

荆州市 2022 年初中学业水平考试数学试题

一、选择题（本大题共有 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 化简 $a - 2a$ 的结果是（ ）

- A. $-a$ B. a C. $3a$ D. 0

【答案】A

【解析】

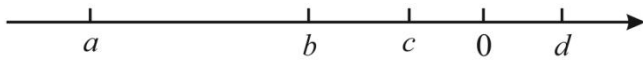
【分析】根据整式的加减运算中合并同类项计算即可；

【详解】解： $a - 2a = (1 - 2)a = -a$ ；

故选：A.

【点睛】本题主要考查整式加减中的合并同类项，掌握相关运算是解本题的关键.

2. 实数 a, b, c, d 在数轴上对应点的位置如图，其中有一对互为相反数，它们是（ ）



- A. a 与 d B. b 与 d C. c 与 d D. a 与 c

【答案】C

【解析】

【分析】互为相反数的两个数（除 0 在外）它们分居原点的两旁，且到原点的距离相等，根据相反数的含义可得答案.

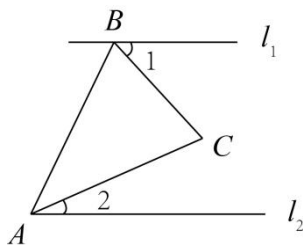
【详解】解： $\because c, d$ 分居原点的两旁，且到原点的距离相等，

$\therefore c, d$ 互为相反数，

故选 C

【点睛】本题考查的是相反数的含义，掌握“互为相反数的两个数在数轴上的分布”是解本题的关键.

3. 如图，直线 $l_1 \parallel l_2$ ， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 40^\circ$ ，则 $\angle 1 + \angle 2$ 的度数是（ ）



- A. 60° B. 70° C. 80° D. 90°

【答案】B

【解析】

【分析】由 $AB=AC$ ， $\angle BAC=40^\circ$ 得 $\angle ABC=70^\circ$ ，在由 $l_1 \parallel l_2$ 得 $\angle ABC + \angle 1 + \angle BAC + \angle 2 = 180^\circ$ 即可求解；

【详解】解： $\because AB=AC$ ， $\angle BAC=40^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle BAC) = \frac{1}{2} (180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ,$$

$$\therefore l_1 \parallel l_2$$

$$\therefore \angle ABC + \angle 1 + \angle BAC + \angle 2 = 180^\circ$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC = 180^\circ - 70^\circ - 40^\circ = 70^\circ$$

故选：B.

【点睛】本题主要考查平行线的性质、等腰三角形的性质，掌握相关性质并灵活应用是解题的关键.

4. 从班上 13 名排球队员中，挑选 7 名个头高的参加校排球比赛. 若这 13 名队员的身高各不相同，其中队员小明想知道自己能否入选，只需知道这 13 名队员身高数据的（ ）

- A. 平均数 B. 中位数 C. 最大值 D. 方差

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意，只要知道 13 名队员身高数据的中位数即可判断小明是否入选.

【详解】解：入选规则是个头高则入选，则需要将 13 名队员的身高进行降序排序，取前 7 名进行参赛，根据中位数的概念，知道第 7 名的成绩，即中位数即可判断小明是否入选；

故选：B.

【点睛】本题主要考查中位数的概念，掌握中位数的概念是解本题的关键.

5. “爱劳动，劳动美.” 甲、乙两同学同时从家里出发，分别到距家 6km 和 10km 的实践基地参加劳动. 若甲、乙的速度比是 3:4，结果甲比乙提前 20min 到达基地，求甲、乙的速度. 设甲的速度为 $3x\text{km/h}$ ，则依题意可列方程为（ ）

- A. $\frac{6}{3x} + \frac{1}{3} = \frac{10}{4x}$ B. $\frac{6}{3x} + 20 = \frac{10}{4x}$ C. $\frac{6}{3x} - \frac{10}{4x} = \frac{1}{3}$ D. $\frac{6}{3x} - \frac{10}{4x} = 20$

【答案】A

【解析】

【分析】设甲的速度为 $3x\text{km/h}$ ，则乙的速度为 $4x\text{km/h}$ ，由甲所花的时间加上 $\frac{1}{3}$ 小时等于乙所花的时间建立

方程即可.

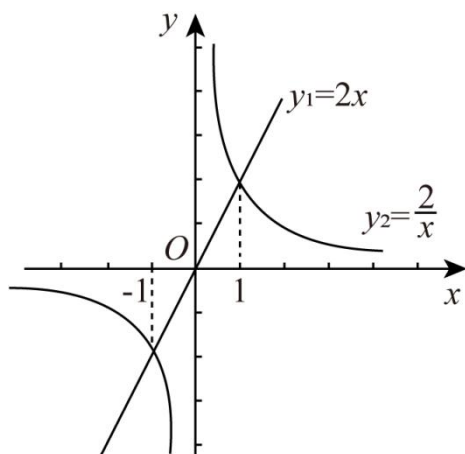
【详解】解：设甲的速度为 $3x\text{km/h}$ ，则乙的速度为 $4x\text{km/h}$ ，则

$$\frac{6}{3x} + \frac{1}{3} = \frac{10}{4x},$$

故选：A.

【点睛】本题考查的是分式方程的应用，理解题意，确定相等关系是解本题的关键.

6. 如图是同一直角坐标系中函数 $y_1 = 2x$ 和 $y_2 = \frac{2}{x}$ 的图象. 观察图象可得 $2x > \frac{2}{x}$ 的解集为 ()



- A. $-1 < x < 1$ B. $x < -1$ 或 $x > 1$ C. $x < -1$ 或 $0 < x < 1$ D. $-1 < x < 0$ 或 $x > 1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据图象进行分析即可得结果；

【详解】解： $\because 2x > \frac{2}{x}$

$$\therefore y_1 > y_2$$

由图象可知，函数 $y_1 = 2x$ 和 $y_2 = \frac{2}{x}$ 分别在一、三象限有一个交点，交点的横坐标分别为 $x = 1$ ， $x = -1$ ，

由图象可以看出当 $-1 < x < 0$ 或 $x > 1$ 时，函数 $y_1 = 2x$ 在 $y_2 = \frac{2}{x}$ 上方，即 $y_1 > y_2$ ，

故选：D.

【点睛】本题主要考查一次函数和反比例函数的应用，掌握一次函数和反比例函数图象的性质是解本题的关键.

7. 关于 x 的方程 $x^2 - 3kx - 2 = 0$ 实数根的情况，下列判断正确的是 ()

- A. 有两个相等实数根 B. 有两个不相等实数根 C. 没有实数根 D. 有一个实数根

【答案】B

【解析】

【分析】根据根的判别式直接判断即可得出答案.

【详解】解：对于关于 x 的方程 $x^2 - 3kx - 2 = 0$,

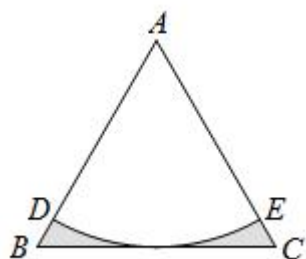
$$\therefore \Delta = (-3k)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9k^2 + 8 > 0,$$

$\therefore$ 此方程有两个不相等的实数根.

故选 B.

【点睛】此题考查了根的判别式，一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系：(1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

8. 如图，以边长为 2 的等边 $\triangle ABC$ 顶点 A 为圆心、一定的长为半径画弧，恰好与 BC 边相切，分别交 AB , AC 于 D , E ，则图中阴影部分的面积是 ()



- A. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}$ B. $2\sqrt{3} - \pi$ C. $\frac{(6-\pi)\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】作 $AF \perp BC$ ，再根据勾股定理求出 AF ，然后根据阴影部分的面积 $= S_{\triangle ABC} - S_{\text{扇形}ADE}$ 得出答案.

【详解】过点 A 作 $AF \perp BC$ ，交 BC 于点 F .

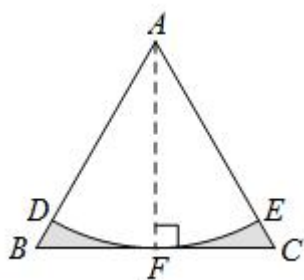
$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形， $BC=2$,

$\therefore CF=BF=1$.

在 $\text{Rt}\triangle ACF$ 中， $AF = \sqrt{AC^2 - CF^2} = \sqrt{3}$.

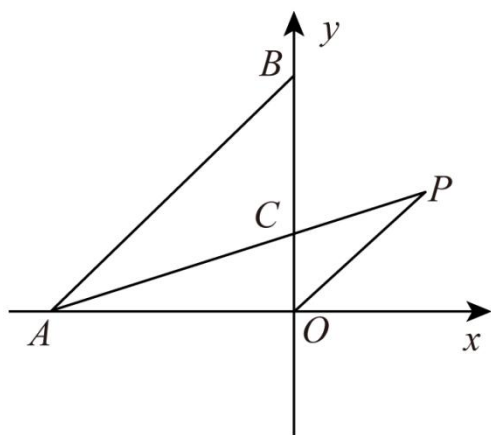
$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle ABC} - S_{\text{扇形}ADE} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} - \frac{60\pi \times (\sqrt{3})^2}{360} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}.$$

故选：D.



【点睛】 本题主要考查了求阴影部分的面积，涉及等边三角形的性质，勾股定理及扇形面积计算等知识，将阴影部分的面积转化为三角形的面积-扇形的面积是解题的关键.

9. 如图，在平面直角坐标系中，点 A, B 分别在 x 轴负半轴和 y 轴正半轴上，点 C 在 OB 上， $OC:BC=1:2$ ，连接 AC ，过点 O 作 $OP\parallel AB$ 交 AC 的延长线于 P . 若 $P(1,1)$ ，则 $\tan \angle OAP$ 的值是 ()



- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 3

【答案】 C

【解析】

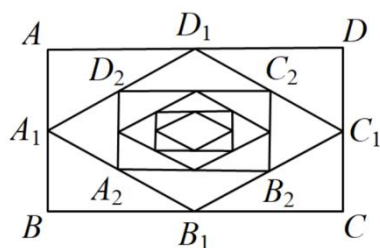
【分析】 由 $P(1,1)$ 可知， OP 与 x 轴的夹角为 45° ，又因为 $OP\parallel AB$ ，则 $\triangle OAB$ 为等腰直角三角形，设 $OC=x$ ， $OB=2x$ ，用勾股定理求其他线段进而求解.

【详解】 $\because P$ 点坐标为 $(1, 1)$ ，
则 OP 与 x 轴正方向的夹角为 45° ，
又 $\because OP\parallel AB$ ，
则 $\angle BAO=45^\circ$ ， $\triangle OAB$ 为等腰直角三角形，
 $\therefore OA=OB$ ，
设 $OC=x$ ，则 $OB=2OC=2x$ ，
则 $OB=OA=3x$ ，

$$\therefore \tan \angle OAP = \frac{OC}{OA} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}.$$

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质、平行线的性质、勾股定理和锐角三角函数的求解，根据 P 点坐标推出特殊角是解题的关键.

10. 如图，已知矩形 $ABCD$ 的边长分别为 a, b ，进行如下操作：第一次，顺次连接矩形 $ABCD$ 各边的中点，得到四边形 $A_1B_1C_1D_1$ ；第二次，顺次连接四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 各边的中点，得到四边形 $A_2B_2C_2D_2$ ；…如此反复操作下去，则第 n 次操作后，得到四边形 $A_nB_nC_nD_n$ 的面积是（ ）



A. $\frac{ab}{2^n}$

B. $\frac{ab}{2^{n-1}}$

C. $\frac{ab}{2^{n+1}}$

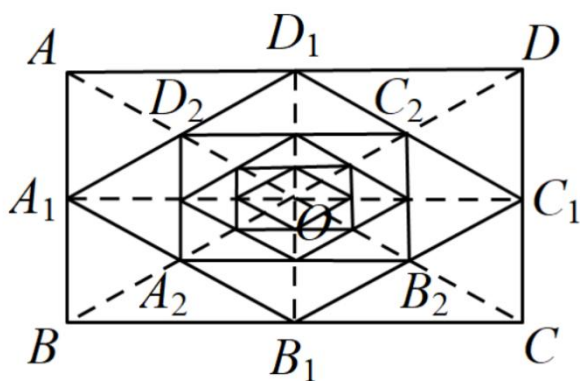
D. $\frac{ab}{2^{2n}}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用中位线、菱形、矩形的性质可知，每一次操作后得到的四边形面积为原四边形面积的一半，由此可解.

【详解】解：如图，连接 AC, BD, A_1C_1, B_1D_1 .



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AC = BD, AD = BC, AB = CD.$

$\because A_1, B_1, C_1, D_1$ 分别是矩形四个边的中点，

$$\therefore A_1D_1 = B_1C_1 = \frac{1}{2}BD, A_1B_1 = C_1D_1 = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore A_1D_1 = B_1C_1 = A_1B_1 = C_1D_1,$$

$\therefore$ 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是菱形,

$$\therefore A_1C_1 = AD = a, B_1D_1 = AB = b,$$

$$\therefore \text{四边形 } A_1B_1C_1D_1 \text{ 的面积为: } \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1 = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}.$$

同理, 由中位线的性质可知,

$$D_2C_2 = A_2B_2 = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}a, D_2C_2 // A_2B_2 // AD,$$

$$D_2A_2 = C_2B_2 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}b, D_2A_2 // C_2B_2 // AB,$$

$\therefore$ 四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \perp AB,$$

$$\therefore C_2D_2 \perp D_2A_2,$$

$\therefore$ 四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 是矩形,

$$\therefore \text{四边形 } A_2B_2C_2D_2 \text{ 的面积为: } C_2D_2 \cdot A_2D_2 = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b = \frac{1}{4} S_{\square ABCD} = \frac{1}{2} S_{\text{菱形 } A_1B_1C_1D_1}.$$

$\therefore$ 每一次操作后得到的四边形面积为原四边形面积的一半,

$$\therefore \text{四边形 } A_nB_nC_nD_n \text{ 的面积是 } \frac{ab}{2^n}.$$

故选:A.

【点睛】 本题考查矩形的性质, 菱形的性质以及中位线的性质, 证明四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是菱形, 四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 是矩形是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

11. 一元二次方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 配方为 $(x-2)^2 = k$, 则 k 的值是_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 将原方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 变形成与 $(x-2)^2 = k$ 相同的形式, 即可求解.

【详解】 解: $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x^2 - 4x + 3 + 1 = 0 + 1$$

$$x^2 - 4x + 4 = 1$$

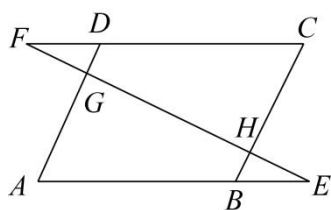
$$(x-2)^2 = 1$$

$$\therefore k = 1$$

故答案为：1.

【点睛】本题主要考查解一元二次方程中的配方法，掌握配方法的解题步骤是解本题的关键.

12. 如图，点 E, F 分别在 $\square ABCD$ 的边 AB, CD 的延长线上，连接 EF ，分别交 AD, BC 于 G, H . 添加一个条件使 $\triangle AEG \cong \triangle CFH$ ，这个条件可以是_____. (只需写一种情况)



【答案】 $AE = CF$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】由平行四边形的性质可得： $\angle A = \angle C$ ，证明 $\angle E = \angle F$ ，再补充两个三角形中的一组相对应的边相等即可.

【详解】解： $\because \square ABCD$,

$\therefore AB \parallel CD, \angle A = \angle C$,

$\therefore \angle F = \angle E$,

所以补充： $AE = CF$,

$\therefore \triangle AEG \cong \triangle CFH$,

故答案为： $AE = CF$ (答案不唯一)

【点睛】本题考查的是全等三角形的判定与性质，平行四边形的性质，掌握“平行四边形的性质与利用 ASA 证明三角形全等”是解本题的关键.

13. 若 $3 - \sqrt{2}$ 的整数部分为 a ，小数部分为 b ，则代数式 $(2 + \sqrt{2}a) \cdot b$ 的值是_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】先由 $1 < \sqrt{2} < 2$ 得到 $1 < 3 - \sqrt{2} < 2$ ，进而得出 a 和 b ，代入 $(2 + \sqrt{2}a) \cdot b$ 求解即可.

【详解】解：∵ $1 < \sqrt{2} < 2$,

$$\therefore 1 < 3 - \sqrt{2} < 2,$$

∴ $3 - \sqrt{2}$ 的整数部分为 a , 小数部分为 b ,

$$\therefore a = 1, \quad b = 3 - \sqrt{2} - 1 = 2 - \sqrt{2}.$$

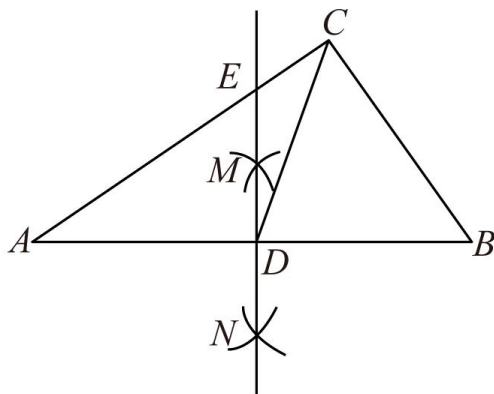
$$\therefore (2 + \sqrt{2}a) \cdot b = (2 + \sqrt{2}) \times (2 - \sqrt{2}) = 4 - 2 = 2,$$

故答案为：2.

【点睛】本题主要考查无理数及代数式化简求值，解决本题的关键是要熟练掌握无理数估算方法和无理数整数和小数部分的求解方法.

14. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，通过尺规作图得到的直线 MN 分别交 AB , AC 于 D , E ，连接 CD . 若

$$CE = \frac{1}{3}AE = 1, \text{ 则 } CD = \underline{\hspace{2cm}}.$$



【答案】 $\sqrt{6}$

【解析】

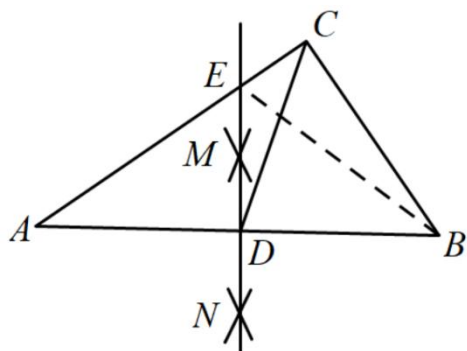
【分析】先求解 AE , AC ，再连结 BE ，证明 $AE = BE$, $AD = BD$ ，利用勾股定理求解 BC , AB ，从而可得答案.

【详解】解：∵ $CE = \frac{1}{3}AE = 1$,

$$\therefore AE = 3, AC = 4,$$

如图，连结 BE ,

由作图可得： MN 是 AB 的垂直平分线，



$$\backslash AE = BE = 3, AD = BD,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\backslash BC = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2},$$

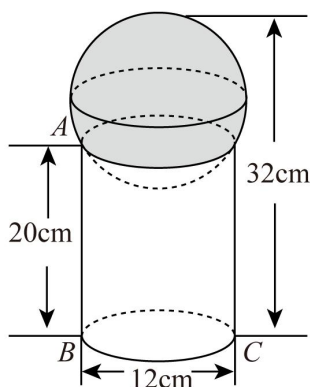
$$\backslash AB = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{6},$$

$$\backslash BD = \frac{1}{2}AB = \sqrt{6}.$$

故答案为： $\sqrt{6}$

【点睛】 本题考查的是线段的垂直平分线的作图与性质，勾股定理的应用，二次根式的化简，熟悉几何基本作图与基本图形的性质是解本题的关键.

15. 如图，将一个球放置在圆柱形玻璃瓶上，测得瓶高 $AB = 20\text{cm}$ ，底面直径 $BC = 12\text{cm}$ ，球的最高点到瓶底面的距离为 32cm ，则球的半径为_____cm（玻璃瓶厚度忽略不计）.



【答案】 7.5

【解析】

【分析】 如详解中图所示，将题中主视图做出来，用垂径定理、勾股定理计算即可.

【详解】 如下图所示，设球的半径为 $r\text{cm}$,

则 $OG = EG - r = EF - GF - r = EF - AB - r = 32 - 20 - r = (12 - r)\text{ cm}$,

$$\therefore \frac{4k(k-3)-[2(k-1)]^2}{4k} = 0, \text{ 得 } \frac{k+1}{k} = 0,$$

故 $k+1=0$ ，解得 $k=-1$ ，

故原函数的解析式为 $y = -x^2 - 4x - 4$ ，

故它的“Y函数”解析式为 $y = -x^2 + 4x - 4$ ，

故答案为： $y = 2x - 3$ 或 $y = -x^2 + 4x - 4$ 。

【点睛】 本题考查了新定义，二次函数图象与 x 轴的交点问题，坐标与图形变换-轴对称，求一次函数及二次函数的解析式，理解题意和采用分类讨论的思想是解决本题的关键。

三、解答题（本大题共有 8 个小题，共 72 分）

17. 已知方程组 $\begin{cases} x+y=3 \text{ ①} \\ x-y=2 \text{ ②} \end{cases}$ 的解满足 $2kx-3y < 5$ ，求 k 的取值范围。

【答案】 $k = \frac{13}{10}$

【解析】

【分析】 先求出二元一次方程组的解，代入 $2kx-3y < 5$ 中即可求 k ；

【详解】 解： 令①+②得， $2x = 5$ ，

解得： $x = \frac{5}{2}$ ，

将 $x = \frac{5}{2}$ 代入①中得， $\frac{5}{2} + y = 3$ ，

解得： $y = \frac{1}{2}$ ，

将 $x = \frac{5}{2}$ ， $y = \frac{1}{2}$ 代入 $2kx-3y < 5$ 得， $2 \times \frac{5}{2}k - 3 \times \frac{1}{2} < 5$ ，

解得： $k = \frac{13}{10}$ 。

【点睛】 本题主要考查解二元一次方程组、解一元一次不等式，掌握相关运算法则和方法是解本题的关键。

18. 先化简，再求值：

$$\left(\frac{a}{a^2-b^2} - \frac{1}{a+b} \right) \div \frac{b}{a^2-2ab+b^2}, \text{ 其中 } a = \left(\frac{1}{3} \right)^{-1}, \quad b = (-2022)^0.$$

【答案】 $\frac{a-b}{a+b}; \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 先合并括号里的分式，再将分式各部分因式分解并化简，代值求解即可；

【详解】解：原式 $= \left[\frac{a}{a^2 - b^2} - \frac{a - b}{(a + b)(a - b)} \right] \div \frac{b}{a^2 - 2ab + b^2}$

$$= \frac{b}{(a + b)(a - b)} \cdot \frac{a^2 - 2ab + b^2}{b}$$

$$= \frac{b}{(a + b)(a - b)} \cdot \frac{(a - b)^2}{b}$$

$$= \frac{a - b}{a + b}$$

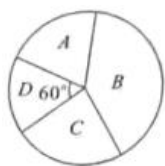
$\therefore a = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3, \quad b = (-2022)^0 = 1,$

$$\therefore \frac{a - b}{a + b} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{1}{2}.$$

【点睛】本题主要考查分式的化简并求值，掌握分式化简的相关运算法则是解本题的关键.

19. 为弘扬荆州传统文化，我市将举办中小学生“知荆州、爱荆州、兴荆州”知识竞赛活动. 某校举办选拔赛后，随机抽取了部分学生的成绩，按成绩（百分制）分为 A, B, C, D 四个等级，并绘制了如下不完整的统计图表.

等级	成绩 (x)	人数
A	$90 < x \leq 100$	m
B	$80 < x \leq 90$	24
C	$70 < x \leq 80$	14
D	$x \leq 70$	10



根据图表信息，回答下列问题：

- (1) 表中 $m =$ _____；扇形统计图中， B 等级所占百分比是 _____， C 等级对应的扇形圆心角为 _____ 度；
- (2) 若全校有 1400 人参加了此次选拔赛，则估计其中成绩为 A 等级的共有 _____ 人；
- (3) 若全校成绩为 100 分的学生有甲、乙、丙、丁 4 人，学校将从这 4 人中随机选出 2 人参加市级竞赛. 请通过列表或画树状图，求甲、乙两人至少有 1 人被选中的概率.

【答案】(1) 12; 40%; 84

(2) 280 (3) $\frac{5}{6}$

【解析】

【分析】(1) 先求出抽查总人数，再求 B 等级所占百分比、 C 等级对应的扇形圆心角、 m 的值；

(2) 用 1400 乘以成绩为 A 等级的学生人数的占比即可得结果；

(3) 根据列表法求概率即可.

【小问 1 详解】

解：抽查总人数为： $10 \div \frac{60^\circ}{360^\circ} = 60$ (人)；

$$m = 60 - (24 + 14 + 10) = 12;$$

$$B \text{ 等级所占百分比是: } \frac{24}{60} \times 100\% = 40\%;$$

$$C \text{ 等级对应的扇形圆心角为 } \frac{14}{60} \times 360^\circ = 84^\circ;$$

【小问 2 详解】

$$1400 \times \frac{12}{60} = 280 \text{ (人)};$$

$\therefore$ 若全校有 1400 人参加了此次选拔赛，则估计其中成绩为 A 等级的共有 280 人；

【小问 3 详解】

	甲	乙	丙	丁
甲		(甲, 乙)	(甲, 丙)	(甲, 丁)
乙	(甲, 乙)		(乙, 丙)	(乙, 丁)
丙	(甲, 丙)	(乙, 丙)		(丙, 丁)
丁	(甲, 丁)	(乙, 丁)	(丙, 丁)	

$$P(\text{甲、乙两人至少有 1 人被选中}) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

【点睛】本题主要考查统计图和扇形统计图、根据样本所占比估计总量、概率的求解，掌握相关计算公式和概率的求解方法是解题的关键.

20. 如图，在 10×10 的正方形网格中，小正方形的顶点称为格点，顶点均在格点上的图形称为格点图形，图中 $\triangle ABC$ 为格点三角形. 请按要求作图，不需证明.

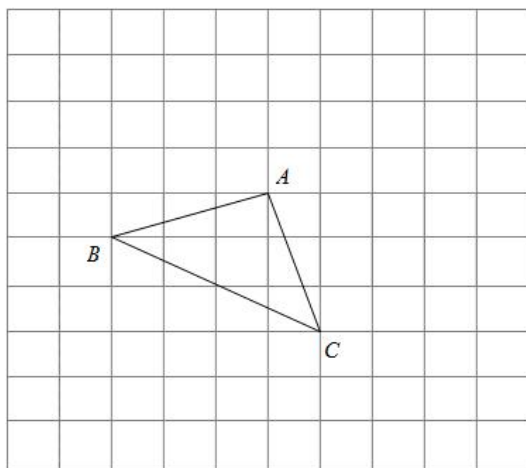


图1

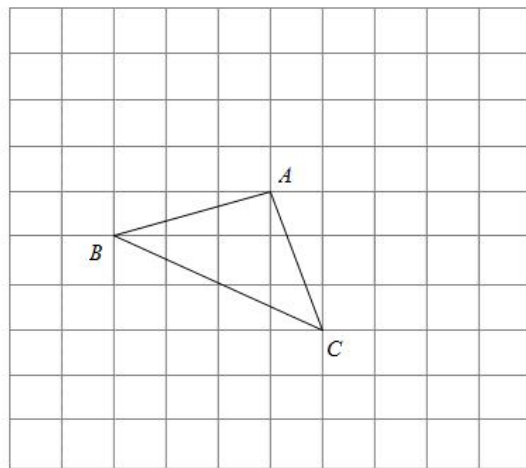


图2

(1) 在图 1 中，作出与 $\triangle ABC$ 全等的所有格点三角形，要求所作格点三角形与 $\triangle ABC$ 有一条公共边，且不与 $\triangle ABC$ 重叠；

(2) 在图 2 中，作出以 BC 为对角线的所有格点菱形。

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

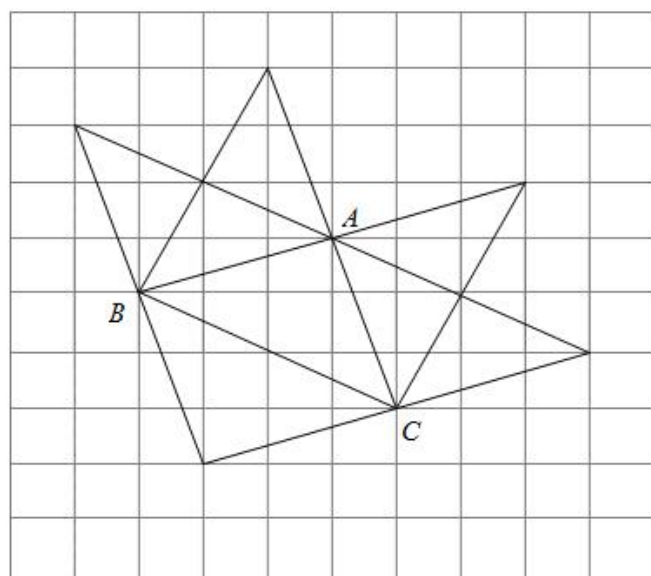
【解析】

【分析】 对于 (1)，以 AC 为公共边的有 2 个，以 AB 为公共边的有 2 个，以 BC 为公共边的有 1 个，一共有 5 个，作出图形即可；

对于 (2)， $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，以 BC 为对角线的菱形只有 1 个，作出图形即可。

【小问 1 详解】

如图所示。



【小问 2 详解】

如图所示。

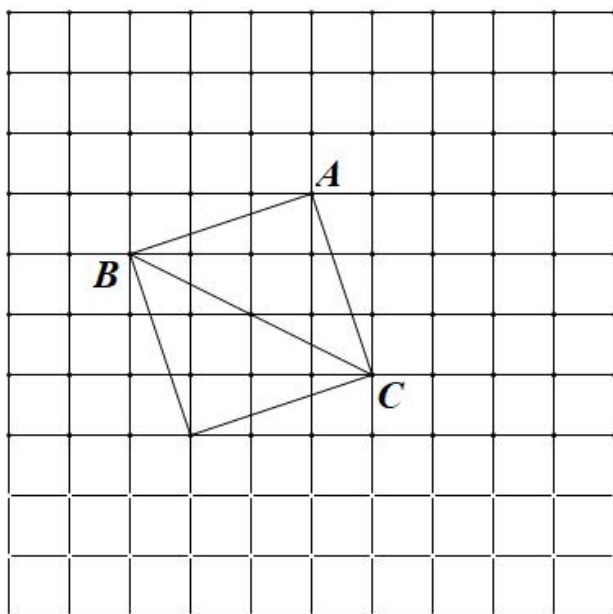
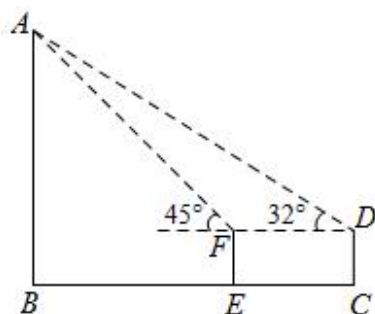


图2

【点睛】本题主要考查了作格点三角形和菱形，理解题意是解题的关键.

21. 荆州城徽“金凤腾飞”立于古城东门外. 如图, 某校学生测量其高 AB (含底座), 先在点 C 处用测角仪测得其顶端 A 的仰角为 32° , 再由点 C 向城徽走 $6.6m$ 到 E 处, 测得顶端 A 的仰角为 45° , 已知 B, E, C 三点在一直线上, 测角仪离地面的高度 $CD = EF = 1.5m$, 求城徽的高 AB . (参考数据: $\sin 32^\circ \approx 0.530$, $\cos 32^\circ \approx 0.848$, $\tan 32^\circ \approx 0.625$)



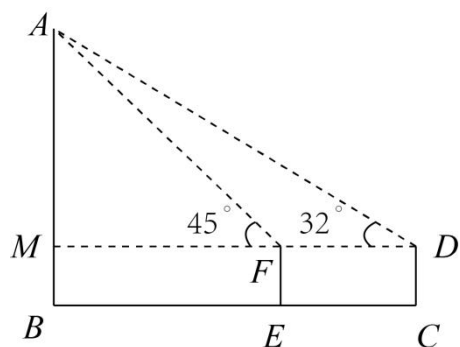
【答案】城徽的高 AB 约为12.5米.

【解析】

【分析】如图, 延长 DF 交 AB 于 M , 由题意可得: $DF \parallel BC, DC \perp BC, FE \perp BC, AB \perp BC$, 所以四边形 $BMFE$, 四边形 $EFCD$, 四边形 $BMDC$ 都为矩形; 设 $AM = x$, 再表示 MF , 再利用锐角的正切建立方程, 解方程即可.

【详解】解: 如图, 延长 DF 交 AB 于 M , 由题意可得: $DF \parallel BC, DC \perp BC, FE \perp BC, AB \perp BC$, 所以四边形 $BMFE$, 四边形 $EFCD$, 四边形 $BMDC$ 都为矩形;

$$CD = EF = BM = 1.5, CE = DF = 6.6, BE = FM, BC = MD,$$



设 $AM = x$ ，而 $\angle AFE = 45^\circ$ ， $\angle AMF = 90^\circ$ ，

$$\therefore MF = AM = x, DM = x + 6.6,$$

$$\text{由 } \tan \angle ADM = \frac{AM}{DM},$$

$$\therefore \frac{x}{x+6.6} = 0.625,$$

解得： $x = 11$ ，经检验符合题意，

所以 $AB = 11 + 1.5 = 12.5$ 。

答：城徽的高 AB 约为 12.5 米。

【点睛】 本题考查的是矩形的判定与性质，解直角三角形的应用，作出适当的辅助线构建直角三角形是解本题的关键。

22. 小华同学学习函数知识后，对函数 $y = \begin{cases} 4x^2 & (-1 < x \leq 0) \\ -\frac{4}{x} & (x \leq -1 \text{ 或 } x > 0) \end{cases}$ 通过列表、描点、连线，画出了如图 1 所

示的图象。

x	...	-4	-3	-2	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	2	3	4	...
y	...	1	$\frac{4}{3}$	2	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	-4	-2	$-\frac{4}{3}$	-1	...

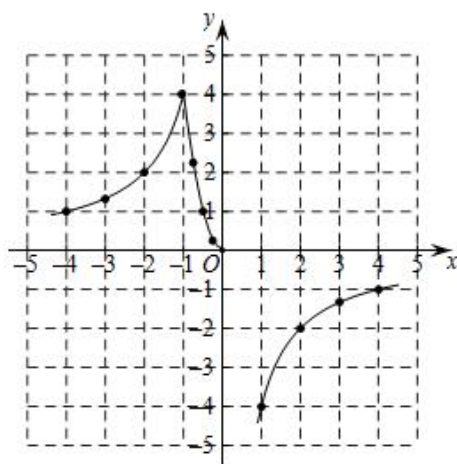


图1

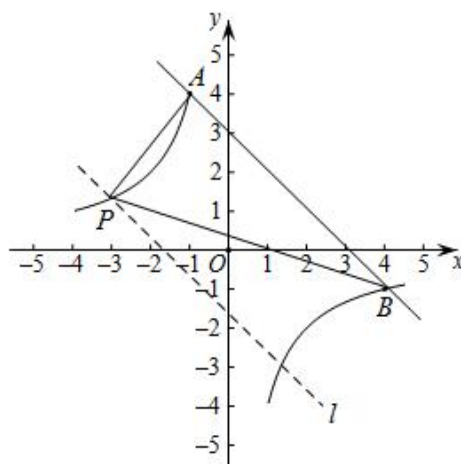


图2

请根据图象解答：

(1) 【观察发现】①写出函数的两条性质：_____；_____；②若函数图象上的两点 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) 满足 $x_1 + x_2 = 0$ ，则 $y_1 + y_2 = 0$ 一定成立吗？_____。（填“一定”或“不一定”）

(2) 【延伸探究】如图2，将过 $A(-1, 4)$ ， $B(4, -1)$ 两点的直线向下平移 n 个单位长度后，得到直线 l 与函数 $y = -\frac{4}{x} (x \leq -1)$ 的图象交于点 P ，连接 PA ， PB 。

①求当 $n = 3$ 时，直线 l 的解析式和 $\triangle PAB$ 的面积；

②直接用含 n 的代数式表示 $\triangle PAB$ 的面积。

【答案】(1) ①当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小； $x \leq -1, x \geq 1$ 两段图象关于原点对称；（答案不唯一）

②不一定； (2) ① $y = -x + 3$ ； $\frac{15}{2}$ ；② $\frac{5}{2}n$ 。

【解析】

【分析】(1) ①直接观察图象写出两条性质即可（答案不唯一）；②不成立举出反例即可；

(2) 求出 AB 所在直线解析式，利用函数图象平移规律即可求得直线 l 的解析式；求解 $\triangle PAB$ 的面积时，以 AB 为底边，设直线 AB 与 y 轴交点记为 C ，如详解中图所示，过点 C 向直线 l 作垂线，垂足记为 Q ，因为平行线之间的距离处处相等，所以 AB 边上的高为 CQ ，表示出 CQ 即可求出三角形面积。

【小问1详解】

①观察函数图像可得其性质：当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小； $x \leq -1, x \geq 1$ 两段图象关于原点对称；

②不一定，当 $x_1 = -\frac{1}{2}$ 时， $y_1 = 1$ ，当 $x_2 = \frac{1}{2}$ 时， $y_2 = -8$ ，此时 $y_1 + y_2 \neq 0$ ；

【小问2详解】

①设 AB 所在直线解析式为： $y = kx + b$ ，

将 $A(-1, 4)$, $B(4, -1)$ 代入得,
$$\begin{cases} -k + b = 4 \\ 4k + b = -1 \end{cases},$$

解方程组得
$$\begin{cases} k = -1 \\ b = 3 \end{cases},$$

则 AB 所在直线解析式为: $y = -x + 3$,

$\therefore n = 3$, 向下平移三个单位后,

直线 l 解析式为: $y = -x$,

如下图所示, 设直线 AB 与 y 轴交点记为 C , 则 C 点坐标为 $(0, 3)$,

过点 C 向直线 l 作垂线, 垂足记为 Q ,

易知直线 l 过原点, 且 $k = -1$,

$\therefore$ 直线 AB 、直线 l 与 x 轴负方向夹角都为 45° ,

则 $\angle COQ = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, 且 $OC = 3$,

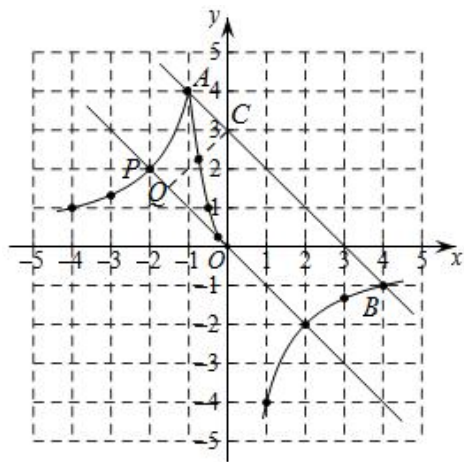
在等腰直角 $\triangle COQ$ 中, $CQ = OC \sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,

则 A 、 B 两点之间距离为 $\sqrt{(-1-4)^2 + [4-(-1)]^2} = 5\sqrt{2}$,

在 $\triangle PAB$ 中以 AB 为底边, 因为平行线之间的距离处处相等, 所以 AB 边上的高为 $CQ = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,

则 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} AB \cdot CQ = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{15}{2}$,

故直线 l 的解析式为 $y = -x + 3$, $\triangle PAB$ 的面积为 $\frac{15}{2}$;

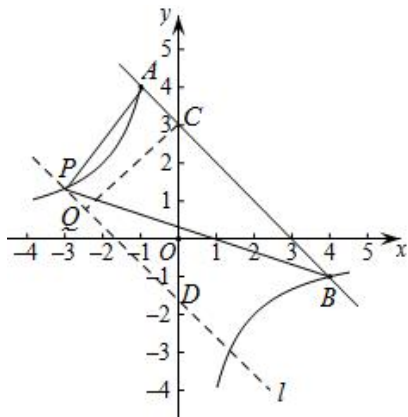


②如下图所示, 直线 l 与 y 轴交点记为 D , 则 CD 的长度即为向下平移的距离 n ,

由①知 $\triangle CDQ$ 为等腰直角三角形,

$$\text{则 } CQ' = CD \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} CD,$$

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} AB \cdot CQ' = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} n = \frac{5}{2} n.$$



【点睛】本题考查了函数的图象、待定系数法求一次函数解析式、函数与三角形结合、函数图象平移等知识点，题目比较综合，根据平行线之间垂线段处处相等，寻找到 $\triangle PAB$ 中 AB 边上的高是解题的关键。

23. 某企业投入 60 万元 (只计入第一年成本) 生产某种产品, 按网上订单生产并销售 (生产量等于销售量). 经测算, 该产品网上每年的销售量 y (万件) 与售价 x (元/件) 之间满足函数关系式 $y = 24 - x$, 第一年除 60 万元外其他成本为 8 元/件.

- (1) 求该产品第一年的利润 w (万元) 与售价 x 之间的函数关系式;
- (2) 该产品第一年利润为 4 万元, 第二年将它全部作为技改资金再次投入 (只计入第二年成本) 后, 其他成本下降 2 元/件. ①求该产品第一年的售价; ②若第二年售价不高于第一年, 销售量不超过 13 万件, 则第二年利润最少是多少万元?

【答案】(1) $w = -x^2 + 32x - 252$

(2) ①第一年的售价为每件 16 元, ②第二年的最低利润为 61 万元.

【解析】

【分析】(1) 由总利润等于每件产品的利润乘以销售的数量, 再减去投资成本, 从而可得答案;
(2) ①把 $w = 4$ 代入 (1) 的函数解析式, 再解方程即可, ②由总利润等于每件产品的利润乘以销售的数量, 再减去投资成本, 列函数关系式, 再利用二次函数的性质求解利润范围即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: 由题意得:

$$\begin{aligned} w &= (x - 8)y - 60 \\ &= (x - 8)(24 - x) - 60 \end{aligned}$$

$$=-x^2+32x-252,$$

【小问2详解】

①由(1)得：当 $w=4$ 时，

$$\text{则 } -x^2+32x-252=4, \text{ 即 } x^2-32x+256=0,$$

$$\text{解得： } x_1=x_2=16,$$

即第一年的售价为每件16元，

② $\because$ 第二年售价不高于第一年，销售量不超过13万件，

$$\begin{cases} x \leq 16 \\ 24-x \leq 13 \end{cases}, \text{ 解得： } 11 \leq x \leq 16,$$

$\therefore$ 其他成本下降2元/件，

$$\therefore w=(x-6)(24-x)-4=-x^2+30x-148,$$

$$\therefore \text{ 对称轴为 } x=-\frac{30}{2 \times (-1)}=15, \quad a=-1<0,$$

$\therefore$ 当 $x=15$ 时，利润最高，为77万元，而 $11 \leq x \leq 16$ ，

$$\text{当 } x=11 \text{ 时， } w=5 \times 13-4=61 \text{ (万元)}$$

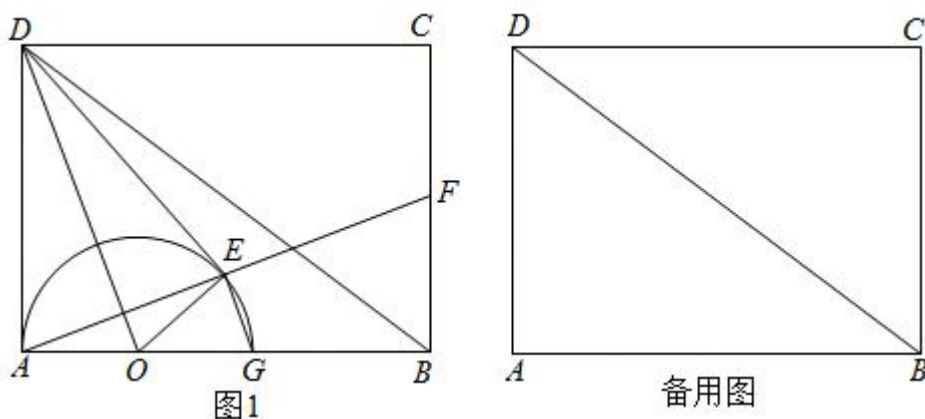
$$\text{当 } x=16 \text{ 时， } w=10 \times 8-4=76 \text{ (万元)}$$

$$\therefore 61 \leq w \leq 77,$$

所以第二年的最低利润为61万元.

【点睛】 本题考查的是二次函数的实际应用，二次函数的性质，理解题意，列出函数关系式，再利用二次函数的性质解题是关键.

24. 如图1，在矩形 $ABCD$ 中， $AB=4$ ， $AD=3$ ，点 O 是边 AB 上一个动点（不与点 A 重合），连接 OD ，将 $\triangle OAD$ 沿 OD 折叠，得到 $\triangle OED$ ；再以 O 为圆心， OA 的长为半径作半圆，交射线 AB 于 G ，连接 AE 并延长交射线 BC 于 F ，连接 EG ，设 $OA=x$.



- (1) 求证：DE 是半圆 O 的切线；
- (2) 当点 E 落在 BD 上时，求 x 的值；
- (3) 当点 E 落在 BD 下方时，设 $\triangle AGE$ 与 $\triangle AFB$ 面积的比值为 y，确定 y 与 x 之间的函数关系式；
- (4) 直接写出：当半圆 O 与 $\triangle BCD$ 的边有两个交点时，x 的取值范围。

【答案】(1) 见详解 (2) $\frac{3}{2}$

$$(3) y = \frac{9x^2}{4x^2 + 36} (0 < x < \frac{3}{2})$$

$$(4) \frac{3}{2} < x \leq 3 \text{ 或 } \frac{25}{8} < x \leq 4$$

【解析】

【分析】(1) 根据切线的判定定理求解即可；

(2) 如图，在 $Rt\triangle OEB$ ，根据勾股定理列方程求解即可；

(3) 先证 $\triangle DAO \sim \triangle AEG$ ，求出 AE，然后证明 $\triangle AEG \sim \triangle ABF$ ，根据相似三角形面积比等于相似比的平方即可求解；

(4) 结合图形，分情况讨论即可求出 x 的取值范围。

【小问 1 详解】

证明：在矩形 ABCD 中， $\angle DAB = 90^\circ$ ，

$\because \triangle OED$ 是 $\triangle OAD$ 沿 OD 折叠得到的，

$\therefore \angle OED = \angle DAB = 90^\circ$ ，即 $OE \perp DE$ ，

$\therefore DE$ 是半圆 O 的切线；

【小问 2 详解】

解： $\because \triangle OED$ 是 $\triangle OAD$ 沿 OD 折叠得到的，

$$\therefore DE = AD = 3, OA = OE = x,$$

$$\therefore OB = AB - OA = 4 - x,$$

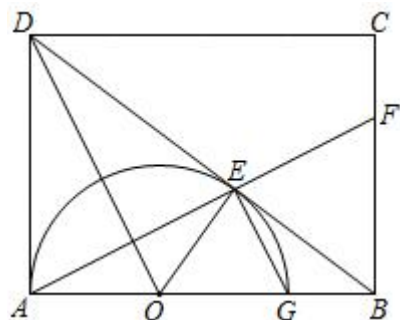
$$\text{在 } Rt\triangle DAB \text{ 中, } DB = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore EB = DB - DE = 5 - 3 = 2,$$

$$\text{在 } Rt\triangle OEB \text{ 中, } OE^2 + EB^2 = OB^2,$$

$$\therefore x^2 + 2^2 = (4 - x)^2, \text{ 解得 } x = \frac{3}{2},$$

答: x 的值为 $\frac{3}{2}$.



【小问 3 详解】

$$\text{解: 在 } Rt\triangle DAO \text{ 中, } DO = \sqrt{AD^2 + AO^2} = \sqrt{3^2 + x^2} = \sqrt{9 + x^2},$$

$\because \triangle OED$ 是 $\triangle OAD$ 沿 OD 折叠得到的,

$$\therefore AE \perp OD,$$

$\because AG$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle AEG = 90^\circ, \text{ 即 } AE \perp EG,$$

$$\therefore OD \parallel EG, \angle DAO = \angle AEG = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AOD = \angle EGA,$$

$$\therefore \triangle DAO \sim \triangle AEG,$$

$$\therefore \frac{DO}{AG} = \frac{DA}{AE},$$

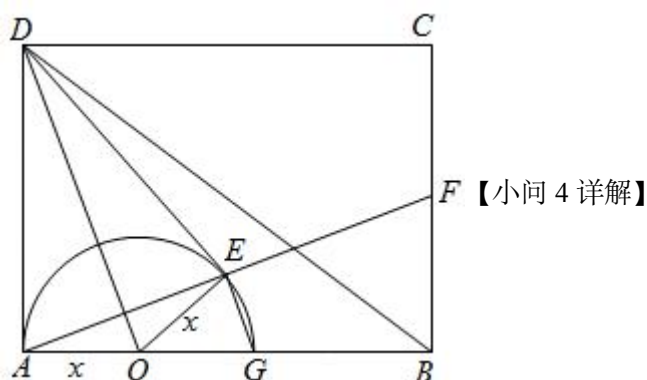
$$\therefore \frac{\sqrt{9^2 + x^2}}{2x} = \frac{3}{AE}, AE = \frac{6x}{\sqrt{9^2 + x^2}},$$

$$\because \angle AEG = \angle ABC = 90^\circ, \angle EAG = \angle BAF,$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle ABF,$$

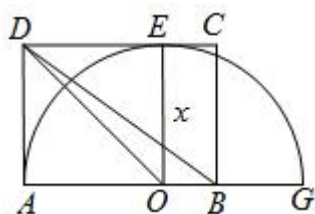
$$\therefore \frac{S_{\triangle AGE}}{S_{\triangle AFB}} = \left(\frac{AE}{AB} \right)^2, \text{ 即 } y = \left(\frac{\frac{6x}{\sqrt{9^2 + x^2}}}{4} \right)^2 = \frac{9x^2}{4(9 + x^2)},$$

$$\therefore y = \frac{9x^2}{4x^2 + 36} \quad (0 < x < \frac{3}{2})$$



解：由 (2) 知，当 E 在 DB 上时， $x = \frac{3}{2}$ ，

如图，当点 E 在 DC 上时， $x = 3$ ，



$\therefore$ 当 $\frac{3}{2} < x \leq 3$ 时，半圆 O 与 $\triangle BCD$ 的边有两个交点；

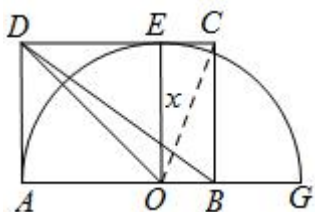
当半圆 O 经过点 C 时，半圆 O 与 $\triangle BCD$ 的边有两个交点，

连接 OC ，在 $Rt\triangle OBC$ 中， $OB = 4 - x$ ， $OC = x$ ， $BC = 3$ ，

$$\therefore OB^2 + BC^2 = OC^2,$$

$$\therefore (4 - x)^2 + 3^2 = x^2, \text{ 解得 } x = \frac{25}{8},$$

$\therefore$ 当 $\frac{25}{8} \leq x \leq 4$ 时，半圆 O 与 $\triangle BCD$ 的边有两个交点；



综上所述，当半圆 O 与 $\triangle BCD$ 的边有两个交点时， x 的取值范围为： $\frac{3}{2} < x \leq 3$ 或 $\frac{25}{8} \leq x \leq 4$ 。

【点睛】 本题考查了矩形的性质，轴对称，勾股定理，切线的判定定理，相似三角形的判定和性质，直径所对的圆周角是直角，相似三角形的判定和性质是解本题的关键。

淘宝：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022