

2022 年河南省普通高中招生考试试卷数学

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）下列各小题均有四个选项，其中只有一个是正确的.

1. $-\frac{1}{2}$ 的相反数是 ()

- A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据相反数的性质，互为相反数的两个数的和为 0 即可求解.

【详解】解：因为 $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$,

所以 $-\frac{1}{2}$ 的相反数是 $\frac{1}{2}$.

故选：D.

【点睛】本题考查求一个数的相反数，掌握相反数的性质是解题关键.

2. 2022 年北京冬奥会的奖牌“同心”表达了“天地合·人心同”的中华文化内涵，将这六个汉字分别写在某正方体的表面上，如图是它的一种展开图，则在原正方体中，与“地”字所在面相对的面上的汉字是 ()



- A. 合 B. 同 C. 心 D. 人

【答案】D

【解析】

【分析】根据正方体的展开图进行判断即可；

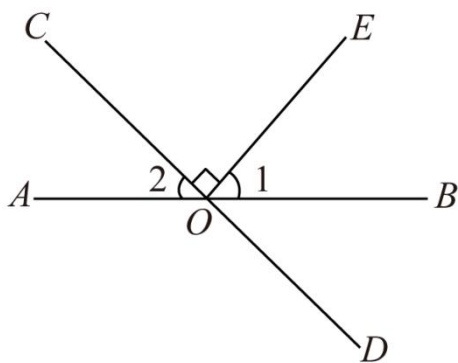
【详解】解：由正方体的展开图可知“地”字所在面相对的面上的汉字是“人”；

故选：D.

【点睛】本题主要考查正方体的展开图相对两个面上的文字，注意正方体的空间图形，从相对面入手是解

题的关键.

3. 如图，直线 AB , CD 相交于点 O , $EO \perp CD$, 垂足为 O . 若 $\angle 1 = 54^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数为 ()



- A. 26° B. 36° C. 44° D. 54°

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据垂直的定义可得 $\angle COE = 90^\circ$, 根据平角的定义即可求解.

【详解】 解: $\because EO \perp CD$,

$$\therefore \angle COE = 90^\circ,$$

$$\because \angle 1 + \angle COE + \angle 2 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ.$$

故选: B .

【点睛】 本题考查了垂线的定义, 平角的定义, 数形结合是解题的关键.

4. 下列运算正确的是 ()

- A. $2\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2$ B. $(a+1)^2 = a^2 + 1$ C. $(a^2)^3 = a^5$ D. $2a^2 \cdot a = 2a^3$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据二次根式的加减, 完全平方公式, 幂的乘方, 单项式乘以单项式逐项分析判断即可求解.

【详解】 解: A. $2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$, 故该选项不正确, 不符合题意;

B. $(a+1)^2 = a^2 + 1 + 2a$, 故该选项不正确, 不符合题意;

C. $(a^2)^3 = a^6$, 故该选项不正确, 不符合题意;

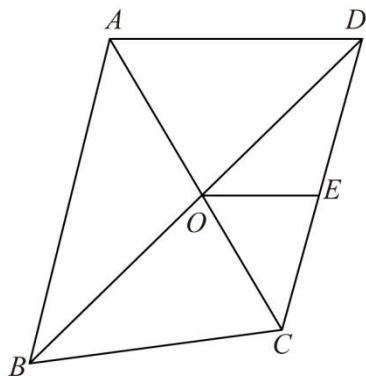
D. $2a^2 \cdot a = 2a^3$, 故该选项正确, 符合题意;

故选: D.

【点睛】 本题考查了二次根式的加减, 完全平方公式, 幂的乘方, 单项式乘以单项式, 正确地计算是解题

的关键.

5. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC , BD 相交于点 O ，点 E 为 CD 的中点. 若 $OE = 3$ ，则菱形 $ABCD$ 的周长为 ()



- A. 6 B. 12 C. 24 D. 48

【答案】C

【解析】

【分析】由菱形的性质可得出 $BO=DO$ ， $AB=BC=CD=DA$ ，再根据中位线的性质可得 $BC = 2OE = 6$ ，结合菱形的周长公式即可得出结论.

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

∴ $BO=DO$ ， $AB=BC=CD=DA$ ，

∵ $OE=3$ ，且点 E 为 CD 的中点，

∴ OE 是 $\triangle BCD$ 的中位线，

∴ $BC=2OE=6$.

∴ 菱形 $ABCD$ 的周长为： $4BC=4 \times 6=24$.

故选：C.

【点睛】本题考查了菱形的性质以及中位线的性质，解题的关键是求出 $AD=6$.

6. 一元二次方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的根的情况是 ()

- A. 有两个不相等的实数根 B. 没有实数根
C. 有两个相等的实数根 D. 只有一个实数根

【答案】A

【解析】

【分析】计算一元二次方程根的判别式进而即可求解.

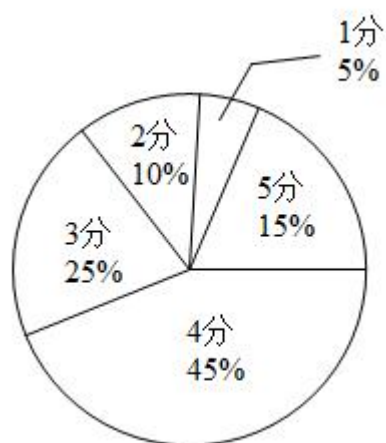
【详解】解： $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 = 5 > 0$

∴一元二次方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的根的情况是有两个不相等的实数根，

故选：A.

【点睛】本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, a , b , c 为常数) 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ，理解根的判别式对应的根的三种情况是解题的关键. 当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程没有实数根.

7. 如图所示的扇形统计图描述了某校学生对课后延时服务的打分情况（满分 5 分），则所打分数的众数为（ ）



- A. 5 分 B. 4 分 C. 3 分 D. 45%

【答案】B

【解析】

【分析】根据扇形统计图中得分情况的所占比多少来判断即可；

【详解】解：由扇形统计图可知：

1 分所占百分比：5%；

2 分所占百分比：10%；

3 分所占百分比：25%；

4 分所占百分比：45%；

5 分所占百分比：15%；

可知，4 分所占百分比最大，故 4 分出现的次数最多，

∴所打分数的众数为 4；

故选：B.

【点睛】本题主要考查众数的概念，扇形统计图，理解扇形统计图中最大百分比是所打分数的众数，这是

解本题的关键.

8. 《孙子算经》中记载：“凡大数之法，万万曰亿，万万亿曰兆.” 说明了大数之间的关系：1 亿 = 1 万 $\times$ 1 万，1 兆 = 1 万 $\times$ 1 万 $\times$ 1 亿，则 1 兆等于 ()

- A. 10^8 B. 10^{12} C. 10^{16} D. 10^{24}

【答案】C

【解析】

【分析】将 1 万表示成 10^4 ，1 亿表示成 10^8 ，然后用同底数幂的乘法法则计算即可.

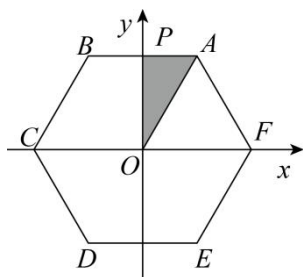
【详解】 $\because$ 1 兆 = 1 万 $\times$ 1 万 $\times$ 1 亿，

$$\therefore 1 \text{ 兆} = 10^4 \times 10^4 \times 10^8 = 10^{16},$$

故选：C.

【点睛】本题考查同底数幂的乘法法则，科学记数法的表示方法，其中 a 的范围是 $1 \leq |a| < 10$ ， n 是整数，正确确定 a ， n 的值是解答本题的关键.

9. 如图，在平面直角坐标系中，边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 的中心与原点 O 重合， $AB \parallel x$ 轴，交 y 轴于点 P . 将 $\triangle OAP$ 绕点 O 顺时针旋转，每次旋转 90° ，则第 2022 次旋转结束时，点 A 的坐标为 ()



- A. $(\sqrt{3}, -1)$ B. $(-1, -\sqrt{3})$ C. $(-\sqrt{3}, -1)$ D. $(1, \sqrt{3})$

【答案】B

【解析】

【分析】首先确定点 A 的坐标，再根据 4 次一个循环，推出经过第 2022 次旋转后，点 A 的坐标即可.

【详解】解：正六边形 $ABCDEF$ 边长为 2，中心与原点 O 重合， $AB \parallel x$ 轴，

$$\therefore AP = 1, \quad AO = 2, \quad \angle OPA = 90^\circ,$$

$$\therefore OP = \sqrt{AO^2 - AP^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore A(1, \sqrt{3}),$$

第1次旋转结束时，点A的坐标为 $(\sqrt{3}, -1)$ ；

第2次旋转结束时，点A的坐标为 $(-1, -\sqrt{3})$ ；

第3次旋转结束时，点A的坐标为 $(-\sqrt{3}, 1)$ ；

第4次旋转结束时，点A的坐标为 $(1, \sqrt{3})$ ；

$\therefore$ 将 $\triangle OAP$ 绕点O顺时针旋转，每次旋转 90° ，

$\therefore$ 4次一个循环，

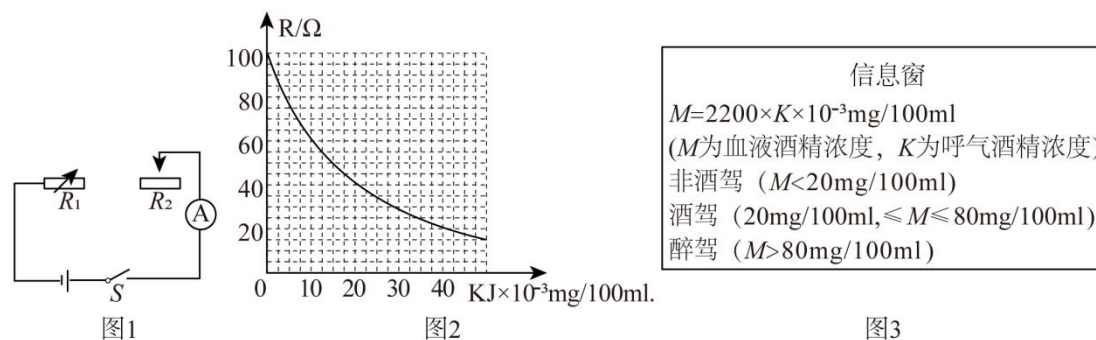
$\therefore 2022 \div 4 = 505 \cdots 2$ ，

$\therefore$ 经过第2022次旋转后，点A的坐标为 $(-1, -\sqrt{3})$ ，

故选：B

【点睛】本题考查正多边形与圆，规律型问题，坐标与图形变化—旋转等知识，解题的关键是学会探究规律的方法，属于中考常考题型。

10. 呼气式酒精测试仪中装有酒精气体传感器，可用于检测驾驶员是否酒后驾车。酒精气体传感器是一种气敏电阻（图1中的 R_1 ）， R_1 的阻值随呼气酒精浓度 K 的变化而变化（如图2），血液酒精浓度 M 与呼气酒精浓度 K 的关系见图3。下列说法不正确的是（ ）



A. 呼气酒精浓度 K 越大， R_1 的阻值越小

B. 当 $K = 0$ 时， R_1 的阻值为 100

C. 当 $K = 10$ 时，该驾驶员为非酒驾状态

D. 当 $R_1 = 20$ 时，该驾驶员为醉驾状态

【答案】C

【解析】

【分析】根据函数图象分析即可判断 A，B，根据图3公式计算即可判定 C，D。

【详解】解：根据函数图象可得，

A. R 随 K 的增大而减小，则呼气酒精浓度 K 越大， R_1 的阻值越小，故正确，不符合题意；

B. 当 $K=0$ 时, R_1 的阻值为 100, 故正确, 不符合题意;

C. 当 $K=10$ 时, 则 $M=2200 \times K \times 10^{-3} = 2200 \times 10 \times 10^{-3} = 22\text{mg}/100\text{ml}$, 该驾驶员为酒驾状态, 故该选项不正确, 符合题意;

D. 当 $R_1=20$ 时, $K=40$, 则 $M=2200 \times K \times 10^{-3} = 2200 \times 40 \times 10^{-3} = 88\text{mg}/100\text{ml}$, 该驾驶员为醉驾状态, 故该选项正确, 不符合题意;

故选:C.

【点睛】本题考查了函数图像, 根据函数图像获取信息是解题的关键.

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

11. 请写出一个 y 随 x 增大而增大的一次函数表达式_____.

【答案】 $y=x$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】在此解析式中, 当 x 增大时, y 也随着增大, 这样的一次函数表达式有很多, 根据题意写一个即可.

【详解】解: 如 $y=x$, y 随 x 的增大而增大.

故答案为: $y=x$ (答案不唯一).

【点睛】此题属于开放型试题, 答案不唯一, 考查了一次函数的性质, 熟练掌握一次函数的增减性是解题关键.

12. 不等式组 $\begin{cases} x-3 \leq 0, \\ \frac{x}{2} > 1 \end{cases}$ 的解集为_____.

【答案】 $2 < x \leq 3$

【解析】

【分析】分别求出每一个不等式的解集, 根据口诀: 同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集.

【详解】解: $\begin{cases} x-3 \leq 0 \text{ ①} \\ \frac{x}{2} > 1 \text{ ②} \end{cases}$

解不等式①得: $x \leq 3$

解不等式②得: $x > 2$

$\therefore$ 不等式组的解集为: $2 < x \leq 3$

故答案为: $2 < x \leq 3$

【点睛】 本题考查了解一元一次不等式组，正确掌握一元一次不等式解集确定方法是解题的关键.

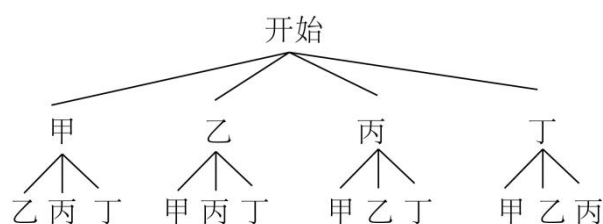
13. 为开展“喜迎二十大、永远跟党走、奋进新征程”主题教育宣讲活动，某单位从甲、乙、丙、丁四名宣讲员中随机选取两名进行宣讲，则恰好选中甲和丙的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】 根据题意，画出树状图，可得一共有 12 种等可能结果，其中恰好选中甲和丙的有 2 种，再根据概率公式计算，即可求解.

【详解】 解：根据题意，画出树状图，如下：



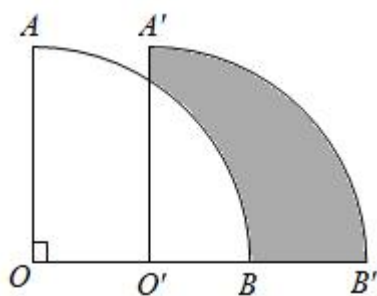
一共有 12 种等可能结果，其中恰好选中甲和丙的有 2 种，

所以恰好选中甲和丙的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

故答案为： $\frac{1}{6}$

【点睛】 利用树状图或列表法求概率，明确题意，准确画出树状图或列出表格是解题的关键.

14. 如图，将扇形 AOB 沿 OB 方向平移，使点 O 移到 OB 的中点 O' 处，得到扇形 $A'O'B'$. 若 $\angle O = 90^\circ$ ， $OA = 2$ ，则阴影部分的面积为_____.

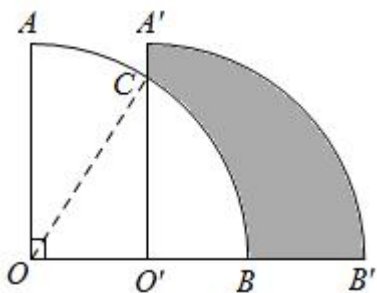


【答案】 $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 设 $A'O$ 与扇形 AOB 交于点 C ，连接 OC ，解 $\text{Rt}\triangle OCO'$ ，求得 $O'C = \sqrt{3}$ ， $\angle COB = 60^\circ$ ，根据阴影部分的面积为 $S_{\text{扇形}A'O'B'} - (S_{\text{扇形}OCB} - S_{\triangle OCO'})$ ，即可求解.

【详解】如图，设 $A'O$ 与扇形 AOB 交于点 C ，连接 OC ，如图



$\because O'$ 是 OB 的中点

$$\therefore OO' = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}OA = 1, OA = 2,$$

$\because \angle AOB = 90^\circ$ ，将扇形 AOB 沿 OB 方向平移，

$$\therefore \angle A'O'O = 90^\circ$$

$$\therefore \cos \angle COB = \frac{OO'}{OC} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle COB = 60^\circ$$

$$\therefore O'C = OC \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

$\therefore$ 阴影部分的面积为 $S_{\text{扇形}A'O'B'} - (S_{\text{扇形}OCB} - S_{\triangle OCO'})$

$$= S_{\text{扇形}AOB} - S_{\text{扇形}OCB} + S_{\triangle OCO'}$$

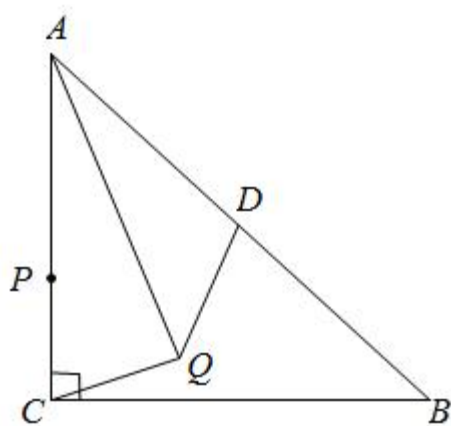
$$= \frac{90}{360} \pi \times 2^2 - \frac{60}{360} \pi \times 2^2 + \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3}$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

故答案为： $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

【点睛】 本题考查了解直角三角形，求扇形面积，平移的性质，求得 $\angle COB = 60^\circ$ 是解题的关键.

15. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 2\sqrt{2}$ ，点 D 为 AB 的中点，点 P 在 AC 上，且 $CP = 1$ ，将 CP 绕点 C 在平面内旋转，点 P 的对应点为点 Q ，连接 AQ ， DQ 。当 $\angle ADQ = 90^\circ$ 时， AQ 的长为_____.

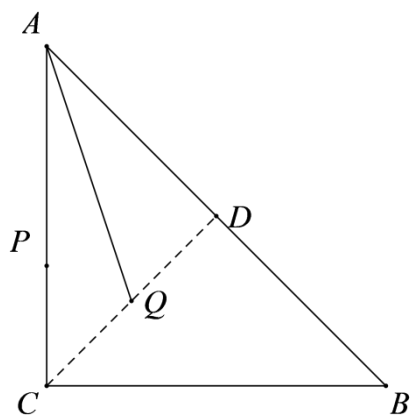


【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】连接 CD ，根据题意可得，当 $\angle ADQ = 90^\circ$ 时， Q 点在 CD 上，且 $CQ = CP = 1$ ，勾股定理求得 AQ 即可．

【详解】如图，连接 CD ，



∵ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 2\sqrt{2}$ ，

∴ $AB = 4$ ， $CD \perp AD$ ，

∴ $CD = \frac{1}{2}AB = 2$ ，

根据题意可得，当 $\angle ADQ = 90^\circ$ 时， Q 点在 CD 上，且 $CQ = CP = 1$ ，

∴ $DQ = CD - CQ = 2 - 1 = 1$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADQ$ 中， $AQ = \sqrt{AD^2 + DQ^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ，

故答案为： $\sqrt{5}$.

【点睛】本题考查了旋转的性质，勾股定理，直角三角形斜边上中线的性质，确定点 Q 的位置是解题的关键.

三、解答题（本大题共 8 个小题，共 75 分）

16. (1) 计算： $\sqrt[3]{27} - \left(\frac{1}{3}\right)^0 + 2^{-1}$;

(2) 化简： $\frac{x^2-1}{x} \div \left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

【答案】(1) $\frac{5}{2}$; (2) $x+1$

【解析】

【分析】(1) 根据求一个数的立方根，零指数幂，负整指数幂进行计算即可求解；

(2) 原式括号中两项通分并利用异分母分式的减法法则计算，同时利用除法法则变形，约分即可得到结果.

【详解】(1) 解：原式 $= 3 - 1 + \frac{1}{2}$

$$= \frac{5}{2}$$

(2) 解：原式 $= \frac{(x+1)(x-1)}{x} \div \frac{x-1}{x}$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{x} \cdot \frac{x}{x-1}$$

$$= x+1$$

【点睛】本题考查了求一个数的立方根，零指数幂，负整指数幂，分式的混合运算，正确的计算是解题的关键.

17. 2022 年 3 月 23 日下午，“天宫课堂”第二课在中国空间站开讲，神舟十三号乘组航天员翟志刚、王亚平、叶光富相互配合进行授课，这是中国空间站的第二次太空授课，被许多中小学生称为“最牛网课”。某中学为了解学生对“航空航天知识”的掌握情况，随机抽取 50 名学生进行测试，并对成绩（百分制）进行整理，信息如下：

a. 成绩频数分布表：

成绩 x (分)	$50 \leq x < 60$	$60 \leq x < 70$	$70 \leq x < 80$	$80 \leq x < 90$	$90 \leq x \leq 100$
频数	7	9	12	16	6

b. 成绩在 $70 \leq x < 80$ 这一组的是 (单位：分)：

70 71 72 72 74 77 78 78 78 79 79 79

根据以上信息，回答下列问题：

- (1) 在这次测试中，成绩的中位数是_____分，成绩不低于 80 分的人数占测试人数的百分比为_____.
- (2) 这次测试成绩的平均数是 76.4 分，甲的测试成绩是 77 分. 乙说：“甲的成绩高于平均数，所以甲的成绩高于一半学生的成绩.” 你认为乙的说法正确吗？请说明理由.
- (3) 请对该校学生“航空航天知识”的掌握情况作出合理的评价.

【答案】 (1) 78.5, 44%

(2) 不正确. 理由见解析

(3) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 因为共 50 名学生参加测试，故中位数为第 25、26 名学生成绩的平均数，用成绩不低于 80 分的人数除以总人数即可求出所占百分比；

(2) 根据中位数的意义进行判断；

(3) 根据测试成绩合理评价即可，答案不唯一.

【小问 1 详解】

解：由成绩频数分布表和成绩在 $70 \leq x < 80$ 这一组的数据可知，排在第 25、26 名学生的成绩分别为 78 分，79 分，

因此成绩的中位数是： $\frac{78+79}{2} = 78.5$ 分.

成绩不低于 80 分的人数占测试人数的百分比为： $\frac{16+6}{50} \times 100\% = 44\%$,

故答案为： 78.5, 44%；

【小问 2 详解】

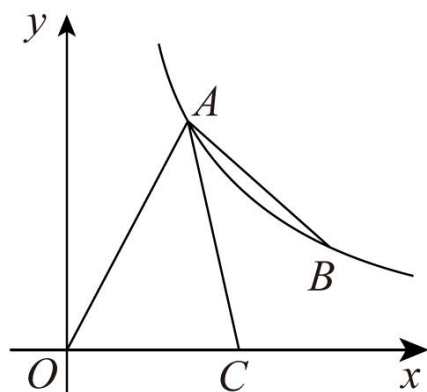
解：不正确. 因为甲的成绩 77 分低于中位数 78.5，所以甲的成绩不可能高于一半学生的成绩.

【小问 3 详解】

解：成绩不低于 80 分的人数占测试人数的 44%，说明该校学生对“航空航天知识”的掌握情况较好.

【点睛】 本题考查调查统计时中位数的计算方法，以及运用中位数做决策等知识点，利用成绩频数分布表和成绩在 $70 \leq x < 80$ 这一组的数据得出中位数是解题的关键.

18. 如图，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像经过点 $A(2, 4)$ 和点 B ，点 B 在点 A 的下方， AC 平分 $\angle OAB$ ，交 x 轴于点 C .



- (1) 求反比例函数的表达式.
- (2) 请用无刻度的直尺和圆规作出线段 AC 的垂直平分线. (要求: 不写作法, 保留作图痕迹, 使用 $2B$ 铅笔作图)
- (3) 线段 OA 与 (2) 中所作的垂直平分线相交于点 D , 连接 CD . 求证: $CD \parallel AB$.

【答案】 (1) $y = \frac{8}{x}$

(2) 图见解析部分 (3) 证明见解析

【解析】

【分析】 (1) 把点 A 的坐标代入反比例函数解析式, 即可得出答案;

(2) 利用基本作图作线段 AC 的垂直平分线即可;

(3) 根据垂直平分线的性质和角平分线的定义可得到 $\angle BAC = \angle DCA$, 然后利用平行线的判定即可得证.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像经过点 $A(2, 4)$,

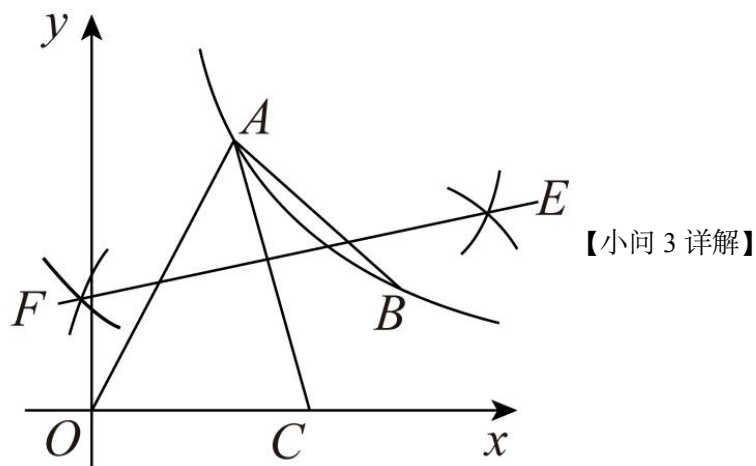
$$\therefore \text{当 } x = 2 \text{ 时, } \frac{k}{2} = 4,$$

$$\therefore k = 8,$$

$$\therefore \text{反比例函数的表达式为: } y = \frac{8}{x};$$

【小问 2 详解】

如图, 直线 EF 即为所作;



证明：如图，

$\because$ 直线 EF 是线段 AC 的垂直平分线，

$\therefore AD = CD$ ，

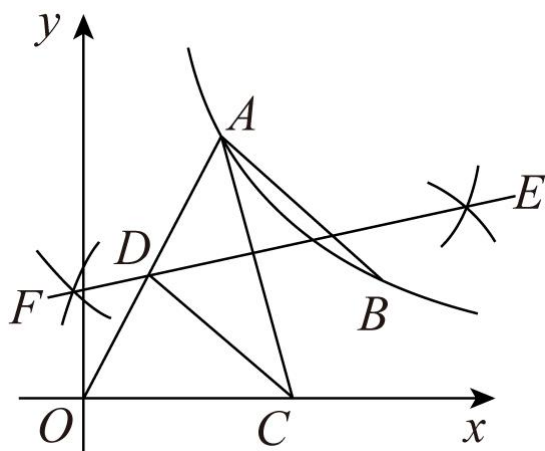
$\therefore \angle DAC = \angle DCA$ ，

$\because AC$ 平分 $\angle OAB$ ，

$\therefore \angle DAC = \angle BAC$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle DCA$ ，

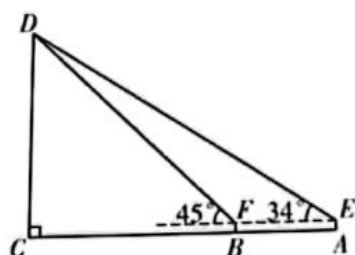
$\therefore CD \parallel AB$ 。



【点睛】 本题考查了作图—基本作图，用待定系数法求反比例函数的解析式，垂直平分线的性质，等腰三角形的性质，平行线的判定，角平分线的定义等知识。解题的关键是熟练掌握五种基本作图（作一条线段等于已知线段；作一个角等于已知角；作已知线段的垂直平分线；作已知角的角平分线；过一点作已知直线的垂线）。

19. 开封清明上河园是依照北宋著名画家张择端的《清明上河图》建造的，拂云阁是园内最高的建筑。某数学小组测量拂云阁 DC 的高度，如图，在 A 处用测角仪测得拂云阁顶端 D 的仰角为 34° ，沿 AC 方向前进 15m 到达 B 处，又测得拂云阁顶端 D 的仰角为 45° 。已知测角仪的高度为 1.5m，测量点 A ， B 与拂云阁 DC 的底

部 C 在同一水平线上，求拂云阁 DC 的高度（结果精确到 1m. 参考数据： $\sin 34^\circ \approx 0.56$ ， $\cos 34^\circ \approx 0.83$ ， $\tan 34^\circ \approx 0.67$ ）.

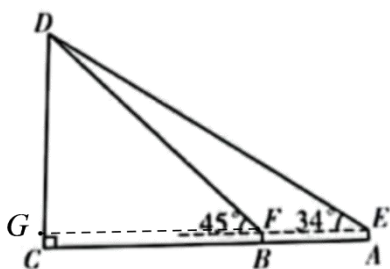


【答案】 拂云阁 DC 的高度约为 32m

【解析】

【分析】 延长 EF 交 CD 于点 G ，则四边形 $AEFB$, $AEGC$ 是矩形，则 $CG = AE = 1.5$ ， $EF = AB = 15$ ，在 $\text{Rt}\triangle DGF$ ， $\text{Rt}\triangle DGE$ 中，分别表示出 FG , EG ，根据 $EG - FG = 15$ ，建立方程，解方程求解可得 DG ，根据 $DC = DG + GC$ 即可求解.

【详解】 如图，延长 EF 交 CD 于点 G ，则四边形 $AEFB$, $AEGC$ 是矩形，



则 $CG = AE = 1.5$ ， $EF = AB = 15$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DGF$ 中， $FG = \frac{DG}{\tan \angle DFG} = \frac{DG}{\tan 45^\circ} = DG$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DGE$ 中， $EG = \frac{DG}{\tan \angle DEG} = \frac{DG}{\tan 34^\circ} = \frac{DG}{0.67}$ ，

$\because EG - FG = 15$ ，

即 $\frac{DG}{0.67} - \frac{DG}{1} = 15$ ，

解得 $DG \approx 30.5$ ，

$\therefore DC = DG + GC = 30.5 + 1.5 = 32$ (m).

$\therefore$ 拂云阁 DC 的高度约为 32m.

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用，掌握直角三角形中的边角关系是解题的关键.

20. 近日，教育部印发《义务教育课程方案》和课程标准（2022 年版），将劳动从原来的综合实践活动课程中独立出来. 某中学为了让学生体验农耕劳动，开辟了一处耕种园，需要采购一批菜苗开展种植活动. 据

了解，市场上每捆 A 种菜苗的价格是菜苗基地的 $\frac{5}{4}$ 倍，用 300 元在市场上购买的 A 种菜苗比在菜苗基地购买的少 3 捆.

(1) 求菜苗基地每捆 A 种菜苗的价格.

(2) 菜苗基地每捆 B 种菜苗的价格是 30 元. 学校决定在菜苗基地购买 A, B 两种菜苗共 100 捆，且 A 种菜苗的捆数不超过 B 种菜苗的捆数. 菜苗基地为支持该校活动，对 A, B 两种菜苗均提供九折优惠. 求本次购买最少花费多少钱.

【答案】 (1) 20 元 (2) 2250 元

【解析】

【分析】 (1) 设菜苗基地每捆 A 种菜苗的价格为 x 元，根据题意列出方程，解出方程即可；

(2) 设：购买 A 种菜苗 m 捆，则购买 B 种菜苗 $(100-m)$ 捆，花费为 y 元，根据 A 种菜苗的捆数不超过 B 种菜苗的捆数，解出 m 的取值范围，列出花费 y 与 A 种菜苗 m 捆之间的关系式，根据关系式求出最少花费多少钱即可.

【小问 1 详解】

解：设：菜苗基地每捆 A 种菜苗的价格为 x 元，

$$\begin{aligned}\frac{300}{x} - \frac{300}{\frac{5}{4}x} &= 3 \\ 300 \times \frac{5}{4} - 300 &= \frac{15}{4}x \\ \frac{15}{4}x &= 75\end{aligned}$$

解得 $x = 20$

检验：将 $x = 20$ 代入 $\frac{5}{4}x = \frac{5}{4} \times 20 = 25$ ，值不为零，

$\therefore x = 20$ 是原方程的解，

$\therefore$ 菜苗基地每捆 A 种菜苗的价格为 20 元.

【小问 2 详解】

解：设：购买 A 种菜苗 m 捆，则购买 B 种菜苗 $(100-m)$ 捆，花费为 y 元，

有题意可知： $m \leq 100 - m$ ，

解得 $m \leq 50$ ，

$$\text{又} \because y = [20m + 30 \times (100 - m)] \times 0.9,$$

$$\therefore y = -9m + 2700 (m \leq 50),$$

$\therefore y$ 随 m 的增大而减小

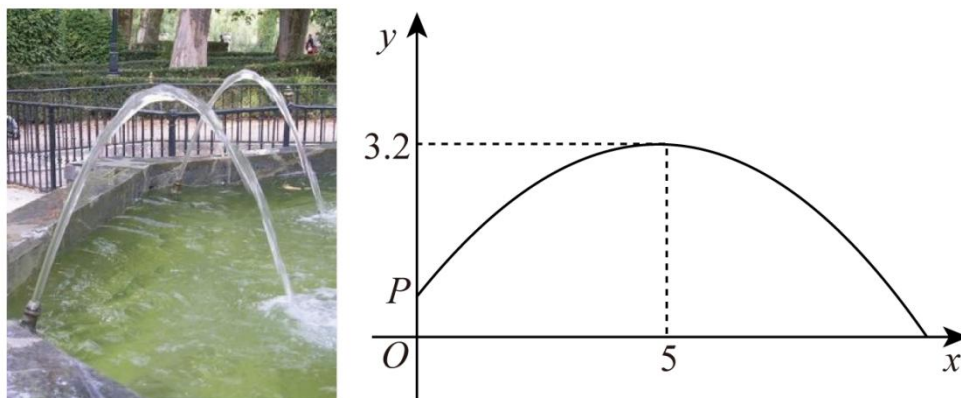
$\therefore$ 当 $m = 50$ 时，花费最少，

此时 $y = -9 \times 50 + 2700 = 2250$

$\therefore$ 本次购买最少花费 2250 元.

【点睛】 本题考查分式方程与一次函数表达式求最小值，根据题意列出分式方程并检验是解答本题的关键.

21. 红看到一处喷水景观，喷出的水柱呈抛物线形状，她对此展开研究：测得喷水头 P 距地面 0.7m，水柱在距喷水头 P 水平距离 5m 处达到最高，最高点距地面 3.2m；建立如图所示的平面直角坐标系，并设抛物线的表达式为 $y = a(x-h)^2 + k$ ，其中 x (m) 是水柱距喷水头的水平距离， y (m) 是水柱距地面的高度.



(1) 求抛物线的表达式.

(2) 爸爸站在水柱正下方，且距喷水头 P 水平距离 3m，身高 1.6m 的小红在水柱下方走动，当她的头顶恰好接触到水柱时，求她与爸爸的水平距离.

【答案】 (1) $y = -0.1(x-5)^2 + 3.2$

(2) 2 或 6m

【解析】

【分析】 (1) 根据顶点 $(5, 3.2)$ ，设抛物线的表达式为 $y = a(x-5)^2 + 3.2$ ，将点 $P(0, 0.7)$ ，代入即可求解；

(2) 将 $y = 1.6$ 代入 (1) 的解析式，求得 x 的值，进而求与点 $(3, 0)$ 的距离即可求解.

【小问 1 详解】

解：根据题意可知抛物线的顶点为 $(5, 3.2)$ ，

设抛物线的解析式为 $y = a(x-5)^2 + 3.2$ ，

将点 $(0, 0.7)$ 代入，得 $0.7 = 25a + 3.2$ ，

解得 $a = -0.1$ ，

∴ 抛物线的解析式为 $y = -0.1(x-5)^2 + 3.2$,

【小问 2 详解】

由 $y = -0.1(x-5)^2 + 3.2$, 令 $y = 1.6$,

得 $1.6 = -0.1(x-5)^2 + 3.2$,

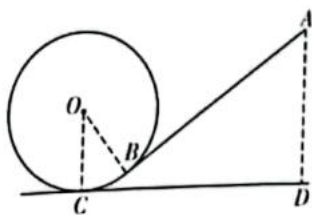
解得 $x_1 = 1, x_2 = 9$,

∵ 爸爸站在水柱正下方, 且距喷水头 P 水平距离 3m,

∴ 当她的头顶恰好接触到水柱时, 她与爸爸的水平距离为 $3-1=2$ (m), 或 $9-3=6$ (m).

【点睛】 本题考查了二次函数的实际应用, 掌握顶点式求二次函数解析式是解题的关键.

22. 为弘扬民族传统体育文化, 某校将传统游戏“滚铁环”列入了校运动会的比赛项目. 滚铁环器材由铁环和推杆组成. 小明对滚铁环的启动阶段进行了研究, 如图, 滚铁环时, 铁环 $\odot O$ 与水平地面相切于点 C , 推杆 AB 与铅垂线 AD 的夹角为 $\angle BAD$, 点 O, A, B, C, D 在同一平面内. 当推杆 AB 与铁环 $\odot O$ 相切于点 B 时, 手上的力量通过切点 B 传递到铁环上, 会有较好的启动效果.



(1) 求证: $\angle BOC + \angle BAD = 90^\circ$.

(2) 实践中发现, 切点 B 只有在铁环上一定区域内时, 才能保证铁环平稳启动. 图中点 B 是该区域内最低位置, 此时点 A 距地面的距离 AD 最小, 测得 $\cos \angle BAD = \frac{3}{5}$. 已知铁环 $\odot O$ 的半径为 25cm, 推杆 AB 的长为 75cm, 求此时 AD 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) 50 cm

【解析】

【分析】 (1) 根据切线的性质可得 $OC \perp CD$, $AB \perp OB$, 根据 $AD \perp CD$, 可得 $AD \parallel OC$, 过点 B 作 $BE \parallel AD$, 根据平行线的性质可得 $\angle BAD = \angle EBA$, $\angle COB = \angle OBE$, 进而即可得证;

(2) 过点 B 作 CD 的平行线, 交 AD 于点 G , 交 OC 于点 F , 由 (1) 得到 $\angle OBF = \angle A$, 在 $\text{Rt}\triangle ABG$, $\text{Rt}\triangle OBF$ 中, 求得 AG, BF , 进而求得 OF, FC , 根据 $AD = AG + GD$ 即可求解.

【小问 1 详解】

证明: ∵ $\odot O$ 与水平地面相切于点 C ,

$$\therefore OC \perp CD,$$

$$\because AD \perp CD,$$

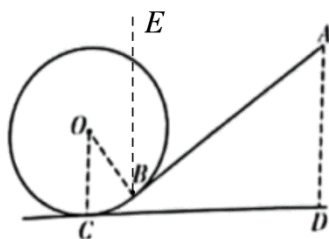
$$\therefore AD \parallel OC,$$

$$\because AB \text{ 与 } \odot O \text{ 相切于点 } B,$$

$$\therefore AB \perp OB,$$

$$\therefore \angle OBA = 90^\circ,$$

过点 B 作 $BE \parallel AD$,



$$\therefore \angle BAD = \angle EBA,$$

$$\therefore BE \parallel OC,$$

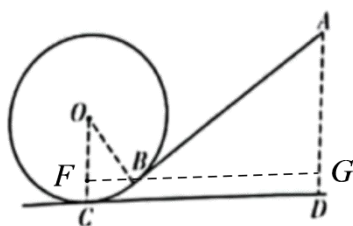
$$\therefore \angle COB = \angle OBE,$$

$$\therefore \angle COB + \angle BAD = \angle OBE + \angle ABE = \angle OBA = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle BOC + \angle BAD = 90^\circ.$$

【小问2 详解】

如图，过点 B 作 CD 的平行线，交 AD 于点 G ，交 OC 于点 F ，



$$\therefore FG \perp AD, FG \perp OC, \text{ 则四边形 } CFGD \text{ 是矩形},$$

$$\because \angle BOC + \angle BAD = 90^\circ, \quad \angle ABO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OBF = 90^\circ - \angle FOB = \angle A,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABG \text{ 中, } \because \cos \angle BAD = \frac{3}{5}, \quad AB = 75\text{cm},$$

$$\therefore AG = AB \times \cos \angle BAD = 75 \times \frac{3}{5} = 45 \text{ (cm)},$$

在 $\text{Rt}\triangle OBF$ 中, $\cos \angle OBF = \cos A = \frac{3}{5}$, $OB = 25 \text{ cm}$,

$$BF = OB \times \frac{3}{5} = 25 \times \frac{3}{5} = 15 \text{ (cm)},$$

$$\therefore OF = \sqrt{OB^2 - BF^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \text{ (cm)},$$

$$\therefore FC = OC - OF = 25 - 20 = 5 \text{ (cm)},$$

$$\therefore DG = FC = 5 \text{ cm},$$

$$\therefore AD = AG + GD = 45 + 5 = 50 \text{ (cm)}.$$

【点睛】 本题考查了切线的性质，平行线的性质，解直角三角形的应用，掌握以上知识是解题的关键.

23. 综合与实践

综合与实践课上，老师让同学们以“矩形的折叠”为主题开展数学活动.

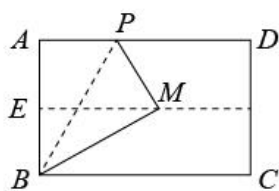


图1

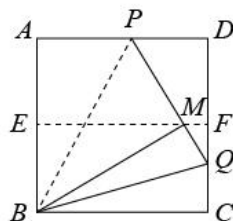


图2

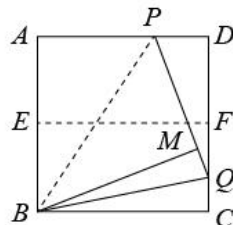


图3

(1) 操作判断

操作一：对折矩形纸片 $ABCD$ ，使 AD 与 BC 重合，得到折痕 EF ，把纸片展平；

操作二：在 AD 上选一点 P ，沿 BP 折叠，使点 A 落在矩形内部点 M 处，把纸片展平，连接 PM ， BM 。

根据以上操作，当点 M 在 EF 上时，写出图 1 中一个 30° 的角：_____。

(2) 迁移探究

小华将矩形纸片换成正方形纸片，继续探究，过程如下：

将正方形纸片 $ABCD$ 按照 (1) 中的方式操作，并延长 PM 交 CD 于点 Q ，连接 BQ 。

①如图 2，当点 M 在 EF 上时， $\angle MBQ = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$ ， $\angle CBQ = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$ ；

②改变点 P 在 AD 上的位置 (点 P 不与点 A ， D 重合)，如图 3，判断 $\angle MBQ$ 与 $\angle CBQ$ 的数量关系，并说明理由。

(3) 拓展应用

在 (2) 的探究中，已知正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 8cm ，当 $FQ = 1\text{cm}$ 时，直接写出 AP 的长。

【答案】 (1) $\angle BME$ 或 $\angle ABP$ 或 $\angle PBM$ 或 $\angle MBC$

(2) ① 15° ， 15° ； ② $\angle MBQ = \angle CBQ$ ，理由见解析

$$(3) \quad AP = \frac{40}{11} \text{ cm}$$

【解析】

【分析】(1) 根据折叠的性质，得 $BE = \frac{1}{2}BM$ ，结合矩形的性质得 $\angle BME = 30^\circ$ ，进而可得 $\angle ABP = \angle PBM = \angle MBC = 30^\circ$ ；

(2) 根据折叠的性质，可证 $\text{Rt}\triangle BQM \cong \text{Rt}\triangle BQC$ (HL)，即可求解；

(3) 由 (2) 可得 $QM = QC$ ，设 $AP = PM = x$ ， $PD = 8 - x$ ，由勾股定理即可求解；

【小问 1 详解】

解： $\because AE = BE = \frac{1}{2}AB$ ， $AB = BM$

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BM$$

$$\therefore \angle BEM = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BME = 30^\circ$$

$$\therefore \angle MBE = 60^\circ$$

$$\therefore \angle ABP = \angle PBM$$

$$\therefore \angle ABP = \angle PBM = \angle MBC = 30^\circ$$

【小问 2 详解】

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形

$$\therefore AB = BC, \quad \angle A = \angle ABC = \angle C = 90^\circ$$

由折叠性质得： $AB = BM$ ， $\angle PMB = \angle BMQ = \angle A = 90^\circ$

$$\therefore BM = BC$$

$$\textcircled{1} \because BM = BC, \quad BQ = BQ$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BQM \cong \text{Rt}\triangle BQC \text{ (HL)}$$

$$\therefore \angle MBQ = \angle CBQ$$

$$\therefore \angle MBC = 30^\circ$$

$$\therefore \angle MBQ = \angle CBQ = 15^\circ$$

$$\textcircled{2} \because BM = BC, \quad BQ = BQ$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BQM \cong \text{Rt}\triangle BQC \text{ (HL)}$$

$$\therefore \angle MBQ = \angle CBQ$$

【小问3详解】

$$\therefore FQ = 1\text{cm}, \quad DF = FC = 4\text{cm}, \quad AB = 8\text{cm}$$

$$\therefore QC = CD - DF - FQ = 8 - 4 - 1 = 3(\text{cm}), \quad DQ = DF + FQ = 4 + 1 = 5(\text{cm})$$

由 (2) 可知, $QM = QC$

$$\text{设 } AP = PM = x, \quad PD = 8 - x,$$

$$\therefore PD^2 + DQ^2 = PQ^2,$$

$$\text{即 } (8-x)^2 + 5^2 = (x+3)^2$$

$$\text{解得: } x = \frac{40}{11}$$

$$\therefore AP = \frac{40}{11}\text{cm}$$

【点睛】 本题主要考查矩形与折叠，正方形的性质、勾股定理、三角形的全等，掌握相关知识并灵活应用是解题的关键.

淘宝：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022