

数学

一、选择题：（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分；给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，在试卷上作答无效。）

1. 下列各数中， -1 的相反数是（ ）

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

【答案】C

【解析】

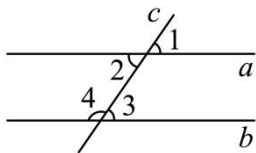
【分析】根据相反数的定义（只有符号不同的两个数互为相反数）判断即可.

【详解】解：由相反数的定义可得： -1 与 1 互为相反数，

故选：C.

【点睛】题目主要考查相反数的定义，理解相反数的定义是解题关键.

2. 如图，直线 a , b 被直线 c 所截，下列各组角是同位角的是（ ）



- A. $\angle 1$ 与 $\angle 2$ B. $\angle 1$ 与 $\angle 3$ C. $\angle 2$ 与 $\angle 3$ D. $\angle 3$ 与 $\angle 4$

【答案】B

【解析】

【分析】两条线 a 、 b 被第三条直线 c 所截，在截线的同旁，被截两直线的同一方，把这种位置关系的角称为同位角，据此作答即可.

【详解】解： $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是对顶角，选项 A 不符合题意；

$\angle 1$ 与 $\angle 3$ 是同位角，选项 B 符合题意；

$\angle 2$ 与 $\angle 3$ 是内错角，选项 C 不符合题意；

$\angle 3$ 与 $\angle 4$ 是邻补角，选项 D 不符合题意；

故选：B.

【点睛】此题考查了同位角、内错角、同旁内角，熟记同位角、内错角、同旁内角的定义是解题的关键.

3. 在一个不透明的盒子中，装有质地、大小一样的白色乒乓球 2 个，黄色乒乓球 3 个，随机摸出一个球，摸到黄色乒乓球的概率是（ ）

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】直接利用概率公式计算即可.

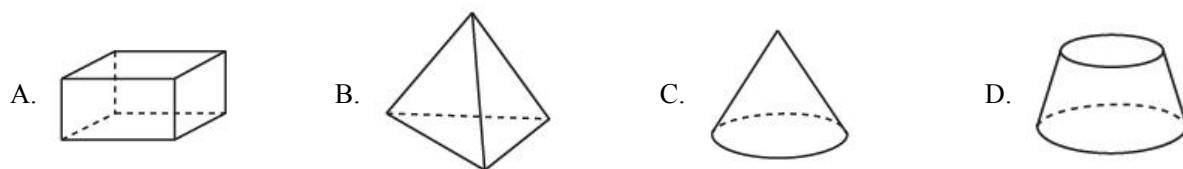
【详解】解：因为盒子里由黄色乒乓球 3 个，
所以随机摸出一个球，摸到黄色乒乓球的情况有 3 种，
因为盒子里一共有 $2+3=5$ （个）球，
 $\therefore$ 一共有 5 种情况，

$\therefore$ 随机摸出一个球，摸到黄色乒乓球的概率为 $\frac{3}{5}$ ，

故选：D.

【点睛】本题考查了简单随机事件的概率，解题关键是牢记概率公式，即事件 A 发生的概率为事件 A 包含的结果数除以总的结果数.

4. 下面四个几何体中，主视图为矩形的是（ ）



【答案】A

【解析】

【分析】依次分析每个选项中的主视图，找出符合题意的选项即可.

【详解】解：A 选项图形的主视图为矩形，符合题意；
B 选项图形的主视图为三角形，中间由一条实线，不符合题意；
C 选项图形的主视图为三角形，不符合题意；
D 选项图形的主视图为梯形，不符合题意；

故选：A.

【点睛】本题考查了几何体的主视图，解题关键是理解主视图的定义.

5. 2022 年我国高考报名人数再创新高，约为 1193 万（即 11930000）人，数据 11930000 用科学记数法表示为（ ）

- A. 1193×10^4 B. 11.93×10^6 C. 1.193×10^7 D. 1.193×10^8

【答案】C

【解析】

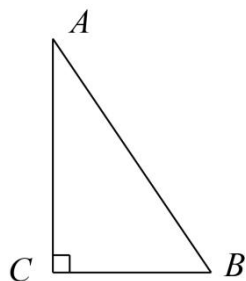
【分析】首先思考科学记数法表示数的形式，再确定 a ， n 的值，即可得出答案.

【详解】解： $11930000 = 1.193 \times 10^7$.

故选： C.

【点睛】此题主要考查了科学记数法表示绝对值大于 1 的数，掌握形式解题的关键. 即 $a \times 10^n$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为正整数.

6. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle B=56^\circ$ ， 则 $\angle A$ 的度数为 ()



- A. 34° B. 44° C. 124° D. 134°

【答案】 A

【解析】

【分析】根据直角三角形的两个锐角互余，即可得出 $\angle A$ 的度数.

【详解】解： $\because Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle B=56^\circ$ ，

$$\therefore \angle A = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ;$$

故选： A.

【点睛】本题考查了直角三角形的性质：直角三角形的两个锐角互余；熟练掌握直角三角形的性质，并能进行推理计算是解决问题的关键.

7. 下列运算正确的是 ()

- A. $x^3 + x^3 = x^6$ B. $x^6 \div x^3 = x^2$ C. $(3x^3)^2 = 6x^5$ D. $x^2 \times x^3 = x^5$

【答案】 D

【解析】

【分析】利用合并同类项，同底数幂相除，积的乘方，同底数幂相乘法则，逐项判断即可求解.

【详解】解： A、 $x^3 + x^3 = 2x^3$ ， 故本选项错误， 不符合题意；

B、 $x^6 \div x^3 = x^3$ ， 故本选项错误， 不符合题意；

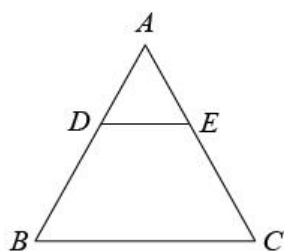
C、 $(3x^3)^2 = 9x^6$ ， 故本选项错误， 不符合题意；

D、 $x^2 \times x^3 = x^5$ ， 故本选项正确， 符合题意；

故选： D

【点睛】本题主要考查了合并同类项，同底数幂相除，积的乘方，同底数幂相乘法，熟练掌握相关运算法则是解题的关键.

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $DE = 2$ ， $BC = 5$ ，则 $S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABC}$ 的值是（ ）



- A. $\frac{3}{25}$ B. $\frac{4}{25}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据相似三角形的判定定理得到 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，根据相似三角形的面积比等于相似比的平方计算，得到答案.

【详解】解： $DE \parallel BC$ ， $DE = 2$ ， $BC = 5$

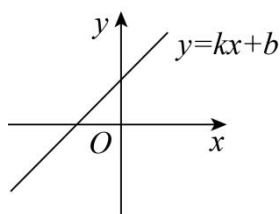
$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25},$$

故选：B.

【点睛】此题考查的是相似三角形的判定和性质，掌握相似三角形的面积比等于相似比的平方是解题的关键.

9. 已知一次函数 $y = kx + b$ 的图象如图所示，则 $y = -kx + b$ 与 $y = \frac{b}{x}$ 的图象为（ ）



- A. B. C. D.

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意可得 $k > 0, b > 0$ ，从而得到一次函数 $y = -kx + b$ 的图象经过第一、二、四象限，反比例函数 $y = \frac{b}{x}$ 的图象位于第一、三象限内，即可求解.

【详解】解：根据题意得： $k > 0, b > 0$ ，

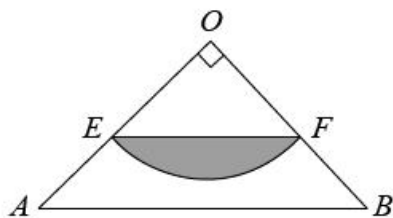
$\therefore -k < 0$ ，

$\therefore$ 一次函数 $y = -kx + b$ 的图象经过第一、二、四象限，反比例函数 $y = \frac{b}{x}$ 的图象位于第一、三象限内.

故选：A

【点睛】本题主要考查了一次函数和反比例函数的图象和性质，熟练掌握一次函数和反比例函数的图象和性质是解题的关键.

10. 如图，在等腰直角 $\triangle OAB$ 中，点 E 在 OA 上，以点 O 为圆心、 OE 为半径作圆弧交 OB 于点 F ，连接 EF ，已知阴影部分面积为 $\pi - 2$ ，则 EF 的长度为（ ）



A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $2\sqrt{2}$

D. $3\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意可得： $OE = OF$ ， $\angle O = 90^\circ$ ，设 $OE = OF = x$ ，利用阴影部分面积列出等式，得出 $x^2 = 4$ ，然后由勾股定理求解即可.

【详解】解：根据题意可得： $OE = OF$ ， $\angle O = 90^\circ$ ，

设 $OE = OF = x$ ，

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}OEF} - S_{\triangle OEF} = \pi - 2$$

$$\frac{90\pi x^2}{360} - \frac{1}{2}x^2 = \pi - 2,$$

解得： $x^2 = 4$ ，

$$\therefore EF = \sqrt{OE^2 + OF^2} = \sqrt{x^2 + x^2} = 2\sqrt{2},$$

故选：C.

【点睛】题目主要考查不规则图形的面积，一元二次方程的应用，勾股定理理解三角形等，理解题意，综合运用这些知识点是解题关键.

11. 已知二次函数 $y=2x^2-4x-1$ 在 $0\leq x\leq a$ 时， y 取得的最大值为 15，则 a 的值为（ ）

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】先找到二次函数的对称轴和顶点坐标，求出 $y=15$ 时， x 的值，再根据二次函数的性质得出答案.

【详解】解：∵二次函数 $y=2x^2-4x-1=2(x-1)^2-3$,

∴抛物线的对称轴为 $x=1$ ，顶点 $(1, -3)$,

∵ $1>0$ ，开口向上，

∴在对称轴 $x=1$ 的右侧， y 随 x 的增大而增大，

∴当 $0\leq x\leq a$ 时，即在对称轴右侧， y 取得最大值为 15，

∴当 $x=a$ 时， $y=15$,

∴ $2(a-1)^2-3=15$,

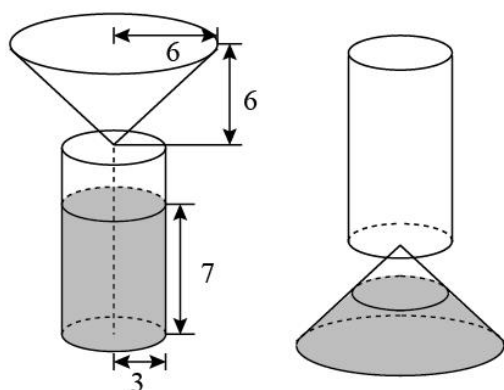
解得： $a=4$ 或 $a=-2$ (舍去)，

故 a 的值为 4.

故选：D.

【点睛】本题考查二次函数的性质、二次函数的最值，解答本题的关键是二次函数的增减性，利用二次函数的性质解答.

12. 某餐厅为了追求时间效率，推出一种液体“沙漏”买单方案（即点单完成后，开始倒转“沙漏”，“沙漏”漏完前，客人所点的菜需全部上桌，否则该桌免费用餐）.“沙漏”是由一个圆锥体和一个圆柱体相通连接而成. 某次计时前如图（1）所示，已知圆锥体底面半径是 6cm，高是 6cm；圆柱体底面半径是 3cm，液体高是 7cm. 计时结束后如图（2）所示，求此时“沙漏”中液体的高度为（ ）



- A. 2cm B. $\frac{21}{4}$ cm C. 4cm D. 5cm

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据液体的体积不变列方程解答.

【详解】 解：圆柱体内液体的体积为： $v_{\text{圆柱}} = sh_1 = \pi \times 3^2 \times 7 = 63\pi \text{cm}^3$

由题意得， $v_{\text{锥体}} = \frac{1}{3}sh_2 = \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times h_2 = 63\pi \text{cm}^3$

$$\therefore h_2 = \frac{63}{36} = \frac{21}{4} \text{cm},$$

故选： B.

【点睛】 本题考查一元一次方程的应用， 涉及圆柱与圆锥的体积， 是基础考点， 掌握液体体积不变列方程是解题关键.

二、填空题：（本大题共 6 小题， 每小题 3 分， 共 18 分； 请把答案填在答题卡对应的位置上， 在卷上作答无效.）

13. 若代数式 $\sqrt{x-5}$ 在实数范围内有意义， 则实数 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq 5$

【解析】

【分析】 根据二次根式有意义的条件即可求得数 x 的取值范围.

【详解】 $\because \sqrt{x-5}$ 在实数范围内有意义，

$$\therefore x-5 \geq 0,$$

解得 $x \geq 5$.

故答案为： $x \geq 5$.

【点睛】 本题考查了二次根式有意义的条件， 掌握二次根式有意义的条件是解题的关键.

14. 因式分解： $3m^2 - 12 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $3(m+2)(m-2)$

【解析】

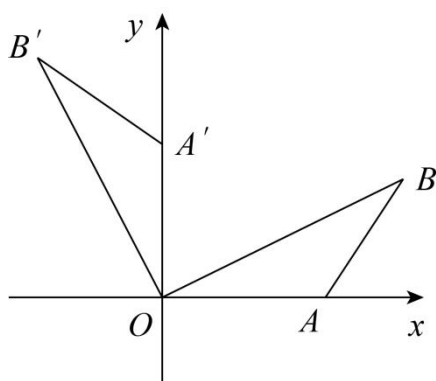
【分析】 首先提取公因数 3，进而利用平方差公式进行分解即可.

【详解】 解： 原式 $= 3(x^2 - 4) = 3(x+2)(x-2)$;

故答案为： $3(x+2)(x-2)$.

【点睛】 此题主要考查了提取公因式以及公式法分解因式，正确应用平方差公式是解题关键.

15. 如图，在平面直角坐标系中， $\triangle OAB$ 为等腰三角形， $OA = AB = 5$ ，点 B 到 x 轴的距离为 4，若将 $\triangle OAB$ 绕点 O 逆时针旋转 90° ，得到 $\triangle OA'B'$ ，则点 B' 的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

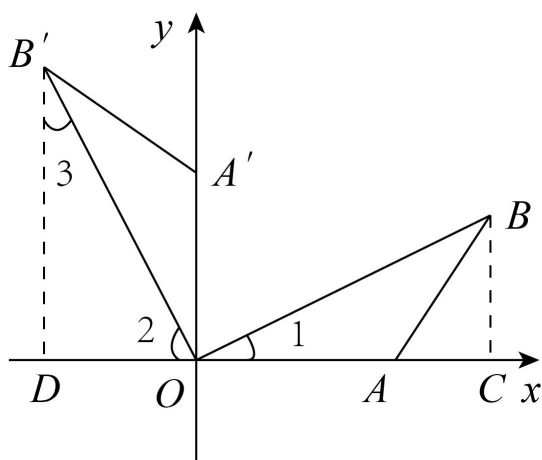


【答案】 $(-4, 8)$

【解析】

【分析】 过 B 作 $BC \perp OA$ 于 C ，过 B' 作 $BD \perp x$ 轴于 D ，构建 $\triangle OB'D \cong \triangle OBC$ ，即可得出答案.

【详解】 过 B 作 $BC \perp OA$ 于 C ，过 B' 作 $BD \perp x$ 轴于 D ，



$$\therefore \angle B'DO = \angle BCO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

由旋转可知 $\angle BOB' = 90^\circ$, $OB = OB'$,

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

$$\because OB = OB', \angle 1 = \angle 3, \angle B'DO = \angle BCO,$$

$$\therefore \triangle OB'D \cong \triangle OBC,$$

$$\therefore B'D = OC, OD = BC = 4,$$

$$\because AB = AO = 5,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\therefore OC = 8,$$

$$\therefore B'D = 8,$$

$$\therefore B'(-4, 8).$$

故答案为: $(-4, 8)$.

【点睛】 本题考查了旋转的性质以及如何构造全等三角形求得线段的长度, 准确构造全等三角形求得线段长度是解题的关键.

16. 若实数 m, n 满足 $|m - n - 5| + \sqrt{2m + n - 4} = 0$, 则 $3m + n =$ _____.

【答案】 7

【解析】

【分析】 根据非负数的性质可求出 m, n 的值, 进而代入数值可求解.

【详解】 解: 由题意知, m, n 满足 $|m - n - 5| + \sqrt{2m + n - 4} = 0$,

$$\therefore m - n - 5 = 0, 2m + n - 4 = 0,$$

$$\therefore m = 3, n = -2,$$

$$\therefore 3m + n = 9 - 2 = 7,$$

故答案为: 7.

【点睛】 此题主要考查了非负数的性质, 初中阶段有三种类型的非负数: (1) 绝对值; (2) 偶次方; (3) 二次根式 (算术平方根). 当它们相加和为 0 时, 必须满足其中的每一项都等于 0. 根据这个结论可以求解这类题目.

17. 一枚质地均匀的骰子，六个面分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6. 连续抛掷骰子两次，第一次正面朝上的数字作为十位数，第二次正面朝上的数字作为个位数，则这个两位数能被 3 整除的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 列出所有可能出现的情况，再得到能被 3 整除的情况，最后根据概率公式解答.

【详解】 解：画树状图如下，



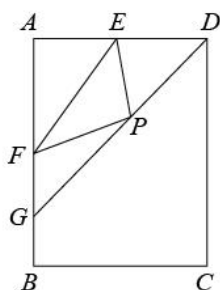
所有等可能的情况共 36 种，其中组成的两位数中能被 3 整除的有 12, 15, 21, 24, 33, 36, 42, 45, 51, 54, 63, 66 共 12 种，

即这个两位数能被 3 整除的概率为 $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$,

故答案为: $\frac{1}{3}$.

【点睛】 本题考查画树状图或列表法求概率，是基础考点，掌握相关知识是解题关键.

18. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 8$, $BC = 6$, E , F 分别是 AD , AB 的中点， $\angle ADC$ 的平分线交 AB 于点 G ，点 P 是线段 DG 上的一个动点，则 $\triangle PEF$ 的周长最小值为_____.

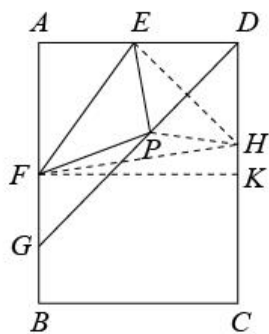


【答案】 $5 + \sqrt{37}$

【解析】

【分析】 在 CD 上取点 H ，使 $DH = DE$ ，连接 EH , PH ，过点 F 作 $FK \perp CD$ 于点 K ，可得 DG 垂直平分 EH ，从而得到当点 F 、 P 、 H 三点共线时， $\triangle PEF$ 的周长最小，最小值为 $FH + EF$ ，再分别求出 EF 和 FH ，即可求解.

【详解】 解：如图，在 CD 上取点 H ，使 $DH = DE$ ，连接 EH , PH ，过点 F 作 $FK \perp CD$ 于点 K ，



在矩形 $ABCD$ 中， $\angle A = \angle ADC = 90^\circ$ ， $AD = BC = 6$ ， $CD = AB = 8$ ，

$\therefore \triangle DEH$ 为等腰直角三角形，

$\therefore DG$ 平分 $\angle ADC$ ，

$\therefore DG$ 垂直平分 EH ，

$\therefore PE = PH$ ，

$\therefore \triangle PEF$ 的周长等于 $PE + PF + EF = PH + PF + EF \geq FH + EF$ ，

$\therefore$ 当点 F 、 P 、 H 三点共线时， $\triangle PEF$ 的周长最小，最小值为 $FH + EF$ ，

$\therefore E$ 、 F 分别是 AD 、 AB 的中点，

$\therefore AE = DE = DH = 3$ ， $AF = 4$ ，

$\therefore EF = 5$ ，

$\therefore FK \perp CD$ ，

$\therefore \angle DKF = \angle A = \angle ADC = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ADKF$ 为矩形，

$\therefore DK = AF = 4$ ， $FK = AD = 6$ ，

$\therefore HK = 1$ ，

$\therefore FH = \sqrt{FK^2 + HK^2} = \sqrt{37}$ ，

$\therefore FH + EF = 5 + \sqrt{37}$ ，即 $\triangle PEF$ 的周长最小为 $5 + \sqrt{37}$ 。

故答案为： $5 + \sqrt{37}$

【点睛】本题主要考查了最短距离问题，矩形的判定和性质，勾股定理等知识，明确题意，准确得到当点 F 、 P 、 H 三点共线时， $\triangle PEF$ 的周长最小，最小值为 $FH + EF$ 是解题的关键。

三、解答题：（本大题共 8 题，共 66 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。在试卷上作答无效。）

19. 计算： $\sqrt{(-3)^2} + |-2| + (\sqrt{5} - 1)^0 - \tan 45^\circ$ 。

【答案】5

【解析】

【分析】根据 $\sqrt{(-3)^2}=3, |-2|=2, (\sqrt{5}-1)^0=1, \tan 45^\circ=1$ 解答.

【详解】解：原式 $= 3 + 2 + 1 - 1$

$= 5$

【点睛】本题考查实数的混合运算，涉及算术平方根、绝对值、零指数幂、特殊角的正切值等知识，是基础考点，掌握相关知识是解题关键.

20. 解方程： $\frac{3-x}{x-4} = \frac{1}{4-x}$.

【答案】原方程无解

【解析】

【分析】方程两边同时乘以最简公分母 $(x-4)$ ，先去分母，化为整式方程，再去括号、移项、合并同类项、化系数为 1，最后验根即可.

【详解】解：方程两边同时乘以最简公分母 $(x-4)$ ，得

$$3-x=-1$$

解方程，得

$$x=4$$

检验：当 $x=4$ 时， $x-4=0$ ，

$\therefore x=4$ 不是原方程的根，原方程无解.

【点睛】本题考查解分式方程，涉及分式有意义的条件，是基础考点，掌握相关知识是解题关键.

21. 为了落实“双减”政策，提倡课内高效学习，课外时间归还学生，“鸿志”班为了激发学生学习热情，提高学习成绩，采用分组学习方案，每 7 人分为一小组，经过半个学期的学习，在模拟测试中，某小组 7 人的成绩分别为 98，94，92，88，95，98，100（单位：分）.

(1) 该小组学生成绩的中位数是_____，众数是_____.

(2) 若成绩 95 分（含 95 分）以上评为优秀，求该小组成员成绩的平均分和优秀率（百分率保留整数）.

【答案】(1) 95；98

(2) 平均分为 95 分，优秀率为 57%.

【解析】

【分析】(1) 直接根据中位数与众数的定义求解即可；

(2) 根据平均数公式求平均数，然后确定优秀的人数所占的比例，再化为百分数即可得到优秀率的值.

【小问 1 详解】

将数据从小到大排列为 88, 92, 94, 95, 98, 98, 100,

由于最中间的数是 95, 出现次数最多的数是 98,

所以中位数是 95, 众数是 98;

【小问 2 详解】

该小组成员成绩的平均分为

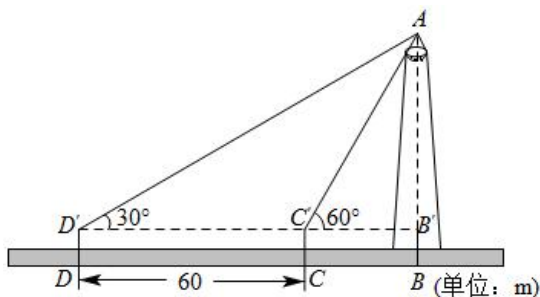
$$\frac{1}{7}(98+94+92+88+95+98+100)=95 \text{ (分)}$$

95 分 (含 95 分) 以上人数为 4 人, 所以优秀率为: $\frac{4}{7} \times 100\% \approx 57\%$

答: 该小组成员成绩的平均分为 95 分, 优秀率为 57%.

【点睛】 本题考查了中位数与众数、平均数、频率, 解题关键是读懂题意, 牢记相关概念和公式.

22. 如图, 在小明家附近有一座废旧的烟囱, 为了乡村振兴, 美化环境, 政府计划把这片区域改造为公园. 现决定用爆破的方式拆除该烟囱, 为确定安全范围, 需测量烟囱的高度 AB , 因为不能直接到达烟囱底部 B 处, 测量人员用高为 1.2m 的测角器在与烟囱底部 B 成一直线的 C, D 两处地面上, 分别测得烟囱顶部 A 的仰角 $\angle B'C'A = 60^\circ, \angle B'D'A = 30^\circ$, 同时量得 CD 为 60m. 问烟囱 AB 的高度为多少米? (精确到 0.1m, 参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732$)



【答案】 53.2

【解析】

【分析】 设 $C'B' = x$ m, 得 $AB' = \sqrt{3}x$, $AB' = \frac{\sqrt{3}}{3}(60+x)$, 得方程 $\therefore \sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{3}(60+x)$, 解出 x , 即

求出 AB 的长.

【详解】 设 $C'B' = x$ m,

在 $\text{Rt } \triangle AC'B'$ 中, $\angle AC'B' = 60^\circ$

$$\tan 60^\circ = \frac{AB'}{x}, \text{ 得 } AB' = \sqrt{3}x.$$

在 $\text{Rt} \triangle AD'B'$ 中, $\angle AD'B' = 30^\circ$

$$\tan 30^\circ = \frac{AB'}{60+x}, \text{ 得 } AB' = \frac{\sqrt{3}}{3}(60+x).$$

$$\therefore \sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{3}(60+x).$$

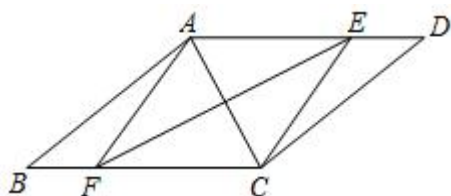
解方程, 得 $x = 30$.

$$\therefore AB = AB' + BB' = \sqrt{3} \times 30 + 1.2 \approx 53.2 \text{ (m)}.$$

答: 烟囱 AB 的高度为 53.2 米

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用-仰角俯角问题, 构造仰角所在的直角三角形, 利用两个直角三角形的公共边求解是常用的解直角三角形的方法.

23. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别在 AD, BC 上, 且 $ED = BF$, 连接 AF, CE, AC, EF , 且 AC 与 EF 相交于点 O .



(1) 求证: 四边形 $AFCE$ 是平行四边形;

(2) 若 AC 平分 $\angle FAE$, $AC = 8$, $\tan \angle DAC = \frac{3}{4}$, 求四边形 $AFCE$ 的面积.

【答案】 (1) 详见解析;

(2) 24.

【解析】

【分析】 (1) 根据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形解答;

(2) 由平行线的性质可得 $\angle EAC = \angle ACF$, 再根据角平分线的性质解得 $\angle EAC = \angle FAC$, 继而证明 $AF = FC$, 由此证明平行四边形 $AFCE$ 是菱形, 根据菱形的性质得到 $AO = \frac{1}{2}AC = 4, AC \perp EF$, 结合正切函数的定义解得 $EO = 3$, 最后根据三角形面积公式解答.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\therefore AD = BC, AE \parallel FC$$

$$\because ED = BF$$

$$AD - ED = BC - BF, \text{ 即 } AE = FC.$$

∴ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形.

【小问 2 详解】

解: ∵ $AE \parallel FC$,

$$\therefore \angle EAC = \angle ACF.$$

∵ AC 平分 $\angle FAE$,

$$\therefore \angle EAC = \angle FAC.$$

$$\therefore \angle ACF = \angle FAC.$$

∴ $AF = FC$, 由 (1) 知四边形 $AFCE$ 是平行四边形,

∴ 平行四边形 $AFCE$ 是菱形.

$$\therefore AO = \frac{1}{2}AC = 4, AC \perp EF,$$

在 Rt $\triangle AOE$ 中, $AO = 4, \tan \angle DAC = \frac{3}{4}$,

$$\therefore EO = 3.$$

$$\therefore S_{\triangle AOE} = \frac{1}{2}AO \cdot EO = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$

$$S_{\text{菱形 } AFCE} = 4S_{\triangle AOE} = 24.$$

【点睛】 本题考查平行四边形的判定、菱形的判定与性质、平行线的性质、角平分线的性质、正切函数的定义等知识, 是重要考点, 难度一般, 掌握相关知识是解题关键.

24. 2022 年在中国举办的冬奥会和残奥会令世界瞩目, 冬奥会和残奥会的吉祥物冰墩墩和雪容融家喻户晓, 成为热销产品, 某商家以每套 34 元的价格购进一批冰墩墩和雪容融套件, 若该产品每套的售价是 48 元时, 每天可售出 200 套; 若每套售价提高 2 元, 则每天少卖 4 套.

(1) 设冰墩墩和雪容融套件每套售价定为 x 元时, 求该商品销售量 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 求每套售价定为多少元时, 每天销售套件所获利润 W 最大, 最大利润是多少元?

【答案】 (1) $y = -2x + 296$;

(2) 每套售价为 91 元时, 每天销售套件所获利润最大, 最大利润是 6498 元.

【解析】

【分析】 (1) 根据 “该产品每套的售价是 48 元时, 每天可售出 200 套; 若每套售价提高 2 元, 则每天少卖 4 套.” 列出函数关系式, 即可求解;

(2) 根据利润等于每件的利润乘以销售量, 可得到函数关系式, 再利用二次函数的性质, 即可求解.

【小问 1 详解】

解：根据题意，得 $y = 200 - \frac{1}{2} \times 4(x - 48)$
 $= -2x + 296$

$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式是 $y = -2x + 296$.

【小问 2 详解】

解：根据题意，得 $W = (x - 34)(-2x + 296)$
 $= -2(x - 91)^2 + 6498$

$\because a = -2 < 0$

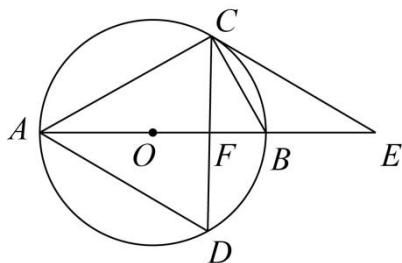
$\therefore$ 抛物线开口向下， W 有最大值

当 $x = 91$ 时， $W_{\text{最大}} = 6498$

答：每套售价为 91 元时，每天销售套件所获利润最大，最大利润是 6498 元.

【点睛】本题主要考查了一次函数的应用，二次函数的实际应用，明确题意，准确得到等量关系是解题的关键.

25. 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， AB 是直径，延长 AB 到点 E ，使得 $BE = BC = 6$ ，连接 EC ，且 $\angle ECB = \angle CAB$ ，点 D 是 $\widehat{AB}$ 上的点，连接 AD ， CD ，且 CD 交 AB 于点 F .



- (1) 求证： EC 是 $\odot O$ 的切线；
- (2) 若 BC 平分 $\angle ECD$ ，求 AD 的长.

【答案】(1) 详见解析；

(2) $6\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】(1) 连接 OC ，证明 $\angle OCE = 90^\circ$ 即可；

(2) 先证明出 $CD \perp AB$ ，再利用直角三角形的性质和三角函数分别求出 $\angle CAD$ 和 CF 后即可求出 AD 的值.

【小问 1 详解】

证明：连接 OC .

$$\because OA = OC,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle ACO.$$

$$\because \angle ECB = \angle CAB,$$

$$\therefore \angle ECB = \angle ACO.$$

$$\therefore AB \text{ 是 } \odot O \text{ 的直径,}$$

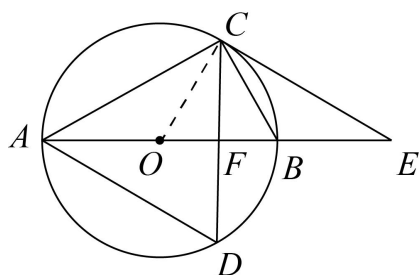
$$\therefore \angle ACB = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle ACO + \angle OCB = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle ECB + \angle OCB = 90^\circ, \text{ 即 } OC \perp EC.$$

又 $\because OC$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore EC$ 是 $\odot O$ 的切线.



【小问 2 详解】

解: $\because BC$ 平分 $\angle ECD$,

$$\therefore \angle BCD = \angle ECB.$$

$$\because \angle BCD = \angle BAD,$$

$$\therefore \angle ECB = \angle BAD.$$

$$\text{又 } \because \angle ECB = \angle CAB,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAB.$$

又 $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore AB \perp DC.$$

在 $Rt\triangle FCE$ 中,

$$\because BE = BC,$$

$$\therefore \angle E = \angle ECB.$$

$$\therefore \angle E = \angle ECB = \angle BCF = 30^\circ.$$

在 $Rt\triangle BCF$ 中, $BC = 6, \angle BCF = 30^\circ$,

$$\therefore CF = BC \cdot \cos \angle BCF = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

$\because AB \perp CD$, AB 是 $\odot O$ 的直径,

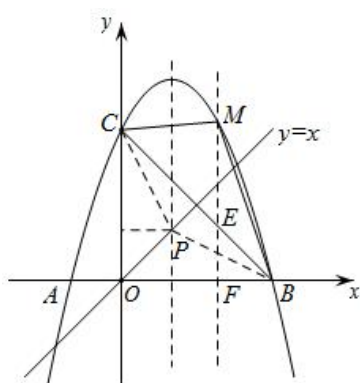
$$\therefore DF = CF = 3\sqrt{3}.$$

在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中, $\angle DAF = \angle BCF = 30^\circ$,

$$\therefore AD = \frac{DF}{\sin \angle DAF} = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{3}.$$

【点睛】本题考查了切线的判定、圆周角定理及其推论、垂径定理的推论、三角函数等知识, 解题关键是连半径构造或证明直角三角形等, 主要运用了转化的思想方法.

26. 如图, 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 过点 $A(-1, 0), B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C .



(1) 求抛物线的解析式;

(2) 点 P 为抛物线对称轴上一动点, 当 $\triangle PCB$ 是以 BC 为底边的等腰三角形时, 求点 P 的坐标;

(3) 在 (2) 条件下, 是否存在点 M 为抛物线第一象限上的点, 使得 $S_{\triangle BCM} = S_{\triangle BCP}$? 若存在, 求出点 M 的横坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $y = -x^2 + 2x + 3$;

(2) 点 P 坐标为 $(1, 1)$;

(3) 存在, $m_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, m_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】(1) 把 $A(-1, 0), B(3, 0)$ 代入 $y = -x^2 + bx + c$ 即可的得出抛物线解析式;

(2) 依题意可得出即 P 点在 $\angle COB$ 的平分线上且在抛物线的对称轴上利用等腰三角形的性质, 即可得出 P 点的坐标;

(2) 利用铅垂线 ME , 即可表达出 $S_{\triangle BCM}$, 再由 $S_{\triangle BCM} = S_{\triangle BCP}$ 即可列出方程求解.

【小问 1 详解】

根据题意，得

$$\begin{cases} 0 = -(-1)^2 - b + c \\ 0 = -3^2 + 3b + c \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为： $y = -x^2 + 2x + 3$.

【小问 2 详解】

由 (1) 得 $y = -x^2 + 2x + 3$,

$\therefore$ 点 $C(0,3)$ ，且点 $B(3,0)$ ，

$\therefore OC = OB = 3$.

$\therefore$ 当 $\triangle PCB$ 是以 BC 为底边的等腰三角形

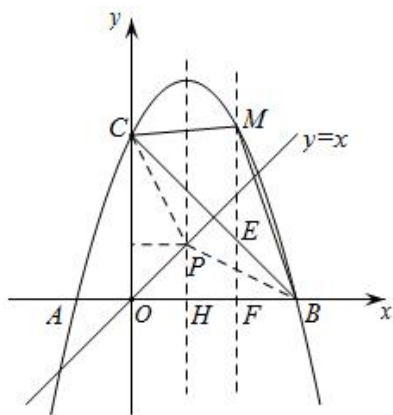
$\therefore PC = PB$,

$\therefore OP = OP$,

$\therefore \triangle COF \cong \triangle BOF$,

$\therefore \angle COF = \angle BOF = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$,

设抛物线的对称轴与 x 轴交于 H 点，则 $\angle OPH = 90^\circ$,



$\therefore \angle OPH = \angle POH = 45^\circ$,

$\therefore OH = PH$,

$\therefore$ 抛物线对称轴 $x = -\frac{2}{2 \times (-1)} = 1$,

$\therefore OH = 1$,

$\therefore PH = 1$,

$$\therefore y=1.$$

$\therefore$ 点 P 坐标为 $(1,1)$.

【小问 3 详解】

存在.

理由如下：过点 M 作 $ME \parallel y$ 轴，交 BC 于点 E ，交 x 轴于点 F .

设 $M(m, -m^2 + 2m + 3)$ ，则 $F(m, 0)$ ，

设直线 BC 的解析式为： $y = kx + b$ ，依题意，得：

$$\begin{cases} 0 = 3k + b \\ 3 = b \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -1 \\ b = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为： $y = -x + 3$ ，

当 $x = m$ 时， $y = -m + 3$ ，

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(m, -m + 3)$ ，

$\therefore$ 点 M 在第一象限内，且在 BC 的上方，

$$\therefore ME = -m^2 + 2m + 3 - (-m + 3)$$

$$= -m^2 + 3m,$$

$$S_{\triangle BCM} = S_{\triangle MEC} + S_{\triangle MEB} = \frac{1}{2}ME \cdot OF + \frac{1}{2}ME \cdot FB$$

$$= \frac{1}{2}ME \cdot OB$$

$$= \frac{3}{2}(-m^2 + 3m),$$

$$S_{\triangle BCP} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 - \frac{1}{2} \times 1 \times (1 + 3) - \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore S_{\triangle BCM} = S_{\triangle BCP},$$

$$\therefore \frac{3}{2}(-m^2 + 3m) = \frac{3}{2},$$

$$\text{解得 } m_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, m_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

【点睛】此题考查了求抛物线的解析式、等腰三角形的存在性问题，三角形的面积，掌握待定系数法求抛

物线的解析式，等腰三角形与函数的特征，三角形面积与函数的做法是解题的关键.

淘宝：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022