

随州市 2022 年初中毕业升学考试数学试题

一、选择题

1. 2022 的倒数是 ()

- A. 2022 B. -2022 C. $\frac{1}{2022}$ D. $-\frac{1}{2022}$

【答案】C

【解析】

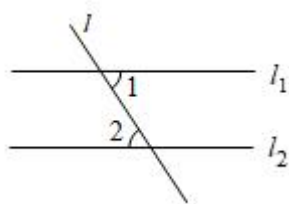
【分析】根据倒数的定义作答即可.

【详解】2022 的倒数是 $\frac{1}{2022}$,

故选: C.

【点睛】本题考查了倒数的概念, 即乘积为 1 的两个数互为倒数, 牢记倒数的概念是解题的关键.

2. 如图, 直线 $l_1 \parallel l_2$, 直线 l 与 l_1, l_2 相交, 若图中 $\angle 1 = 60^\circ$ 则 $\angle 2$ 为 ()



- A. 30° B. 40° C. 50° D. 60°

【答案】D

【解析】

【分析】根据平行线的性质, 两直线平行内错角相等即可得出答案.

【详解】 $\because l_1 \parallel l_2$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 60^\circ$,

故选: D.

【点睛】本题考查平行线的性质, 两直线平行, 内错角相等; 两直线平行, 同位角相等; 两直线平行, 同旁内角互补; 熟记平行线的性质是解题的关键.

3. 小明同学连续 5 次测验的成绩分别为: 97, 97, 99, 101, 106 (单位: 分), 则这组数据的众数和平均数分别为 ()

- A. 97 和 99 B. 97 和 100 C. 99 和 100 D. 97 和

101

【答案】B

【解析】

【分析】根据众数与平均数的概念及计算公式求解即可

【详解】解：小明同学连续5次测验的成绩分别为：97，97，99，101，106（单位：分），

∴这组成绩的众数是97；平均数是 $\frac{1}{5} \times (97 + 97 + 99 + 101 + 106) = 100$ ，

故选：B.

【点睛】本题考查统计基础知识，涉及众数及平均数的概念与计算公式，熟练掌握相关定义及计算公式是解决问题的关键.

4. 如图是一个放在水平桌面上的半球体，该几何体的三视图中完全相同的是（ ）



A. 主视图和左视图

B. 主视图和俯视图

C. 左视图和俯视图

D. 三个视图均相同

【答案】A

【解析】

【分析】根据三视图的形成，从正面、左面和上面三个方向看立体图形得到的平面图形，注意所有的看到的或看不到的棱都应表现在三视图中，看得见的用实线，看不见的用虚线，虚实重合用实线.

【详解】解：从正面和左面看，得到的平面图形均是半圆，而从上面看是一个圆，因此该几何体主视图与左视图一致，

故选：A.

【点睛】本题考查了三视图的知识，准确把握从正面、左面和上面三个方向看立体图形得到的平面图形是解决问题的关键.

5. 我国元朝朱世杰所著的《算学启蒙》中记载：“良马日行二百四十里，驽马日行一百五十里. 驽马先行一十二日，问良马几何追及之.”意思是：“跑得快的马每天走240里，跑得慢的马每天走150里，慢马先走12天，快马几天可以追上慢马？”若设快马 x 天可以追上慢马，则可列方程为（ ）

A. $150(12 + x) = 240x$

B. $240(12 + x) = 150x$

C. $150(x - 12) = 240x$

D. $240(x - 12) = 150x$

【答案】A

【解析】

【分析】直接根据相遇时所走路程相等列出一元一次方程即可得出答案.

【详解】设快马 x 天可以追上慢马，由题意可知： $150(12+x)=240x$.

故选：A.

【点睛】本题考查了由实际问题抽象出一元一次方程，解题的关键是准确找出等量关系，正确列出一元一次方程.

6. 2022 年 6 月 5 日 10 时 44 分 07 秒，神舟 14 号飞船成功发射，将陈冬、刘洋、蔡旭哲三位宇航员送入了中国空间站. 已知中国空间站绕地球运行的速度约为 $7.7 \times 10^3 \text{ m/s}$ ，则中国空间站绕地球运行 $2 \times 10^2 \text{ s}$ 走过的路程 (m) 用科学记数法可表示为 ()

A. 15.4×10^5 B. 1.54×10^6 C. 15.4×10^6 D.

1.54×10^7

【答案】B

【解析】

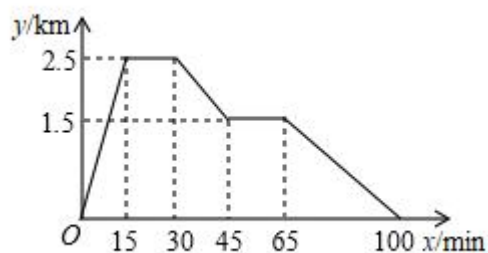
【分析】先求出路程，再用科学记数法表示为 $a \times 10^n$ 的形式.

【详解】解：路程 $= 7.7 \times 10^3 \times 2 \times 10^2 = 15.4 \times 10^5 = 1.54 \times 10^6 \text{ m}$.

故选：B.

【点睛】此题考查科学记数法的表示方法，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数.

7. 已知张强家、体育场、文具店在同一直线上. 下面的图象反映的过程是：张强从家跑步去体育场，在那里锻炼了一阵后又走到文具店去买笔，然后散步走回家. 图中 x 表示时间， y 表示张强离家的距离. 则下列结论不正确的是 ()



- A. 张强从家到体育场用了 15min B. 体育场离文具店 1.5km
C. 张强在文具店停留了 20min D. 张强从文具店回家用了 35min

【答案】B

【解析】

【分析】利用图象信息解决问题即可.

【详解】解：由图可知：

- A. 张强从家到体育场用了 15min，正确，不符合题意；
B. 体育场离文具店的距离为： $2.5 - 1.5 = 1 \text{ km}$ ，故选项错误，符合题意；

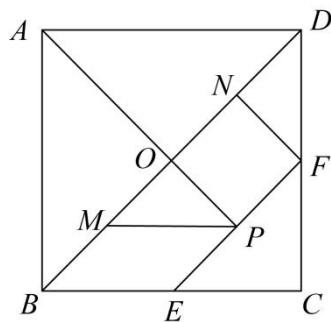
C. 张强在文具店停留了： $65 - 45 = 20 \text{ min}$ ，正确，不符合题意；

D. 张强从文具店回家用了 $100 - 65 = 35 \text{ min}$ ，正确，符合题意，

故选：B.

【点睛】本题考查函数的应用，解题的关键是读懂图象信息，灵活运用所学知识解决问题.

8. 七巧板是一种古老的中国传统智力玩具，如图，在正方形纸板 $ABCD$ 中， BD 为对角线， E, F 分别为 BC, CD 的中点， $AP \perp EF$ 分别交 BD, EF 于 O, P 两点， M, N 分别为 BO, DC 的中点，连接 AP, NF ，沿图中实线剪开即可得到一副七巧板，则在剪开之前，关于该图形，下列说法：①图中的三角形都是等腰直角三角形；②四边形 $MPEB$ 是菱形；③四边形 $PFDM$ 的面积占正方形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{4}$. 正确的有 ()



A. 只有①

B. ①②

C. ①③

D. ②③

【答案】C

【解析】

【分析】先根据正方形的性质和中位线定理证明图中所有三角形是等腰直角三角形，再证明四边形 $MPEB$ 是平行四边形但不是菱形，最后再证明四边形 $PFDM$ 的面积占正方形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{4}$ 即可.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle ABO = \angle ADB = \angle CBD = \angle BDC = 45^\circ, \quad \angle BAD = \angle BCD = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABD, \triangle BCD$ 是等腰直角三角形，

$\because AP \perp EF$,

$$\therefore \angle APF = \angle APE = 90^\circ,$$

$\because E, F$ 分别为 BC, CD 的中点，

$$\therefore EF \text{ 是 } \triangle BCD \text{ 的中位线, } CE = \frac{1}{2} BC, \quad CF = \frac{1}{2} CD,$$

$$\therefore CE = CF,$$

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle CEF$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore EF \parallel BD, EF = \frac{1}{2} BD,$$

$$\therefore \angle APE = \angle AOB = 90^\circ, \angle APF = \angle AOD = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABO$ 、 $\triangle ADO$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AO = BO, AO = DO,$$

$$\therefore BO = DO,$$

$\therefore M, N$ 分别为 BO, DO 的中点,

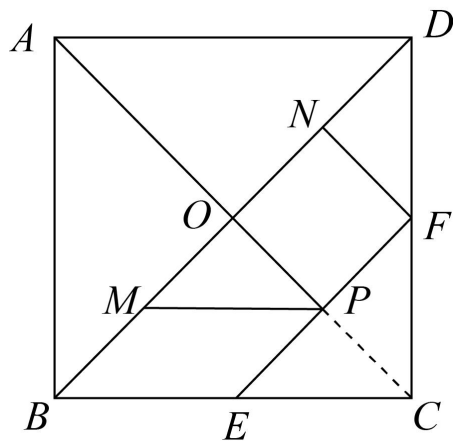
$$\therefore OM = BM = \frac{1}{2} BO, ON = ND = \frac{1}{2} DO,$$

$$\therefore OM = BM = ON = ND,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle DAO = 45^\circ,$$

$\therefore$ 由正方形是轴对称图形, 则 A, P, C 三点共线, $PE = PF = \frac{1}{2} EF = ON = BM = OM$,

连接 PC , 如图,



$\therefore NF$ 是 $\triangle CDO$ 的中位线,

$$\therefore NF \parallel AC, NF = \frac{1}{2} OC = \frac{1}{2} OD = ON = ND,$$

$$\therefore \angle ONF = 180^\circ - \angle COD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NOP = \angle OPF = \angle ONF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $FNOP$ 是矩形,

$\therefore$ 四边形 $FNOP$ 是正方形,

$$\therefore NF = ON = ND,$$

$\therefore \triangle DNF$ 是等腰直角三角形,

$\therefore$ 图中的三角形都是等腰直角三角形;

故①正确,

$$\therefore PE \parallel BM, PE = BM,$$

$\therefore$ 四边形 $MPEB$ 是平行四边形,

$$\because BE = \frac{1}{2} BC, BM = \frac{1}{2} OB,$$

在 $Rt\triangle OBC$ 中, $BC > OB$,

$$\therefore BE \neq BM,$$

$\therefore$ 四边形 $MPEB$ 不是菱形;

故②错误,

$$\because PC = PO = PF = OM, \angle MOP = \angle CPF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle MOP \cong \triangle CPF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}PFDM} = S_{\text{四边形}PFDO} + S_{\triangle MOP}$$

$$= S_{\text{四边形}PFDO} + S_{\triangle CPF}$$

$$= S_{\triangle COD}$$

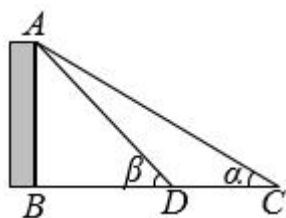
$$= \frac{1}{4} S_{\text{正方形}ABCD},$$

故③正确,

故选: C

【点睛】此题考查了七巧板, 正方形的判定和性质, 平行四边形的判定和性质, 三角形的中位线定理、三角形全等的判定和性质、等腰直角三角形的判定和性质等知识, 正确的识别图形是解题的关键.

9. 如图, 已知点 B, D, C 在同一直线的水平, 在点 C 处测得建筑物 AB 的顶端 A 的仰角为 α , 在点 D 处测得建筑物 AB 的顶端 A 的仰角为 β , $CD = a$, 则建筑物 AB 的高度为 ()



A. $\frac{a}{\tan \alpha - \tan \beta}$

B. $\frac{a}{\tan \beta - \tan \alpha}$

C. $\frac{a \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}$

D. $\frac{a \tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha}$

【答案】D

【解析】

【分析】设 $AB = x$, 利用正切值表示出 BC 和 BD 的长, $CD = BC - BD$, 从而列出等式, 解得 x 即可.

【详解】设 $AB = x$, 由题意知, $\angle ACB = \alpha, \angle ADB = \beta$,

$$\therefore BD = \frac{x}{\tan \beta}, \quad BC = \frac{x}{\tan \alpha},$$

$$\therefore CD = BC - BD,$$

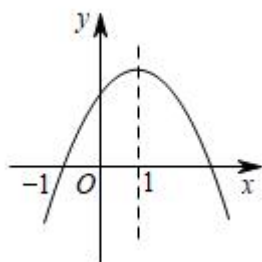
$$\therefore \frac{x}{\tan \alpha} - \frac{x}{\tan \beta} = a,$$

$$\therefore x = \frac{a \tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha}, \quad \text{即 } AB = \frac{a \tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha},$$

故选：D.

【点睛】本题考查了解直角三角形，熟记锐角三角函数的定义是解题的关键.

10. 如图，已知开口向下的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $(-1, 0)$ 对称轴为直线 $x = 1$. 则下列结论：① $abc > 0$ ；② $2a + b = 0$ ；③ 函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的最大值为 $-4a$ ；④ 若关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = a + 1$ 无实数根，则 $-\frac{1}{5} < a < 0$. 正确的有 ()



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】由图象可知，图像开口向下， $a < 0$ ，对称轴为 $x = 1$ ，故 $-\frac{b}{2a} = 1$ ，故 $b > 0$ ，且 $b = -2a$ ，则 $2a + b = 0$ 图象与 y 轴的交点为正半轴，则 $c > 0$ ，由此可知 $abc < 0$ ，故①错误，由图象可知当 $x = 1$ 时，函数取最大值，将 $x = 1$ ，代入 $y = ax^2 + bx + c$ ，中得： $y = a + b + c$ ，计算出函数图象与 x 轴的另一交点为 $(3, 0)$ 设函数解析式为： $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ ，将交点坐标代入得化简得： $y = ax^2 - 2ax - 3a$ ，将 $x = 1$ ，代入可得： $y = a - 2a - 3a = -4a$ ，故函数的最大值为 $-4a$ ，、 $ax^2 + bx + c = a + 1$ 变形为： $ax^2 + bx + c - a - 1 = 0$ 要使方程无实数根，则 $b^2 - 4a(c - a - 1) < 0$ ，将 $c = -3a$ ， $b = -2a$ ，代入得： $20a^2 + 4a < 0$ ，因为 $a < 0$ ，则 $20a + 4 > 0$ ，则 $a > -\frac{1}{5}$ ，综上所述 $-\frac{1}{5} < a < 0$ ，结合以上结论可判断正确的项.

【详解】解：由图象可知，图像开口向下， $a < 0$ ，对称轴为 $x = 1$ ，故 $-\frac{b}{2a} = 1$ ，故 $b > 0$ ，且

$b = -2a$ ，则 $2a + b = 0$ 故②正确，

$\therefore$ 图象与 y 轴的交点为正半轴，

$\therefore c > 0$ ，则 $abc < 0$ ，故①错误，

由图象可知当 $x=1$ 时，函数取最大值，

将 $x=1$ ，代入 $y = ax^2 + bx + c$ ，中得： $y = a + b + c$ ，

由图象可知函数与 x 轴交点为 $(-1, 0)$ ，对称轴为 $x=1$ ，故函数图象与 x 轴的另一交点为 $(3, 0)$ ，

设函数解析式为： $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ ，

将交点坐标代入得： $y = a(x + 1)(x - 3)$ ，

故化简得： $y = ax^2 - 2ax - 3a$ ，

将 $x=1$ ，代入可得： $y = a - 2a - 3a = -4a$ ，故函数的最大值为 $-4a$ ，故③正确，

$ax^2 + bx + c = a + 1$ 变形为： $ax^2 + bx + c - a - 1 = 0$ 要使方程无实数根，则

$b^2 - 4a(c - a - 1) < 0$ ，将 $c = -3a$ ， $b = -2a$ ，代入得： $20a^2 + 4a < 0$ ，因为 $a < 0$ ，则

$20a + 4 > 0$ ，则 $a > -\frac{1}{5}$ ，综上所述 $-\frac{1}{5} < a < 0$ ，故④正确，

则②③④正确，

故选 C.

【点睛】本题考查二次函数的一般式，二次函数的交点式，二次函数的最值，对称轴，以及交点坐标掌握数形结合思想是解决本题的关键.

二、填空题

11. 计算： $3 \times (-1) + |-3| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】0

【解析】

【分析】根据有理数乘法运算、绝对值运算和有理数加法运算法则分别计算后求解即可

【详解】解： $3 \times (-1) + |-3|$

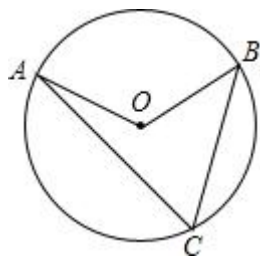
$= -3 + 3$

$= 0$ ，

故答案为：0.

【点睛】本题考查有理数的运算，涉及到加法运算、乘法运算及绝对值运算，熟练掌握相关运算法则是解决问题的关键.

12. 如图，点 A，B，C 都在 $\odot O$ 上， $\angle ACB = 60^\circ$ ，则 $\angle AOB$ 的度数为_____.



【答案】 120°

【解析】

【分析】由 $\angle ACB=60^\circ$ ，根据在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半，即可求得 $\angle AOB$ 的度数.

【详解】解： $\because$ 点 A、B、C 都在 $\odot O$ 上，且点 C 在弦 AB 所对的优弧上， $\angle ACB=60^\circ$ ，
 $\therefore \angle AOB=2\angle ACB=2\times 60^\circ=120^\circ$.

故答案为 120° .

【点睛】此题考查了圆周角定理. 注意掌握在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半定理的应用是解此题的关键，注意数形结合思想的应用.

13. 已知二元一次方程组 $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ ，则 $x-y$ 的值为_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】直接由②-①即可得出答案.

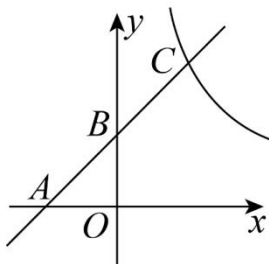
【详解】原方程组为 $\begin{cases} x+2y=4 \text{ ①} \\ 2x+y=5 \text{ ②} \end{cases}$,

由②-①得 $x-y=1$.

故答案为：1.

【点睛】本题考查二元一次方程组的特殊解法，解题的关键是学会观察，并用整体法求解.

14. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $y=x+1$ 与 x 轴， y 轴分别交于点 A，B，与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在第一象限交于点 C，若 $AB=BC$ ，则 k 的值为_____.

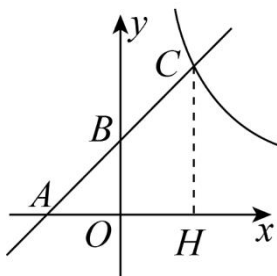


【答案】 2

【解析】

【分析】过点 C 作 $CH \perp x$ 轴，垂足为 H ，证明 $\triangle OAB \sim \triangle HAC$ ，再求出点 C 坐标即可解决问题.

【详解】解：如图，过点 C 作 $CH \perp x$ 轴，垂足为 H ，



$\because$ 直线 $y = x + 1$ 与 x 轴， y 轴分别交于点 A ， B ，

$\therefore$ 将 $y=0$ 代入 $y = x + 1$ ，得 $x = -1$ ，将 $x=0$ 代入 $y = x + 1$ ，得 $y=1$ ，

$\therefore A(-1, 0)$ ， $B(0, 1)$ ，

$\therefore OA=1$ ， $OB=1$ ，

$\because \angle AOB = \angle AHC = 90^\circ$ ， $\angle BAO = \angle CAH$ ，

$\therefore \triangle OAB \sim \triangle HAC$ ，

$$\therefore \frac{AO}{AH} = \frac{OB}{CH} = \frac{AB}{AC}$$

$\because OA=1$ ， $OB=1$ ， $AB = \sqrt{2}$ ，

$$\therefore \frac{1}{AH} = \frac{1}{CH} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore AH = \sqrt{2}$ ， $CH = \sqrt{2}$ ，

$\therefore OH=1$ ，

$\because$ 点 C 在第一象限，

$\therefore C(1, 1)$ ，

$\because$ 点 C 在 $y = \frac{k}{x}$ 上，

$\therefore k = 1 \times 1 = 1$ 。

故答案为：1.

【点睛】本题考查反比例函数综合题、一次函数的应用、相似三角形的判定和性质等知识，解题的关键是熟练掌握待定系数法，本题的突破点是求出点 C 的坐标.

15. 已知 m 为正整数，若 $\sqrt{189m}$ 是整数，则根据 $\sqrt{189m} = \sqrt{3 \times 3 \times 3 \times 7m} = 3\sqrt{3 \times 7m}$ 可

知 m 有最小值 $3 \times 7 = 21$. 设 n 为正整数，若 $\sqrt{\frac{300}{n}}$ 是大于 1 的整数，则 n 的最小值为_____，

最大值为_____.

【答案】 ①. 3 ②. 75

【解析】

【分析】根据 n 为正整数， $\sqrt{\frac{300}{n}}$ 是大于 1 的整数，先求出 n 的值可以为 3、12、75、300，

再结合 $\sqrt{\frac{300}{n}}$ 是大于 1 的整数来求解.

【详解】解： $\because \sqrt{\frac{300}{n}} = \sqrt{\frac{3 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5}{n}} = 10\sqrt{\frac{3}{n}}$ ， $\sqrt{\frac{300}{n}}$ 是大于 1 的整数，

$$\therefore \sqrt{\frac{300}{n}} = 10\sqrt{\frac{3}{n}} > 1.$$

$\because n$ 为正整数

$\therefore n$ 的值可以为 3、12、75，

n 的最小值是 3，最大值是 75.

故答案为：3；75.

【点睛】本题考查了无理数的估算，理解无理数的估算方法是解答关键.

16. 如图 1，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ， $AD = 6$ ， E ， F 分别为 AB ， AD 的中点，连接 EF . 如图 2，将 $\triangle AEF$ 绕点 A 逆时针旋转角 θ ($0 < \theta < 90^\circ$)，使 $EF \perp AD$ ，连接 BE 并延长交 DF 于点 H ，则 $\angle BHD$ 的度数为_____， DH 的长为_____.

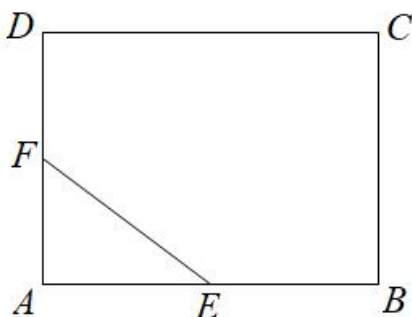


图1

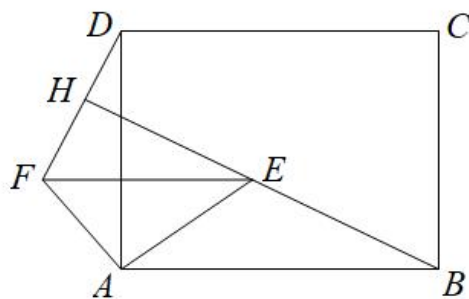


图2

【答案】 ①. 90° 度 ②. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

【解析】

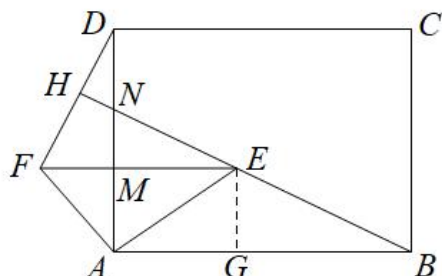
【分析】设 EF 交 AD 于点 M ， BH 交 AD 于点 N ，先证明 $\triangle ADF \sim \triangle ABE$ ，可得 $\angle ADF = \angle ABE$ ，可得 $\angle BHD = \angle BAD = 90^\circ$ ；然后过点 E 作 $EG \perp AB$ 于点 G ，可得四边形 $AMEG$ 是矩形，从而得到 $EG = AM$ ， $AG = ME$ ， $\angle ABE = \angle MEN$ ，然后求出 $EG = AM = \frac{12}{5}$ ，再利用锐角三角函数

可得 $\tan \angle AEF = \frac{AF}{AE} = \frac{3}{4}$ ，从而得到 $AG = ME = \frac{AM}{\tan \angle AEF} = \frac{16}{5}$ ，进而得到

$BG = AB - AG = 8 - \frac{16}{5} = \frac{24}{5}$ ，可得到 $\tan \angle MEN = \tan \angle ABE = \frac{EG}{BG} = \frac{1}{2}$ ，从而得到

$MN = \frac{8}{5}$ ，进而得到 $DN = 2$ ，即可求解。

【详解】解：如图，设 EF 交 AD 于点 M ， BH 交 AD 于点 N ，



根据题意得： $\angle BAE = \angle DAF$ ， $\angle EAF = 90^\circ$ ， $AF = \frac{1}{2} AD = 3$ ， $AE = \frac{1}{2} AB = 4$ ，

$$\therefore \frac{AE}{AF} = \frac{3}{4},$$

在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ， $AD = 6$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle ABE,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle ABE,$$

$$\therefore \angle ANB = \angle DNH,$$

$$\therefore \angle BHD = \angle BAD = 90^\circ;$$

如图，过点 E 作 $EG \perp AB$ 于点 G ，

$$\therefore \angle AGE = \angle AME = \angle BAD = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $AMEG$ 是矩形，

$$\therefore EG = AM, AG = ME, ME \parallel AB,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle MEN,$$

在 $Rt\triangle AEF$ 中， $EF = \sqrt{AE^2 + AF^2} = 5$ ，

$$\therefore \tan \angle AEF = \frac{AF}{AE} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} AM \cdot EF = \frac{1}{2} AE \cdot AF,$$

$$\therefore EG = AM = \frac{12}{5},$$

$$\therefore AG = ME = \frac{AM}{\tan \angle AEF} = \frac{16}{5},$$

$$\therefore BG = AB - AG = 8 - \frac{16}{5} = \frac{24}{5},$$

$$\therefore \tan \angle MEN = \tan \angle ABE = \frac{EG}{BG} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{MN}{ME} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } MN = \frac{8}{5},$$

$$\therefore DN = AD - AM - MN = 2,$$

$$\because \angle ADF = \angle ABE,$$

$$\therefore \tan \angle ADF = \tan \angle ABE = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } DH = 2HN,$$

$$\because DH^2 + HN^2 = DH^2 + \left(\frac{1}{2}DH\right)^2 = DN^2 = 4,$$

$$\text{解得: } DH = \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ 或 } -\frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ (舍去)}.$$

$$\text{故答案为: } 90^\circ, \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

【点睛】本题主要考查了图形的旋转，解直角三角形，矩形的性质和判定，相似三角形的判定和性质，熟练掌握直角三角形的性质，矩形的性质和判定，相似三角形的判定和性质是解题的关键.

三、解答题

17. 解分式方程: $\frac{1}{x} = \frac{4}{x+3}$.

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】先去分母，再移项，合并同类项，未知数系数化1，最后检验方程的根即可.

【详解】解：去分母得

$$x + 3 = 4x,$$

移项并合并同类项得

$$3x = 3,$$

$$\text{解得 } x = 1,$$

经检验， $x = 1$ 是原方程的解，

∴ 原分式方程的解是 $x = 1$.

【点睛】本题主要考查了分式方程解法，理解分式方程的解法是解答关键. 注意解分式方程一定要检验方程的根.

18. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2k+1)x + k^2 + 1 = 0$ 有两个不等实数根 x_1, x_2 .

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 若 $x_1x_2 = 5$, 求 k 的值.

【答案】(1) $k > \frac{3}{4}$

(2) 2

【解析】

【分析】(1) 利用一元二次方程根的判别式大于 0 建立不等式，解不等式即可得;

(2) 先利用一元二次方程的根与系数的关系可得 $x_1x_2 = k^2 + 1 = 5$, 再结合 (1) 的结论即可得.

【小问 1 详解】

解: ∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2k+1)x + k^2 + 1 = 0$ 有两个不等实数根,

∴ 此方程根的判别式 $\Delta = (2k+1)^2 - 4(k^2 + 1) > 0$,

解得 $k > \frac{3}{4}$.

【小问 2 详解】

解: 由题意得: $x_1x_2 = k^2 + 1 = 5$,

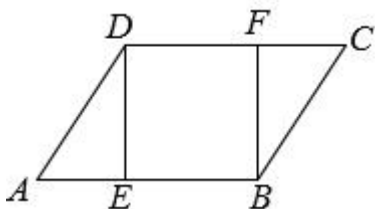
解得 $k = -2$ 或 $k = 2$,

由 (1) 已得: $k > \frac{3}{4}$,

则 k 的值为 2.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式、以及根与系数的关系，熟练掌握一元二次方程的相关知识是解题关键.

19. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别在边 AB, CD 上，且四边形 $BEDF$ 为正方形.



(1) 求证 $AE = CF$;

(2) 已知平行四边形 $ABCD$ 的面积为 20 , $AB = 5$. 求 CF 的长.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $CF = 1$

【解析】

【分析】(1) 直接根据已知条件证明 $Rt\triangle ADE$ 和 $Rt\triangle CBF$ 全等即可得出答案.

(2) 由平行四边形的面积公式求出 $DE = 4$, 然后即可得出答案.

【小问 1 详解】

$\because$ 四边形 $DEBF$ 是正方形, $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore DE = BE = BF = DF$, $AD = BC$, $\angle DEB = \angle BFD = 90^\circ$,

在 $Rt\triangle ADE$ 和 $Rt\triangle CBF$ 中,

$$\therefore \begin{cases} AD = CB \\ DE = BF \end{cases} ,$$

$\therefore Rt\triangle ADE \cong Rt\triangle CBF (HL)$,

$\therefore AE = CF$;

【小问 2 详解】

由题意可知: $S_{\text{平行四边形}ABCD} = AB \cdot DE = 20$,

$\because AB = 5$,

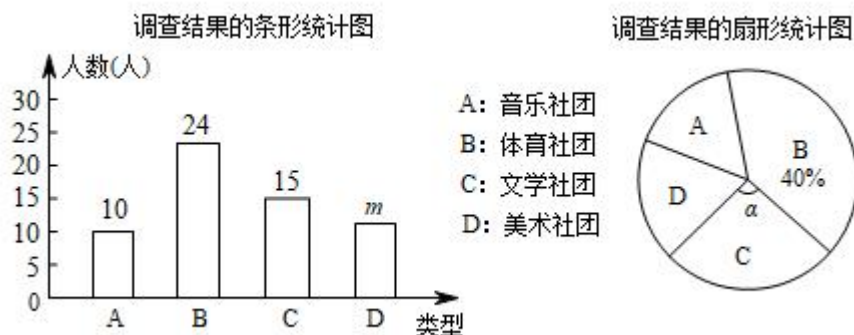
$\therefore DE = 4$,

$\therefore BE = DE = 4$, $AE = 1$,

由 (1) 得 $CF = AE = 1$.

【点睛】本题考查平行四边形的性质、正方形的性质及三角形全等的判定, 解题的关键是熟练掌握相关性质并能灵活运用.

20. 为落实国家“双减”政策, 立德中学在课后托管时间里开展了“音乐社团、体育社团、文学社团、美术社团”活动. 该校从全校 600 名学生中随机抽取了部分学生进行“你最喜欢哪一种社团活动(每人必选且只选一种)”的问卷调查, 根据调查结果, 绘制了如图所示的两幅不完整的统计图.



根据图中信息，解答下列问题

- (1) 参加问卷调查的学生共有_____人；
- (2) 条形统计图中 m 的值为_____，扇形统计图中 α 的度数为_____；
- (3) 根据调查结果，可估计该校 600 名学生中最喜欢“音乐社团”的约有_____人；
- (4) 现从“文学社团”里表现优秀的甲、乙、丙、丁四名同学中随机选取两名参加演讲比赛，请用列表或画树状图的方法求出恰好选中甲和乙两名同学的概率。

【答案】(1) 60 (2) 11, 90°

(3) 100 (4) $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】(1) 根据 B: 体育社团的人数和人数占比即可求出参与调查的总人数；

(2) 根据 (1) 所求总人数即可求出 m ；用 360 度乘以 C: 文学社团的人数占比即可求出 α 的度数；

(3) 用 600 乘以样本中最喜欢“音乐社团”的人数占比即可得到答案；

(4) 画树状图或列表先得到所有的等可能性的结果数，然后找到符合题意的结果数，最后依据概率计算公式求解即可。

【小问 1 详解】

解: $24 \div 40\% = 60$ (人),

$\therefore$ 参加问卷调查的学生共有 60 人,

故答案为: 60;

【小问 2 详解】

解: 由题意得: $m = 60 - 10 - 24 - 15 = 11$, $\alpha = 360^\circ \times \frac{15}{60} = 90^\circ$,

故答案为: 11; 90° ;

【小问 3 详解】

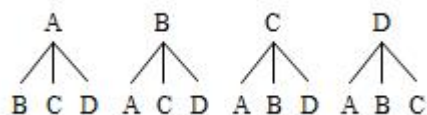
解: $600 \times \frac{10}{60} = 100$ (人),

∴估计该校 600 名学生中最喜欢“音乐社团”的约有 100 人，

故答案为：100；

【小问 4 详解】

解：设甲、乙、丙、丁四名同学分别用 A, B, C, D 表示，根据题意可画树状图或列表如下：



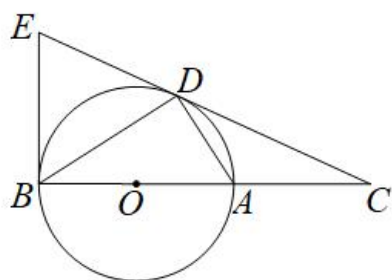
第 1 人 \ 第 2 人	A	B	C	D
A		AB	AC	AD
B	BA		BC	BD
C	CA	CB		CD
D	DA	DB	DC	

由上图或上表可知，共有 12 种等可能的结果，符合条件的结果有 2 种，故恰好选中甲、乙

两名同学的概率为 $P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 。

【点睛】本题主要考查了条形统计图与扇形统计图信息相关联，用样本估计总体，树状图或列表法求解概率等等，正确读懂统计图是解题的关键。

21. 如图，已知 D 为 $\odot O$ 上一点，点 C 在直径 BA 的延长线上， BE 与 $\odot O$ 相切，交 CD 的延长线于点 E ，且 $BE = DE$ 。



(1) 判断 CD 与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由；

(2) 若 $AC = 4$ ， $\sin C = \frac{1}{3}$ ，

①求 $\odot O$ 的半径；

②求 BD 的长。

【答案】(1) CO 与 $\odot O$ 相切，理由见解析

(2) ① $\odot O$ 的半径为 2；② $BD = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

【解析】

【分析】(1) 连接 OD ，根据 $OB = OD$ ，可得 $\angle OBD = \angle ODB$ ，再由 $BE = DE$ ，可得 $\angle EBD = \angle EDB$ ，然后根据 BE 与 $\odot O$ 相切可得 $\angle FDB + \angle ODB = 90^\circ$ ，即可求解；

(2) ① 设 $OD = OA = r$ ，根据 $\sin C = \frac{OD}{OC} = \frac{1}{3}$ ，即可求解；② 由①得： $OC=6$ ， $OD=2$ ，

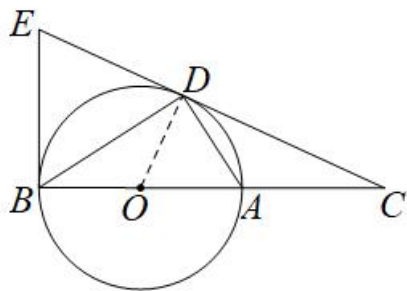
$AB=4$ ，求出 $CD = 4\sqrt{2}$ ，证明 $\triangle CAD \sim \triangle CDB$ ，可得 $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，再由勾股定理，

即可求解.

【小问 1 详解】

解： CO 与 $\odot O$ 相切，理由如下：

连接 OD ，



$$\because OB = OD$$

$$\therefore \angle OBD = \angle ODB$$

$$\because BE = DE$$

$$\therefore \angle EBD = \angle EDB$$

又 $\because BE$ 与 $\odot O$ 相切

$$\therefore BE \perp AB, \text{ 即 } \angle EBA = 90^\circ$$

$$\therefore \angle EBD + \angle OBD = 90^\circ$$

$$\therefore \angle FDB + \angle ODB = 90^\circ, \text{ 即 } \angle ODE = 90^\circ,$$

$$\therefore CD \perp OD$$

$\therefore CD$ 与 $\odot O$ 相切；

【小问 2 详解】

解：① 设 $OD = OA = r$ ，

$$\because CD \perp OD$$

$$\therefore \angle CDO = 90^\circ$$

$$\therefore \sin C = \frac{OD}{OC} = \frac{1}{3}$$

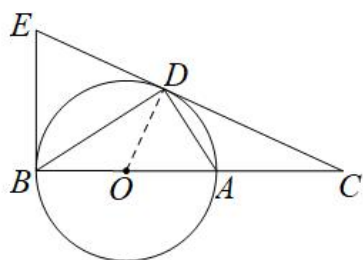
$$\therefore AC = 4,$$

$$\therefore \frac{r}{r+4} = \frac{1}{3}, \text{ 解得 } r = 2$$

故 $\odot O$ 的半径为2;

②由①得: $OC=6$, $OD=2$, $AB=4$,

$$\text{在 } Rt\triangle COD \text{ 中, } CD = \sqrt{OC^2 - OD^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$$



$\therefore AB$ 为直径

$$\therefore \angle BDO + \angle ADO = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ADC + \angle ADO = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ADC = \angle BDO$$

$$\therefore \angle OBD = \angle ODB$$

$$\therefore \angle ADC = \angle OBD$$

又 $\therefore \angle C = \angle C$

$$\therefore \triangle CAD \sim \triangle CDB$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{CD} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

设 $AD = \sqrt{2}x$, 则 $BD = 2x$,

由勾股定理得 $AD^2 + BD^2 = AB^2$, 即 $(\sqrt{2}x)^2 + (2x)^2 = 4^2$

$$\text{解得 } x = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ (负值舍去)}$$

$$\therefore BD = 2x = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

【点睛】本题主要考查了切线的性质和判定,解直角三角形,勾股定理,圆周角定理等知识,熟练掌握相关知识点是解题的关键,是中考常见题型.

22. 2022 年的冬奥会在北京举行,其中冬奥会吉祥物“冰墩墩”深受人们喜爱,多地出现了

“一墩难求”的场面，某纪念品商店在开始售卖当天提供 150 个“冰墩墩”后很快就被抢购一空。该店决定让当天未购买到的顾客可通过预约在第二天优先购买，并且从第二天起，每天比前一天多供应 m 个 (m 为正整数) 经过连续 15 天的销售统计，得到第 x 天 ($1 \leq x \leq 15$ ，且 x 为正整数) 的供应量 y_1 (单位：个) 和需求量 y_2 (单位：个) 的部分数据如下表，其中需求量 y_2 与 x 满足某二次函数关系。(假设当天预约的顾客第二天都会购买，当天的需求量不包括前一天的预约数)

第 x 天	1	2	...	6	...	11	...	15
供应量 y_1 (个)	150	$150 + m$	...	$150 + 5m$	...	$150 + 10m$	...	$150 + 14m$
需求量 y_2 (个)	220	229	...	245	...	220	...	164

(1) 直接写出 y_1 与 x 和 y_2 与 x 的函数关系式；(不要求写出 x 的取值范围)

(2) 已知从第 10 天开始，有需求的顾客都不需要预约就能购买到 (即前 9 天的总需求量超过总供应量，前 10 天的总需求量不超过总供应量)，求 m 的值；(参考数据：前 9 天的总需求量为 2136 个)

(3) 在第 (2) 问 m 取最小值的条件下，若每个“冰墩墩”售价为 100 元，求第 4 天与第 12 天的销售额。

【答案】(1) $y_1 = mx + 150 - m$ ， $y_2 = -(x - 6)^2 + 245$

(2) m 的值为 20 或 21

(3) 第 4 天的销售额为 21000 元，第 12 天的销售额为 20900 元

【解析】

【分析】(1) 根据题意“从第二天起，每天比前一天多供应 m 个 (m 为正整数) 经过连续 15 天的销售统计，得到第 x 天 ($1 \leq x \leq 15$ ，且 x 为正整数) 的供应量 y_1 ”得到 y_1 与 x 的函数关系式； y_2 与 x 满足某二次函数关系，设 $y_2 = ax^2 + bx + c$ ，利用表格，用待定系数法求得 y_2 与 x 的函数关系式；

(2) 用含 m 的式子表示前 9 天的总供应量和前 10 天的总供应量，根据“前 9 天的总需求量超过总供应量，前 10 天的总需求量不超过总供应量”列出不等式，求解即可；

(3) 在 (2) 的条件下， m 的最小值为 20，代入 (1) 中 y_1 与 x 和 y_2 与 x 的函数关系式求得第 4 天的销售量和第 12 天的销售量，即可求得销售额。

【小问 1 详解】

解：由题意可知， $y_1 = 150 + m(x - 1)$ ，

即 $y_1 = mx + 150 - m$,

y_2 与 x 满足某二次函数关系, 设 $y_2 = ax^2 + bx + c$,

$$\text{由表格可知, } \begin{cases} 220 = a + b + c \\ 229 = 4a + 2b + c \\ 245 = 36a + 6b + c \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a = -1 \\ b = 12 \\ c = 209 \end{cases},$$

即 $y_2 = -x^2 + 12x + 209 = -(x-6)^2 + 245$.

【小问 2 详解】

前 9 天的总供应量为: $150 + (150 + m) + (150 + 2m) + \cdots + (150 + 8m) = 1350 + 36m$,

前 10 天的总供应量为: $1350 + 36m + (150 + 9m) = 1500 + 45m$,

第 10 天的需求量与第 2 天需求量相同, 为 229 个,

故前 10 天的总需求量为: $2136 + 229 = 2365$ (个),

$$\text{依题意可得 } \begin{cases} 1350 + 36m < 2136 \\ 1500 + 45m \geq 2365 \end{cases},$$

$$\text{解得 } 19\frac{2}{9} \leq m < 21\frac{5}{6},$$

因为 m 为正整数, 故 m 的值为 20 或 21.

【小问 3 详解】

在 (2) 的条件下, m 的最小值为 20,

第 4 天的销售量即为供应量: $y_1 = (4-1) \times 20 + 150 = 210$ (个),

故第 4 天的销售额为: $100 \times 210 = 21000$ (元),

第 12 天的销售量即需求量. $y_2 = -(12-6)^2 + 245 = 209$ (个),

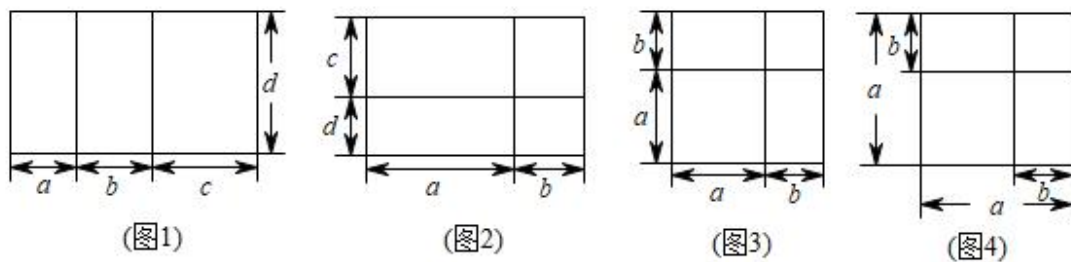
故第 12 天的销售额为: $100 \times 209 = 20900$ (元),

答: 第 4 天的销售额为 21000 元, 第 12 天的销售额为 20900 元.

【点睛】本题考查关于销售的实际问题, 是一次函数和二次函数的综合问题. 解题的关键在于正确理解题中的相等和不等关系.

23. 《几何原本》是古希腊数学家欧几里得的一部不朽著作, 是数学发展史的一个里程碑. 在该书的第 2 幕“几何与代数”部分, 记载了很多利用几何图形来论证的代数结论, 利用几何给人以强烈印象将抽象的逻辑规律体现在具体的图形之中.

(1) 我们在学习许多代数公式时, 可以用几何图形来推理, 观察下列图形, 找出可以推出的代数公式, (下面各图形均满足推导各公式的条件, 只需填写对应公式的序号)



公式①: $(a+b+c)d = ad + bd + cd$

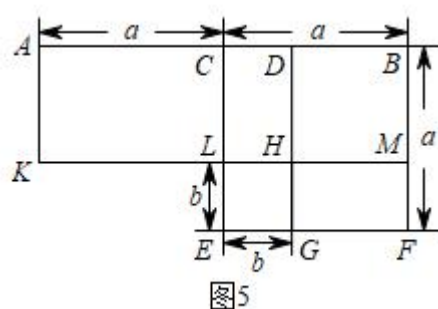
公式②: $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

公式③: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

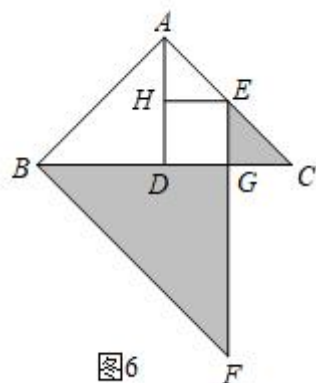
公式④: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

图 1 对应公式____, 图 2 对应公式____, 图 3 对应公式____, 图 4 对应公式____;

(2) 《几何原本》中记载了一种利用几何图形证明平方差公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 的方法, 如图 5, 请写出证明过程; (已知图中各四边形均为矩形)



(3) 如图 6, 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle BAC = 90^\circ$, D 为 BC 的中点, E 为边 AC 上任意一点 (不与端点重合), 过点 E 作 $EG \perp BC$ 于点 G , 作 $EH \perp AD$ 于点 H , 过点 B 作 $BF \parallel AC$ 交 EG 的延长线于点 F . 记 $\triangle BFG$ 与 $\triangle CEG$ 的面积之和为 S_1 , $\triangle ABD$ 与 $\triangle AEH$ 的面积之和为 S_2 .



①若 E 为边 AC 的中点，则 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值为_____；

②若 E 不为边 AC 的中点时，试问①中的结论是否仍成立？若成立，写出证明过程；若不成立，请说明理由。

【答案】(1) ①, ②, ④, ③

(2) 证明见解析 (3) ①2

②结论仍成立，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 观察图形，根据面积计算方法即可快速判断；

(2) 根据面积关系：矩形 $AKHD$ 面积=矩形 $AKLC$ 面积+矩形 $CLHD$ 面积=矩形 $DBFG$ 面积+矩形 $CLHD$ 面积=正方形 $BCEF$ 面积-正方形 $LEGH$ 面积，即可证明；

(3) ①由题意可得 $\triangle ABD$, $\triangle AEH$, $\triangle CEG$, $\triangle BFG$ 都是等腰直角三角形，四边形 $DGEH$ 是正方形，设 $BD=a$ ，从而用含 a 的代数式表示出 S_1 、 S_2 进行计算即可；②由题意可得 $\triangle ABD$, $\triangle AEH$, $\triangle CEG$, $\triangle BFG$ 都是等腰直角三角形，四边形 $DGEH$ 是矩形，设 $BD=a$, $DG=b$ ，从而用含 a 、 b 的代数式表示出 S_1 、 S_2 进行计算即可。

【小问 1 详解】

解：图 1 对应公式①，图 2 对应公式②，图 3 对应公式④，图 4 对应公式③；

故答案为：①, ②, ④, ③；

【小问 2 详解】

解：由图可知，矩形 $BCEF$ 和矩形 $EGHL$ 都是正方形，且 $AK=DB=a-b$ ，

$$\therefore S_{\text{矩形}AKLC} = S_{\text{矩形}DBFG} = a(a-b),$$

$$\therefore S_{\text{矩形}AKHD} = S_{\text{矩形}AKLC} + S_{\text{矩形}CLHD},$$

$$\therefore S_{\text{矩形}AKHD} = S_{\text{矩形}DBFG} + S_{\text{矩形}CLHD} = S_{\text{正方形}BCEF} - S_{\text{正方形}LEGH} = a^2 - b^2,$$

$$\text{又} \because S_{\text{矩形}AKHD} = (a+b)(a-b),$$

$$\therefore (a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$$

【小问 3 详解】

解：①由题意可得： $\triangle ABD$, $\triangle AEH$, $\triangle CEG$, $\triangle BFG$ 都是等腰直角三角形，四边形 $DGEH$ 是正方形，

设 $BD = a$ ，

$$\therefore AD = BD = a, \quad AH = HE = DG = \frac{1}{2}a, \quad EG = CG = \frac{1}{2}a, \quad FG = BG = \frac{3}{2}a,$$

$$\therefore S_1 = S_{\triangle BFG} + S_{\triangle CEG} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{5}{4}a^2,$$

$$S_2 = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle AEH} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{5}{8}a^2,$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = 2;$$

故答案为：2；

②成立，证明如下：

由题意可得： $\triangle ABD$ ， $\triangle AEH$ ， $\triangle CEG$ ， $\triangle BFG$ 都是等腰直角三角形，四边形 $DGEH$ 是矩形，

设 $BD = a$ ， $DG = b$ ，

$$\therefore AD = BD = a, \quad AH = HE = DG = b, \quad EG = CG = a - b, \quad FG = BG = a + b,$$

$$\therefore S_1 = S_{\triangle BFG} + S_{\triangle CEG} = \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2 = a^2 + b^2,$$

$$S_2 = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle AEH} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2),$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = 2 \text{ 仍成立.}$$

【点睛】本题主要考查了公式的几何验证方法，矩形和正方形的判定与性质，掌握数形结合思想，观察图形，通过图形面积解决问题是解题的关键。

24. 如图 1，平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) 与 x 轴分则点 A 和点 $B(1,0)$ ，与 y 轴交于点 C ，对称轴为直线 $x = -1$ ，且 $OA = OC$ ， P 为抛物线上一动点。

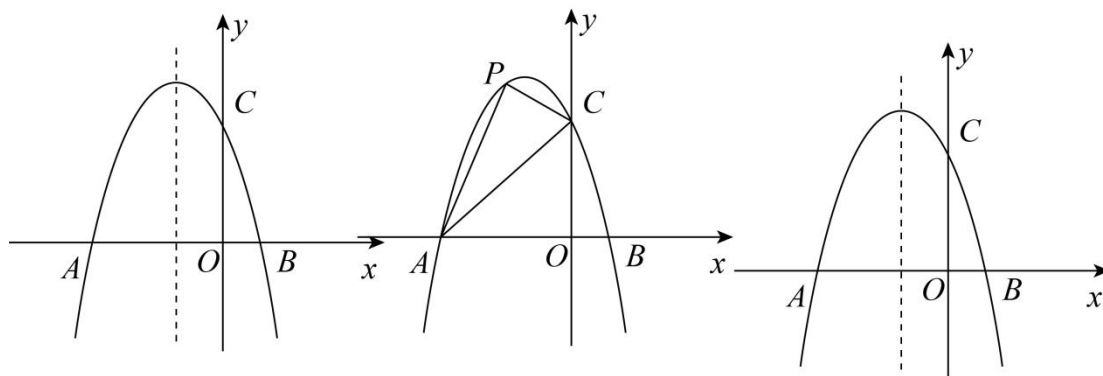


图 1

图 2

(1) 直接写出抛物线的解析式；

(2) 如图 2，连接 AC ，当点 P 在直线 AC 上方时，求四边形 $PABC$ 面积的最大值，并求出

此时 P 点的坐标；

(3) 设 M 为抛物线对称轴上一动点，当 P, M 运动时，在坐标轴上是否存在点 N ，使四边形 $PMCN$ 为矩形？若存在，直接写出点 P 及其对应点 N 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】(1) $y = -x^2 - 2x + 3$

(2) $S_{\text{最大}} = \frac{75}{8}$ ， P 点的坐标为 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$

(3) 存在， $P_1(-1, 4)$ ， $N_1(0, 4)$ ； $P_2\left(\frac{-5-\sqrt{145}}{6}, \frac{\sqrt{145}-1}{18}\right)$ ， $N_2\left(\frac{1-\sqrt{145}}{6}, 0\right)$ ；
 $P_3\left(\frac{-5+\sqrt{145}}{6}, \frac{-\sqrt{145}-1}{18}\right)$ ， $N_3\left(\frac{1+\sqrt{145}}{6}, 0\right)$

【解析】

【分析】(1) 根据已知条件，列出方程组求出 a, b, c 的值即可；

(2) 方法一：设 $P(m, n)$ ，四边形 $PABC$ 的面积 $S = S_{\triangle PAO} + S_{\triangle PCO} + S_{\triangle BCO}$ ，用 m 表示出 S ，并求出 S 的最大值与此时 P 点的坐标；

方法二：易知 $A(-3, 0)$ ， $C(0, 3)$ ，故直线 AC 的方程为 $y = x + 3$ ，设

$P(x, -x^2 - 2x + 3)$ ($-3 < x < 0$)，表示出 PQ ，并用 x 表示出 $\triangle APC$ 的面积，再表示出 S ，并求出 S 的最大值与此时 P 点的坐标；

(3) 根据题目要求，分类讨论当 N 在 y 轴上时；当 N 在 x 轴负半轴上时，设 $N(t, 0)$ ，用 t 表示出点 P 的坐标，解出 t ，写出点 P 及其对应点 N 的坐标。

【小问 1 详解】

解： $\because OA = OC$ ，

$\therefore C(0, c)$ ， $A(-c, 0)$ ，

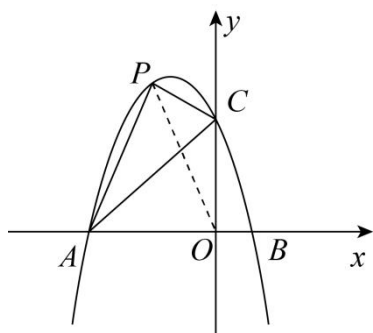
$\therefore B(1, 0)$ ，对称轴为直线 $x = -1$ ， $c > 0$ ，

$$\therefore \begin{cases} 0 = a + b + c \\ -\frac{b}{2a} = -1 \\ 0 = ac^2 + bc + c \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为： $y = -x^2 - 2x + 3$ 。

【小问 2 详解】

解：方法一：连接 OP ，



设 $P(m, n)$ ，易知 $-3 < m < 0$ ， $n > 0$ ，

$\therefore AO = CO = 3$ ， $BO = 1$ ，

$\therefore$ 四边形 $PABC$ 的面积 $S = S_{\triangle PAO} + S_{\triangle PCO} + S_{\triangle BCO}$ ，

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times 3n + \frac{1}{2} \times 3 \cdot (-m) + \frac{1}{2} \times 3 \times 1$$

$$= \frac{3}{2}(n - m + 1)$$

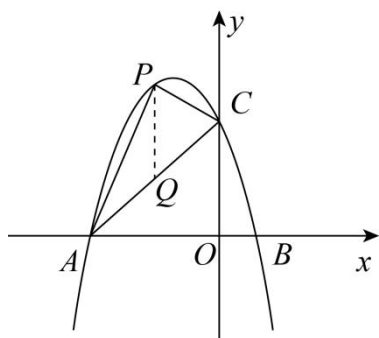
又 $\because n = -m^2 - 2m + 3$ ，

$$\therefore S = \frac{3}{2}(-m^2 - 3m + 4) = -\frac{3}{2}\left(m + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{75}{8}$$

$\therefore$ 当 $m = -\frac{3}{2}$ 时， $S_{\text{最大}} = \frac{75}{8}$ ，

$\therefore$ 此时 P 点的坐标为 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$ ；

方法二：易知 $A(-3, 0)$ ， $C(0, 3)$ ，故直线 AC 的方程为 $y = x + 3$



设 $P(x, -x^2 - 2x + 3)$ ($-3 < x < 0$)，

$\therefore$ 过点 P 作 $PQ \perp x$ 轴，交 AC 于点 Q ，

$\therefore Q(x, x + 3)$ ，

$\therefore$ 点 P 在 AC 上方,

$$\therefore PQ = -x^2 - 2x + 3 - (x + 3) = -x^2 - 3,$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle APC} &= S_{\triangle PAQ} + S_{\triangle PCQ} = \frac{1}{2}PQ(x_Q - x_A) + \frac{1}{2}PQ(x_C - x_Q) \\ &= \frac{1}{2}PQ(x_C - x_A) = \frac{3}{2}PQ = \frac{3}{2}(-x^2 - 3x) = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x, \end{aligned}$$

$$\therefore \text{四边形 } PABC \text{ 面积 } S = S_{\triangle APC} + S_{\triangle ABC} = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + 6,$$

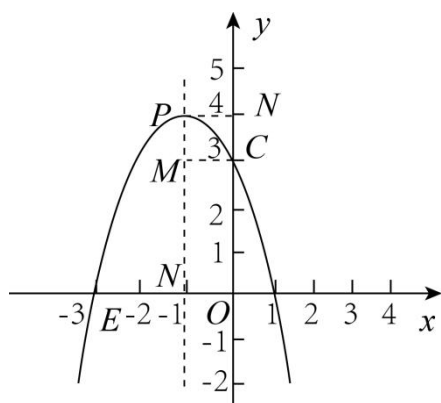
$$\therefore \text{当 } x = -\frac{3}{2} \text{ 时, } S \text{ 有最大值 } \frac{75}{8},$$

$$\therefore \text{此时 } P \text{ 点的坐标为 } \left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right).$$

【小问 3 详解】

存在点 N .

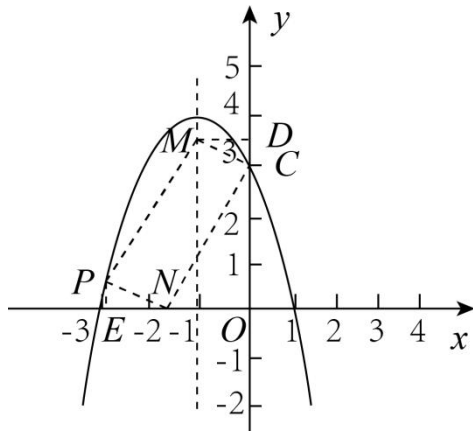
①当 N 在 y 轴上时,



$\therefore$ 四边形 $PMCN$ 为矩形,

此时, $P_1(-1, 4)$, $N_1(0, 4)$;

②当 N 在 x 轴负半轴上时, 如图所示, 四边形 $PMCN$ 为矩形, 过 M 作 y 轴的垂线, 垂足为 D , 过 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 E , 设 $N(t, 0)$, 则 $ON = -t$,



$$\therefore \angle CDM = \angle NEP = 90^\circ,$$

$\because$ 四边形 $PMCN$ 为矩形,

$$\therefore \angle MCN = \angle CNP = 90^\circ, \quad CM = NP,$$

$$\because \angle MCD + \angle OCN = 90^\circ, \quad \angle ONC + \angle OCN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MCD = \angle ONC,$$

$$\text{又} \because \angle CDM = \angle CON = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CMD \sim \triangle CNO,$$

$$\therefore \frac{CD}{ON} = \frac{MD}{OC},$$

$$\text{又} \because \text{点 } M \text{ 在对称轴上, } C(0, 3),$$

$$\therefore DM = 1, OC = 3,$$

$$\therefore \frac{CD}{-t} = \frac{1}{3}, \quad \text{即 } CD = -\frac{1}{3}t,$$

$$\because \angle MCD + \angle CMD = 90^\circ, \quad \angle ONC + \angle PNE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CMD = \angle PNE,$$

$$\therefore \triangle CMD \cong \triangle NPE \quad (AAS),$$

$$\therefore NE = MD = 1, \quad EP = CD = -\frac{1}{3}t,$$

$$\therefore OE = ON + EN = -t + 1,$$

$$\therefore P \text{ 点的坐标为 } \left(t-1, -\frac{1}{3}t\right),$$

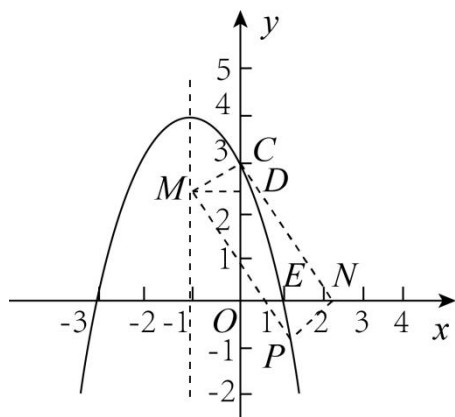
$$\because P \text{ 点在抛物线 } y = -x^2 - 2x + 3 \text{ 上,}$$

$$\therefore -\frac{1}{3}t = -(t-1)^2 - 2(t-1) + 3$$

$$\text{解得 } t_1 = \frac{1-\sqrt{145}}{6}, \quad t_2 = \frac{1+\sqrt{145}}{6} \quad (\text{舍}),$$

$$\therefore P_2\left(\frac{-5-\sqrt{145}}{6}, \frac{\sqrt{145}-1}{18}\right), \quad N_2\left(\frac{1-\sqrt{145}}{6}, 0\right);$$

③当 N 在 x 轴正半轴上时，如图所示，四边形 $PMCN$ 为矩形，过 M 作 y 轴的垂线，垂足为 D ，过 P 作 x 轴的垂线，垂足为 E ，设 $N(t, 0)$ ，则 $ON = t$ ，



$$\therefore \angle CDM = \angle NEP = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $PMCN$ 为矩形时，

$$\therefore \angle MCN = \angle CNP = 90^\circ, \quad CM = NP,$$

$$\therefore \angle MCD + \angle OCN = 90^\circ, \quad \angle ONC + \angle OCN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MCD = \angle ONC,$$

$$\text{又} \because \angle CDM = \angle CON = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CMD \sim \triangle CNO,$$

$$\therefore \frac{CD}{ON} = \frac{MD}{OC},$$

又 $\because$ 点 M 在对称轴上， $C(0, 3)$ ，

$$\therefore DM = 1, OC = 3,$$

$$\therefore \frac{CD}{t} = \frac{1}{3}, \quad \text{即 } CD = \frac{1}{3}t,$$

$$\therefore \angle MCD + \angle CMD = 90^\circ, \quad \angle ONC + \angle PNE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CMD = \angle PNE,$$

$$\therefore \triangle CMD \cong \triangle NPE \quad (AAS),$$

$$\therefore NE = MD = 1, \quad EP = CD = \frac{1}{3}t,$$

$$\therefore OE = ON - EN = t - 1,$$

$$\therefore P \text{ 点的坐标为 } \left(t-1, -\frac{1}{3}t\right),$$

$\because P$ 点在抛物线 $y = -x^2 - 2x + 3$ 上,

$$\therefore -\frac{1}{3}t = -(t-1)^2 - 2(t-1) + 3$$

$$\text{解得 } t_1 = \frac{1-\sqrt{145}}{6} \text{ (舍)}, \quad t_2 = \frac{1+\sqrt{145}}{6},$$

$$\therefore P_3\left(\frac{-5+\sqrt{145}}{6}, \frac{-\sqrt{145}-1}{18}\right), \quad N_3\left(\frac{1+\sqrt{145}}{6}, 0\right),$$

$$\text{综上: } P_1(-1, 4), \quad N_1(0, 4); \quad P_2\left(\frac{-5-\sqrt{145}}{6}, \frac{\sqrt{145}-1}{18}\right), \quad N_2\left(\frac{1-\sqrt{145}}{6}, 0\right);$$

$$P_3\left(\frac{-5+\sqrt{145}}{6}, \frac{-\sqrt{145}-1}{18}\right), \quad N_3\left(\frac{1+\sqrt{145}}{6}, 0\right)$$

【点睛】 本题考查用待定系数法求二次函数、二次函数综合问题，矩形的性质与判定，二次函数图象上点的坐标特征等知识点的理解和掌握，综合运用这些性质进行计算是解此题的关键。