}}{3}x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求

得 x , 根据 $CD = CE - DE$ 可得出答案.

【详解】解: 设旗杆底部为点 C , 顶部为点 D , 延长 CD 交直线 AB 于点 E , 依题意则 $DE \perp AB$,



则 $CE = 30$ m, $AB = 20$ m, $\angle EAD = 30^\circ$, $\angle EBD = 60^\circ$,

设 $DE = x$ m,

在 $Rt\triangle BDE$ 中, $\tan 60^\circ = \frac{DE}{BE} = \frac{x}{BE} = \sqrt{3}$

$$\text{解得 } BE = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

$$\text{则 } AE = AB + BE = (20 + \frac{\sqrt{3}}{3}x) \text{ m},$$

$$\text{在 } Rt\triangle ADE \text{ 中, } \tan 30^\circ = \frac{DE}{AE} = \frac{x}{20 + \frac{\sqrt{3}}{3}x} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{解得 } x = 10\sqrt{3} \approx 17.3 \text{ m},$$

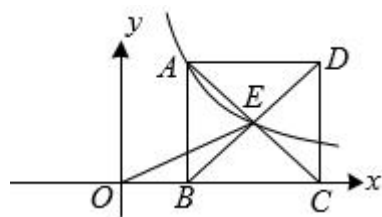
$$\therefore CD = CE - DE = 12.7 \text{ m}.$$

故答案为: 12.7.

【点睛】本题考查解直角三角形的应用-仰角俯角问题, 熟练掌握锐角三角函数的定义是解答本题的关键.

17. 如图, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过矩形 $ABCD$ 对角线的交点 E 和点 A , 点 B 、 C 在 x 轴上, $\triangle OCE$ 的

面积为 6, 则 $k =$ _____.



【答案】8

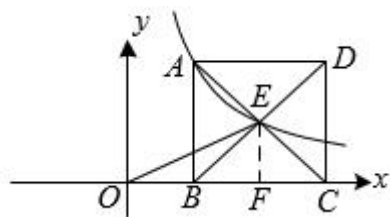
【解析】

【分析】如图作 $EF \perp BC$, 由矩形的性质可知 $EF = \frac{1}{2}AB$, 设 E 点坐标为 (a, b) , 则 A 点坐标为 $(c, 2b)$,

根据点 A , E 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 上, 根据反比例函数系数的几何意义可列出 $ab = k = 2bc$, 根据三角形 OEC

的面积可列出等式, 进而求出 k 的值.

【详解】解: 如图作 $EF \perp BC$, 则 $EF = \frac{1}{2}AB$,



设 E 点坐标为 (a, b) , 则 A 点的纵坐标为 $2b$,

则可设 A 点坐标为 $(c, 2b)$,

$\therefore$ 点 A, E 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 上,

$\therefore ab = k = 2bc$, 解得: $a = 2c$, 故 $BF = FC = 2c - c = c$,

$\therefore OC = 3c$,

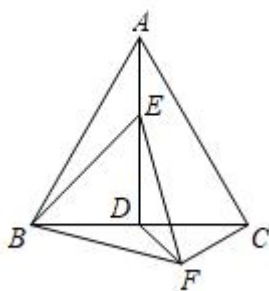
故 $S_{\triangle OEC} = \frac{1}{2} \times OC \times EF = \frac{1}{2} \times 3c \times b = 6$, 解得: $bc = 4$,

$\therefore k = 2bc = 8$,

故答案为: 8.

【点睛】 本题考查矩形的性质, 反比例函数的图形, 反比例函数系数 k 的几何意义, 能够熟练掌握反比例函数系数 k 的几何意义是解决本题的关键.

18. 如图, 等边 $\triangle ABC$ 中, $AB = 10$, 点 E 为高 AD 上的一动点, 以 BE 为边作等边 $\triangle BEF$, 连接 DF, CF , 则 $\angle BCF =$ _____, $FB + FD$ 的最小值为 _____.



【答案】 ①. 30° ②. $5\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 ① $\triangle ABC$ 与 $\triangle BEF$ 为等边三角形, 得到 $BA = BC$, $BE = BF$, $\angle ABE = \angle CBF$, 从而证 $\triangle BAE \cong \triangle BCF (SAS)$, 最后得到答案.

② 过点 D 作定直线 CF 的对称点 G , 连 CG , 证出 $\triangle DCG$ 为等边三角形, CF 为 DG 的中垂线, 得到 $FD = FG$, $FB + FD = FB + FG \geq BG$, 再证 $\triangle BCG$ 为直角三角形, 利用勾股定理求出 $BG = 5\sqrt{3}$, 即可得到答案.

【详解】 解: ① $\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

$\therefore BA = BC$, $AD \perp BC$,

$$\therefore \angle BAE = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ ,$$

$\because \triangle BEF$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle EBF = \angle ABC = 60^\circ , \quad BE = BF ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ABC - \angle EBC = 60^\circ - \angle EBC ,$$

$$\angle CBF = \angle EBF - \angle EBC = 60^\circ - \angle EBC ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CBF ,$$

在 $\triangle BAE$ 和 $\triangle BCF$ 中

$$\begin{cases} BA = BC \\ \angle ABE = \angle CBF \\ BE = BF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle BCF (SAS) ,$$

$$\text{得 } \angle BAE = \angle BCF = 30^\circ ;$$

故答案为: 30° .

② (将军饮马问题)

过点 D 作定直线 CF 的对称点 G , 连 CG ,

$$\therefore \triangle DCG \text{ 为等边三角形, } CF \text{ 为 } DG \text{ 的中垂线, } FD = FG ,$$

$$\therefore FB + FD = FB + FG ,$$

连接 BG ,

$$\therefore FB + FD = FB + FG \geq BG ,$$

$$\text{又 } DG = DC = \frac{1}{2} BC ,$$

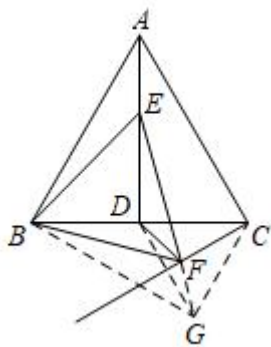
$$\therefore \triangle BCG \text{ 为直角三角形,}$$

$$\therefore BC = 10 , \quad CG = 5 ,$$

$$\therefore BG = 5\sqrt{3} ,$$

$$\therefore FB + FD \text{ 的最小值为 } 5\sqrt{3} .$$

故答案为: $5\sqrt{3}$.



【点睛】此题考查了等边三角形的性质，全等三角形的判定及性质，将军饮马，线段垂直平分线的判定及性质，勾股定理等内容，熟练运用将军饮马是解题的关键，具有较强的综合性.

三、解答题（本大题共 7 小题，共 62 分解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

19. 先化简，再求值： $\left(1 + \frac{2}{a+1}\right) \div \frac{a^2 + 6a + 9}{a+1}$ ，从 -3, -1, 2 中选择合适的 a 的值代入求值.

【答案】 $\frac{1}{a+3}$; $\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】先根据分式混合运算法则进行化简，然后再代入数据进行计算即可.

【详解】解： $\left(1 + \frac{2}{a+1}\right) \div \frac{a^2 + 6a + 9}{a+1}$

$$= \frac{a+3}{a+1} \div \frac{(a+3)^2}{a+1}$$

$$= \frac{a+3}{a+1} \cdot \frac{a+1}{(a+3)^2}$$

$$= \frac{1}{a+3}$$

$$\because a+1 \neq 0 \text{ 且 } (a+3)^2 \neq 0,$$

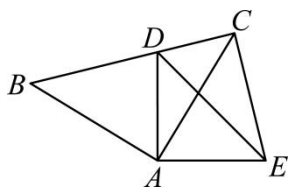
$$\therefore a \neq -1 \text{ 且 } a \neq -3,$$

$$\therefore a = 2,$$

$$\text{当 } a = 2 \text{ 时, 原式} = \frac{1}{2+3} = \frac{1}{5}.$$

【点睛】本题主要考查了分式的化简求值，熟练掌握分式混合运算法则，是解题的关键.

20. 如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ，且点 D 在线段 BC 上，连 CE .



- (1) 求证: $\triangle ABD \cong \triangle ACE$;
 (2) 若 $\angle EAC = 60^\circ$, 求 $\angle CED$ 的度数.

【答案】(1) 见解析 (2) 30°

【解析】

【分析】(1) 证出 $\angle BAD = \angle CAE$, 由 SAS 证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ 即可;

(2) 先由全等三角形的性质得到 $\angle ACE = \angle ABD$, 再由 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形, 得到 $\angle ACE = \angle ABD = 45^\circ$ 且 $\angle AED = 45^\circ$, 利用三角形内角和定理求出 $\angle AEC$ 的度数, 即可求出 $\angle CED$ 的度数.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC$, 即 $\angle BAD = \angle CAE$.

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AD = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS);

【小问 2 详解】

解: 由 (1) $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ 得 $\angle ACE = \angle ABD$,

又 $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形,

$\therefore \angle ACE = \angle ABD = 45^\circ$ 且 $\angle AED = 45^\circ$,

在 $\triangle ACE$ 中 $\because \angle EAC = 60^\circ$ 且 $\angle ACE = 45^\circ$

$\therefore \angle AEC = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$,

$\therefore \angle CED = \angle AEC - \angle AED = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$.

【点睛】本题主要考查了全等三角形的性质与判定, 等腰三角形的性质, 三角形内角和定理, 熟知全等三角形的性质与判定条件是解题的关键.

21. 某中学为了解学生每学期诵读经典的情况, 在全校范围内随机抽查了部分学生上一学期阅读量, 学校将阅读量分成优秀、良好、较好、一般四个等级, 绘制如下统计表:

等级	一般	较好	良好	优秀
----	----	----	----	----

阅读量/本	3	4	5	6
频数	12	a	14	4
频率	0.24	0.40	b	c

请根据统计表中提供的信息, 解答下列问题:

- (1) 本次调查一共随机抽取了_____名学生; 表中 $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.
- (2) 求所抽查学生阅读量的众数和平均数.
- (3) 样本数据中优秀等级学生有 4 人, 其中仅有 1 名男生. 现从中任选派 2 名学生去参加读书分享会, 请用树状图法或列表法求所选 2 名同学中有男生的概率

【答案】 (1) 50 $a = 20$, $b = 0.28$, $c = 0.08$

(2) 众数为 4, 平均数为 4.2

(3) $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 对于 (1), 先求出总数, 根据总数 $\times$ 频率求出 a , 再根据频数 $\div$ 总数求出 b , 最后用 1 分别减去三组数据的频率求出 c 即可;

对于 (2), 根据众数和平均数的定义解答即可;

对于 (3), 列出所有可能出现的结果, 再根据概率公式计算即可.

【小问 1 详解】

$$12 \div 0.24 = 50, \quad a = 0.40 \times 50 = 20, \quad b = \frac{14}{50} = 0.28, \quad c = 1 - 0.24 - 0.40 - 0.28 = 0.08;$$

故答案为: 50 20, 0.28, 0.08;

【小问 2 详解】

$\because$ 阅读量为 4 本的同学最多, 有 20 人,

$\therefore$ 众数为 4;

$$\text{平均数为 } \frac{1}{50} \times (3 \times 12 + 4 \times 20 + 5 \times 14 + 6 \times 4) = 4.2;$$

【小问 3 详解】

记男生为 A , 女生为 B_1, B_2, B_3 , 列表如下:

	A	B_1	B_2	B_3
A		AB_1	AB_2	AB_3

B_1	B_1A		B_1B_2	B_1B_3
B_2	B_2A	B_2B_1		B_2B_3
B_3	B_3A	B_3B_1	B_3B_2	

∴由表可知，在所选 2 名同学中共有 12 种选法，其中必有男生的选法有 6 种，

$$\therefore \text{所求概率为: } P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

【点睛】本题主要考查了频数分布表，求众数和平均数，列表（树状图）求概率等，掌握定义和计算公式是解题的关键.

22. 阅读材料，解答问题:

材料 1

为了解方程 $(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$ ，如果我们把 x^2 看作一个整体，然后设 $y = x^2$ ，则原方程可化为

$y^2 - 13y + 36 = 0$ ，经过运算，原方程的解为 $x_{1,2} = \pm 2$ ， $x_{3,4} = \pm 3$ 。我们把以上这种解决问题的方法通常叫做换元法.

材料 2

已知实数 m, n 满足 $m^2 - m - 1 = 0$ ， $n^2 - n - 1 = 0$ ，且 $m \neq n$ ，显然 m, n 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个不相等的实数根，由韦达定理可知 $m + n = 1$ ， $mn = -1$ 。

根据上述材料，解决以下问题:

(1) 直接应用:

方程 $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ 的解为_____;

(2) 间接应用:

已知实数 a, b 满足: $2a^4 - 7a^2 + 1 = 0$ ， $2b^4 - 7b^2 + 1 = 0$ 且 $a \neq b$ ，求 $a^4 + b^4$ 的值;

(3) 拓展应用:

已知实数 x, y 满足: $\frac{1}{m^4} + \frac{1}{m^2} = 7$ ， $n^2 - n = 7$ 且 $n > 0$ ，求 $\frac{1}{m^4} + n^2$ 的值.

【答案】(1) $x_1 = \sqrt{2}$ ， $x_2 = -\sqrt{2}$ ， $x_3 = \sqrt{3}$ ， $x_4 = -\sqrt{3}$

(2) $\frac{45}{4}$ 或 $\frac{45 \pm 7\sqrt{41}}{4}$

(3) 15

【解析】

【分析】(1) 利用换元法降次解决问题;

(2) 模仿例题解决问题即可;

(3) 令 $\frac{1}{m^2}=a$, $-n=b$, 则 $a^2+a-7=0$, $b^2+b=0$, 再模仿例题解决问题.

【小问 1 详解】

解: 令 $y=x^2$, 则有 $y^2-5y+6=0$,

$$\therefore (y-2)(y-3)=0,$$

$$\therefore y_1=2, y_2=3,$$

$$\therefore x^2=2 \text{ 或 } 3,$$

$$\therefore x_1=\sqrt{2}, x_2=-\sqrt{2}, x_3=\sqrt{3}, x_4=-\sqrt{3},$$

故答案为: $x_1=\sqrt{2}, x_2=-\sqrt{2}, x_3=\sqrt{3}, x_4=-\sqrt{3}$;

【小问 2 详解】

解: $\because a \neq b$,

$$\therefore a^2 \neq b^2 \text{ 或 } a^2 = b^2 (a = -b)$$

①当 $a^2 \neq b^2$ 时, 令 $a^2 = m$, $b^2 = n$,

$$\therefore m \neq n \text{ 则 } 2m^2 - 7m + 1 = 0, 2n^2 - 7n + 1 = 0,$$

 $\therefore m, n$ 是方程 $2x^2 - 7x + 1 = 0$ 的两个不相等的实数根,

$$\therefore \begin{cases} m+n=\frac{7}{2} \\ mn=\frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\text{此时 } a^4 + b^4 = m^2 + n^2 = (m+n)^2 - 2mn = \frac{45}{4};$$

$$\text{②当 } a^2 = b^2 (a = -b) \text{ 时, } a^2 = b^2 = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{4},$$

$$\text{此时 } a^4 + b^4 = 2a^4 = 2(a^2)^2 = 2\left(\frac{7 \pm \sqrt{41}}{4}\right)^2 = \frac{45 \pm 7\sqrt{41}}{4};$$

综上: $a^4 + b^4 = \frac{45}{4}$ 或 $\frac{45 \pm 7\sqrt{41}}{4}$

【小问 3 详解】

解: 令 $\frac{1}{m^2} = a$, $-n = b$, 则 $a^2 + a - 7 = 0$, $b^2 + b - 7 = 0$,

$\therefore n > 0$,

$\therefore \frac{1}{m^2} \neq -n$ 即 $a \neq b$,

$\therefore a, b$ 是方程 $x^2 + x - 7 = 0$ 的两个不相等的实数根,

$\therefore \begin{cases} a+b=-1 \\ ab=-7 \end{cases}$,

故 $\frac{1}{m^4} + n^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 15$.

【点睛】 本题考查了根与系数的关系, 幂的乘方与积的乘方, 换元法, 解一元二次方程等知识, 解题的关键是理解题意, 学会模仿例题解决问题.

23. 某校为配合疫情防控需要, 每星期组织学生进行核酸抽样检测; 防疫部门为了解学生错峰进入操场进行核酸检测情况, 调查了某天上午学生进入操场的累计人数 y (单位: 人) 与时间 x (单位: 分钟) 的变化情况, 发现其变化规律符合函数关系式: $y = \begin{cases} ax^2 + bx + c (0 \leq x \leq 8) \\ 640, (8 < x \leq 10) \end{cases}$, 数据如下表.

时间 x (分钟)	0	1	2	3	...	8	$8 < x \leq 10$
累计人数 y (人)	0	150	280	390	...	640	640

(1) 求 a, b, c 的值;

(2) 如果学生一进入操场就开始排队进行核酸检测, 检测点有 4 个, 每个检测点每分钟检测 5 人, 求排队人数的最大值 (排队人数-累计人数-已检测人数);

(3) 在 (2) 的条件下, 全部学生都完成核酸检测需要多少时间? 如果要在不超过 20 分钟让全部学生完成核酸检测, 从一开始就应该至少增加几个检测点?

【答案】 (1) $a = -10$, $b = 160$, $c = 0$

(2) 490 人 (3) 从一开始应该至少增加 3 个检测点

【解析】

【分析】(1) 根据题意列方程, 待定系数法求解析式即可求解;

(2) 根据排队人数=累计人数-已检测人数, 首先找到排队人数和时间的关系, 再根据二次函数和一次函数的性质, 找到排队人数最多时有多少人; 8 分钟后入校园人数不再增加, 检测完所有排队同学即完成所有同学体温检测;

(3) 设从一开始就应该增加 m 个检测点, 根据不等关系“要在 20 分钟内让全部学生完成体温检测”, 建立关于 m 的一元一次不等式, 结合 m 为整数可得到结果.

【小问 1 详解】

(1) 将 $(0,0)$, $(1,150)$, $(2,280)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$,

$$\text{得} \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 150 \\ 4a + 2b + c = 280 \end{cases},$$

解之得 $a = -10$, $b = 160$, $c = 0$;

【小问 2 详解】

$$\text{设排队人数为 } w, \text{ 由 (1) 知 } y = \begin{cases} -10x^2 + 160x & (0 \leq x \leq 8) \\ 640 & (8 < x \leq 10) \end{cases},$$

由题意可知, $w = y - 20x$,

$$\text{当 } 0 \leq x \leq 8 \text{ 时, } y = -10x^2 + 160x, \quad w = -10x^2 + 160x - 20x = -10(x-7)^2 + 490$$

$\therefore x = 7$ 时, 排队人数 w 的最大值是 490 人,

$$\text{当 } 8 < x \leq 10 \text{ 时, } y = 640, \quad w = 640 - 20x,$$

$\therefore w$ 随自变量 x 的增大而减小,

$$\therefore 440 \leq w < 480,$$

由 $480 < 490$ 得, 排队人数最大值是 490 人;

【小问 3 详解】

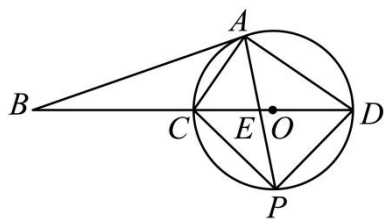
在 (2) 的条件下, 全部学生完成核酸检测时间 $= 640 \div (4 \times 5) = 32$ (分钟)

设从一开始增加 n 个检测点, 则 $\frac{640}{(4+n) \times 5} \leq 20$, 解得 $n \geq 2.4$, n 为整数,

$\therefore$ 从一开始应该至少增加 3 个检测点.

【点睛】本题是二次函数综合题, 考查了二次函数的应用, 二次函数的性质, 一次函数的性质, 一元一次不等式的应用, 理解题意, 求出 y 与 x 之间的函数关系式是本题的关键

24. 如图 CD 是 $\odot O$ 直径, A 是 $\odot O$ 上异于 C, D 的一点, 点 B 是 DC 延长线上一点, 连接 AB, AC, AD , 且 $\angle BAC = \angle ADB$.



- (1) 求证: 直线 AB 是 $\odot O$ 的切线;
 (2) 若 $BC = 2OC$, 求 $\tan \angle ADB$ 的值;
 (3) 在 (2) 的条件下, 作 $\angle CAD$ 的平分线 AP 交 $\odot O$ 于 P , 交 CD 于 E , 连接 PC, PD , 若 $AB = 2\sqrt{6}$, 求 $AE \cdot AP$ 的值.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 如图所示, 连接 OA , 根据直径所对的圆周角是直角得到 $\angle OAC + \angle OAD = 90^\circ$, 再证明 $\angle OAD = \angle BAC$ 即可证明结论;

(2) 先证明 $\triangle BCA \sim \triangle BAD$, 得到 $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BA}$, 令半径 $OC = OA = r$, 则 $BC = 2r$, $OB = 3r$, 利用勾股定理求出 $AB = 2\sqrt{2}r$, 解直角三角形即可答案;

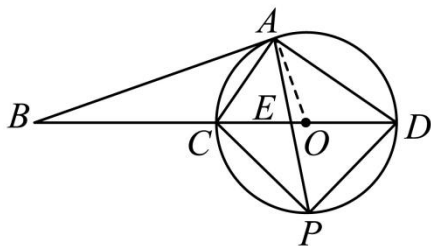
(3) 先求出 $CD = 2\sqrt{3}$, 在 $\text{Rt}\triangle CAD$ 中, $\frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AC^2 + AD^2 = CD^2$, 解得 $AC = 2$, $AD = 2\sqrt{2}$, 证明 $\triangle CAP \sim \triangle EAD$, 得到 $\frac{AC}{AE} = \frac{AP}{AD}$, 则 $AE \cdot AP = AC \cdot AD = 4\sqrt{2}$.

【小问 1 详解】

解: 如图所示, 连接 OA ,

$\because CD$ 是 $\odot O$ 直径,

$\therefore \angle CAD = 90^\circ$,



$$\therefore \angle OAC + \angle OAD = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because OA = OD,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA,$$

$$\because \angle BAC = \angle ADB,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle OAC = 90^\circ, \text{ 即 } \angle BAO = 90^\circ,$$

$$\therefore AB \perp OA,$$

$$\text{又} \because OA \text{ 为半径},$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because \angle BAC = \angle ADB, \quad \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle BCA \sim \triangle BAD,$$

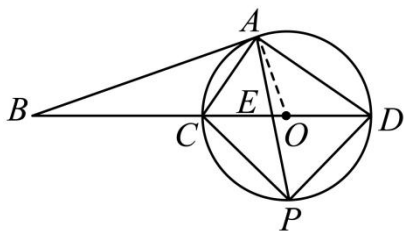
$$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BA},$$

$$\text{由 } BC = 2OC \text{ 知, 令半径 } OC = OA = r, \text{ 则 } BC = 2r, \quad OB = 3r,$$

$$\text{在 } Rt\triangle BAO \text{ 中, } AB = \sqrt{OB^2 - OA^2} = 2\sqrt{2}r,$$

$$\text{在 } Rt\triangle CAD \text{ 中, } \tan \angle ADC = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BA} = \frac{2r}{2\sqrt{2}r} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{即 } \tan \angle ADB = \frac{\sqrt{2}}{2};$$



【小问 3 详解】

解: 在 (2) 的条件下, $AB = 2\sqrt{2}r = 2\sqrt{6}$,

$$\therefore r = \sqrt{3},$$

$$\therefore CD = 2\sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle CAD$ 中, $\frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AC^2 + AD^2 = CD^2$,

解得 $AC = 2$, $AD = 2\sqrt{2}$,

$\therefore AP$ 平分 $\angle CAD$,

$$\therefore \angle CAP = \angle EAD,$$

又 $\therefore \angle APC = \angle ADE$,

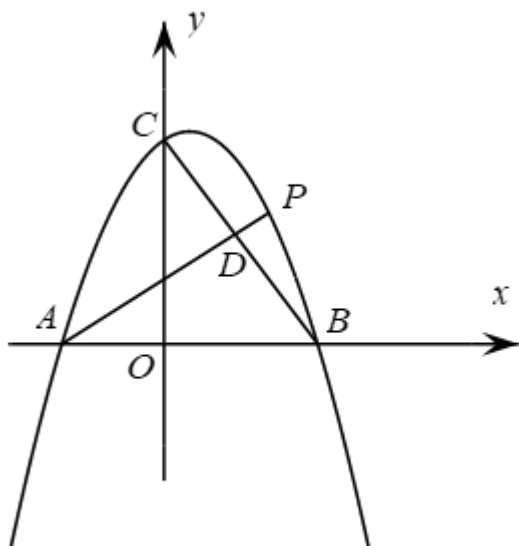
$$\therefore \triangle CAP \sim \triangle EAD,$$

$$\therefore \frac{AC}{AE} = \frac{AP}{AD},$$

$$\therefore AE \cdot AP = AC \cdot AD = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

【点睛】本题主要考查了圆切线的判定, 直径所对的圆周角是直角, 相似三角形的性质与判定, 解直角三角形, 勾股定理, 等腰三角形的性质等等, 熟知相关知识是解题的关键.

25. 如图, 抛物线 $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4$ 与坐标轴分别交于 A , B , C 三点, P 是第一象限内抛物线上的一点且横坐标为 m .



(1) A, B, C 三点的坐标为 _____, _____, _____;

(2) 连接 AP , 交线段 BC 于点 D ,

①当 CP 与 x 轴平行时, 求 $\frac{PD}{DA}$ 的值;

②当 CP 与 x 轴不平行时, 求 $\frac{PD}{DA}$ 的最大值;

(3) 连接 CP , 是否存在点 P , 使得 $\angle BCO + 2\angle PCB = 90^\circ$, 若存在, 求 m 的值, 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $A(-2, 0); B(3, 0); C(0, 4)$

(2) ① $\frac{1}{5}$; ② $\frac{9}{40}$

(3) 存在点 P , $m = \frac{7}{4}$

【解析】

【分析】 (1) 令 $x=0$, 则 $y=4$, 令 $y=0$, 则 $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4 = 0$, 所以 $x=-2$ 或 $x=3$, 由此可得结论;

(2)①由题意可知, $P(1, 4)$, 所以 $CP=1$, $AB=5$, 由平行线分线段成比例可知, $\frac{PD}{DA} = \frac{CP}{AB} = \frac{1}{5}$.

②过点 P 作 $PQ \parallel AB$ 交 BC 于点 Q , 所以直线 BC 的解析式为: $y = -\frac{4}{3}x + 4$. 设点 P 的横坐标为 m , 则 $P(m, -\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + 4)$, $Q(\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m, -\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + 4)$. 所以 $PQ = m - (\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m) = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m$, 因为 $PQ \parallel AB$,

所以 $\frac{PD}{DA} = \frac{PQ}{AB} = \frac{-\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m}{5} = -\frac{1}{10}(m - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{40}$, 由二次函数的性质可得结论;

(3) 假设存在点 P 使得 $\angle BCO + 2\angle BCP = 90^\circ$, 即 $0 < m < 3$. 过点 C 作 $CF \parallel x$ 轴交抛物线于点 F , 由 $\angle BCO + 2\angle PCB = 90^\circ$, 可知 CP 平分 $\angle BCF$, 延长 CP 交 x 轴于点 M , 易证 $\triangle CBM$ 为等腰三角形, 所以 $M(8, 0)$, 所以直线 CM 的解析式为: $y = -\frac{1}{2}x + 4$, 令 $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4 = -\frac{1}{2}x + 4$, 可得结论.

【小问 1 详解】

解: 令 $x=0$, 则 $y=4$,

$\therefore C(0, 4)$;

令 $y=0$, 则 $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4 = 0$,

$\therefore x=-2$ 或 $x=3$,

$\therefore A(-2, 0), B(3, 0)$.

故答案为: $(-2, 0); (3, 0); (0, 4)$.

【小问 2 详解】

解: ① $\because CP \parallel x$ 轴, $C(0,4)$,

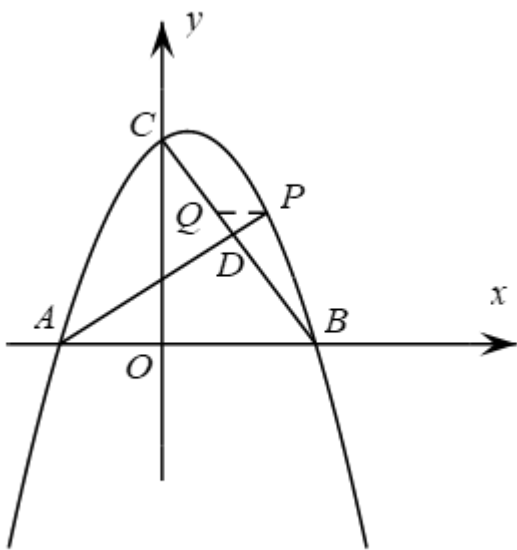
$$\therefore P(1,4), \quad CP=1, \quad AB=5$$

又 $\because CP \parallel x$ 轴,

$$\therefore \triangle CPD \sim \triangle BAD$$

$$\therefore \frac{PD}{DA} = \frac{CP}{AB} = \frac{1}{5};$$

② 过 P 作 $PQ \parallel AB$ 交 BC 于点 Q ,



设直线 BC 的解析式为 $y = k_1x + b_1$,

把 $B(3, 0)$, $C(0, 4)$ 代入, 得

$$\begin{cases} 3k_1 + b_1 = 0 \\ b_1 = 4 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k_1 = -\frac{4}{3} \\ b_1 = 4 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = -\frac{4}{3}x + 4$,

设 $P\left(m, -\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + 4\right)$, 则 $Q\left(\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m, -\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + 4\right)$,

$$\therefore PQ = m - \left(\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m\right) = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m,$$

$$\because PQ \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle QPD \sim \triangle BAD$$

$$\therefore \frac{PD}{DA} = \frac{PQ}{AB} = \frac{-\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m}{5} = -\frac{1}{10}\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{40},$$

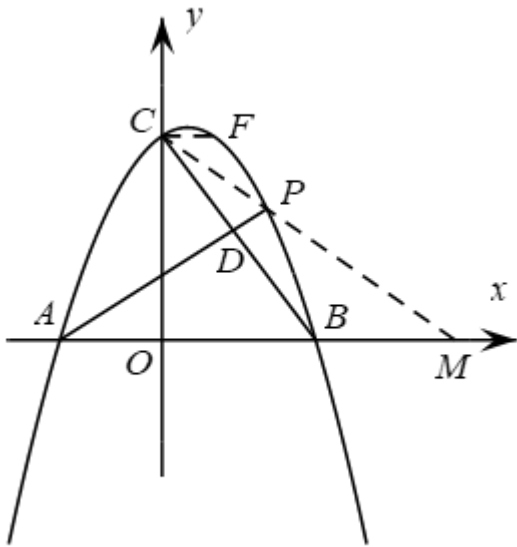
$$\therefore \text{当 } m = \frac{3}{2} \text{ 时, } \frac{PD}{DA} \text{ 取最大值 } \frac{9}{40};$$

【小问 3 详解】

解: 假设存在点 P 使得 $\angle BCO + 2\angle BCP = 90^\circ$, 即 $0 < m < 3$,

过 C 作 $CF \parallel x$ 轴, 连接 CP , 延长 CP 交 x 轴于点 M ,

$$\therefore \angle FCP = \angle BMC,$$



$$\because \angle BCO + 2\angle BCP = 90^\circ,$$

$$\therefore CP \text{ 平分 } \angle BCF,$$

$$\therefore \angle BCP = \angle FCP,$$

$$\therefore \angle BCP = \angle BMC,$$

$$\therefore BC = BM,$$

$$\therefore \triangle CBM \text{ 为等腰三角形},$$

$$\because BC = 5,$$

$$\therefore BM = 5, \quad OM = 8, \quad M(8, 0),$$

设直线 CM 解析式为 $y = kx + b$,

把 $C(0, 4)$, $M(8, 0)$ 代入, 得

$$\begin{cases} 8k + b = 0 \\ b = 4 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 4 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 CM 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 4$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 4 \\ y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4 \end{cases},$$

解得 $x = \frac{7}{4}$ 或 $x = 0$ (舍),

$\therefore$ 存在点 P 满足题意, 即 $m = \frac{7}{4}$.

【点睛】 此题是二次函数综合题, 主要考查了待定系数法, 平行线分线段成比例, 角度的存在性等相关内容, 解本题的关键是求抛物线解析式, 确定点 P 的坐标.

