

2022 年玉林市初中学业水平考试

数学

(全卷共三大题，共 4 页，满分 120 分，考试时间 120 分钟)

第 I 卷 (选择题 共 36 分)

注意事项：

1. 将答案填写在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束，将本试卷和答题卡一并交回。
 2. 选择题每小题选出答案后，考生用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的选项标号涂黑。
 3. 非选择题，考生用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答。
- 一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把正确答案的标号填（涂）在答题卡内相应的位置上。

1. 5 的倒数是()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $-\frac{1}{5}$ C. 5 D. -5

【答案】A

【解析】

【分析】根据倒数的意义可直接进行求解。

【详解】解：5 的倒数是 $\frac{1}{5}$ ；

故选 A.

【点睛】本题主要考查倒数，熟练掌握求一个数的倒数是解题的关键。

2. 下列各数中为无理数的是()

- A. $\sqrt{2}$ B. 1.5 C. 0 D. -1

【答案】A

【解析】

【分析】根据无理数是无限不循环小数可直接进行排除选项。

【详解】解：A 选项是无理数，而 B、C、D 选项是有理数，

故选 A.

【点睛】本题主要考查无理数，熟练掌握无理数的概念是解题的关键。

3. 今年我市高中计划招生 52300 人，将数据 52300 用科学记数法表示是()

- A. 0.523×10^5 B. 5.23×10^3 C. 5.23×10^4 D. 52.3×10^3

【答案】C

【解析】

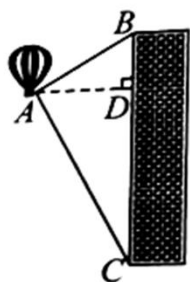
【分析】根据科学记数法进行改写即可.

【详解】 $52300=5.23\times 10^4$,

故选：C.

【点睛】本题考查了科学记数法的表示方法，科学记数法的表示形式为 $a\times 10^n$ ($1\leq |a|<10$)， n 为整数，正确确定 a 的值是解题的关键.

4. 如图，从热气球 A 看一栋楼底部 C 的俯角是()



- A. $\angle BAD$ B. $\angle ACB$ C. $\angle BAC$ D. $\angle DAC$

【答案】D

【解析】

【分析】根据俯角的定义可直接得出结果.

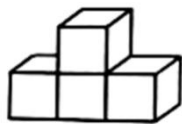
【详解】解：根据俯角的定义，朝下看时，视线与水平面的夹角为俯角，

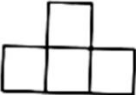
$\therefore \angle DAC$ 为对应的俯角，

故选 D.

【点睛】题目主要考查对俯角定义的理解，深刻理解俯角的定义是解题关键.

5. 如图是由 4 个相同的小正方体组成的几何体，它的主视图是()



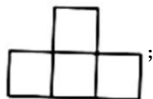
- A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据几何体的三视图可进行求解.

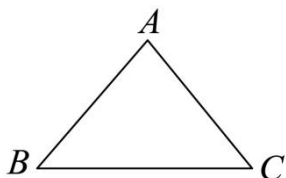
【详解】解：由题意可知该几何体的主视图为



故选 B.

【点睛】本题主要考查三视图，熟练掌握三视图是解题的关键.

6. 请你量一量如图 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高的长度，下列最接近的是()



A. 0.5cm

B. 0.7cm

C. 1.5cm

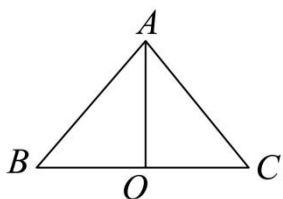
D. 2cm

【答案】D

【解析】

【分析】作出三角形的高，然后利用刻度尺量取即可.

【详解】解：如图所示，过点 A 作 $AO \perp BC$,



用刻度尺直接量得 AO 更接近 2cm,

故选：D.

【点睛】题目主要考查利用刻度尺量取三角形高的长度，作出三角形的高是解题关键.

7. 垃圾分类利国利民，某校宣传小组就“空矿泉水瓶应投放到哪种颜色的垃圾收集桶内”进行统计活动，他们随机采访 50 名学生并作好记录. 以下是排乱的统计步骤：

①从扇形统计图中分析出本校学生对空矿泉水瓶投放的正确率

②整理采访记录并绘制空矿泉水瓶投放频数分布表

③绘制扇形统计图来表示空矿泉水瓶投放各收集桶所占的百分比

正确统计步骤的顺序应该是()

A. ②→③→①

B. ②→①→③

C. ③→①→②

D. ③→②→①

【答案】A

【解析】

【分析】根据统计数据收集处理的步骤即可得出结果.

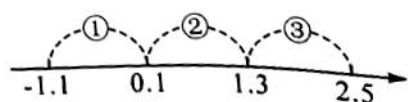
【详解】解：按照统计步骤，先②整理采访记录并绘制空矿泉水瓶投放频数分布表，然后③绘制扇形统计图来表示空矿泉水瓶投放各收集桶所占的百分比，最后得出①从扇形统计图中分析出本校学生对空矿泉水瓶投放的正确率，

∴正确的步骤为：②→③→①，

故选：A.

【点睛】题目主要考查统计数据收集处理的步骤，理解题意是解题关键.

8. 若 x 是非负整数，则表示 $\frac{2x}{x+2} - \frac{x^2-4}{(x+2)^2}$ 的值的对应点落在下图数轴上的范围是()



A. ①

B. ②

C. ③

D. ①或②

【答案】B

【解析】

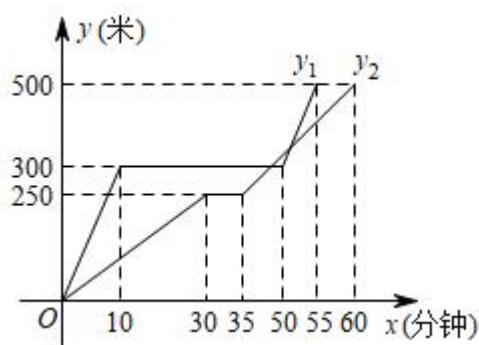
【分析】先对分式进行化简，然后问题可求解.

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】解：} & \frac{2x}{x+2} - \frac{x^2-4}{(x+2)^2} \\
 &= \frac{2x(x+2)}{(x+2)^2} - \frac{x^2-4}{(x+2)^2} \\
 &= \frac{2x^2+4x-x^2+4}{(x+2)^2} \\
 &= \frac{(x+2)^2}{(x+2)^2} \\
 &= 1;
 \end{aligned}$$

故选 B.

【点睛】本题主要考查分式的运算，熟练掌握分式的减法运算是解题的关键.

9. 龟兔赛跑之后，输了比赛的兔子决定和乌龟再赛一场. 图中的函数图象表示了龟兔再次赛跑的过程 (x 表示兔子和乌龟从起点出发所走的时间， y_1, y_2 分别表示兔子与乌龟所走的路程). 下列说法错误的是()



- A. 兔子和乌龟比赛路程是500 米
 B. 中途，兔子比乌龟多休息了 35 分钟
 C. 兔子比乌龟多走了 50 米
 D. 比赛结果，兔子比乌龟早 5 分钟到达终点

【答案】 C

【解析】

【分析】 依据函数图象进行分析即可求解.

【详解】 由函数图象可知：兔子和乌龟比赛的路程为 500 米，兔子休息的时间为 $50-10=40$ 分钟，乌龟休息的时间为 $35-30=5$ 分钟，即兔子比乌龟多休息 $40-5=35$ 分钟，比赛中兔子用时 55 分钟，乌龟用时 60 分钟，兔子比乌龟早到终点 5 分钟，

据此可知 C 项表述错误，

故选： C.

【点睛】 本题考查了根据函数图象获取信息的知识，读懂函数图象的信息是解答本题的关键.

10. 若顺次连接四边形 $ABCD$ 各边的中点所得的四边形是正方形，则四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC, BD 一定是()

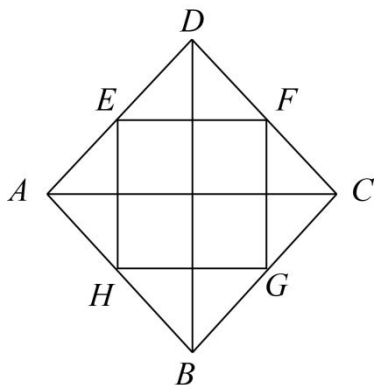
- A. 互相平分 B. 互相垂直 C. 互相平分且相等 D. 互相垂直且相等

【答案】 D

【解析】

【分析】 由题意作出图形，然后根据正方形的判定定理可进行排除选项.

【详解】 解： 如图所示，点 E, F, G, H 分别是四边形 $ABCD$ 边 AD, DC, BC, AB 的中点，



$$\therefore EF \parallel AC \parallel GH, EH \parallel BD \parallel FG, EF = GH = \frac{1}{2} AC, EH = FG = \frac{1}{2} BD,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形,

对于 A 选项：对角线互相平分，四边形 $EFGH$ 仍是平行四边形，故不符合题意；

对于 B 选项：对角线互相垂直，则有 $EF \perp EH$ ，可推出四边形 $EFGH$ 是矩形，故不符合题意；

对于 C 选项：对角线互相平分且相等，则有 $EF = EH$ ，可推出四边形 $EFGH$ 是菱形，故不符合题意；

对于 D 选项：对角线互相垂直且相等，则有 $EF \perp EH$ ， $EF = EH$ ，可推出四边形 $EFGH$ 是正方形，故符合题意；

故选 D.

【点睛】 本题主要考查三角形中位线及正方形、菱形、矩形、平行四边形的判定，熟练掌握三角形中位线及正方形、菱形、矩形、平行四边形的判定是解题的关键.

11. 小嘉说：将二次函数 $y = x^2$ 的图象平移或翻折后经过点 $(2,0)$ 有 4 种方法：

- ①向右平移 2 个单位长度 ②向右平移 1 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度
③向下平移 4 个单位长度 ④沿 x 轴翻折，再向上平移 4 个单位长度

你认为小嘉说的方法中正确的个数有()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据二次函数图象的平移可依此进行求解问题.

【详解】 解：①将二次函数 $y = x^2$ 向右平移 2 个单位长度得到： $y = (x-2)^2$ ，把点 $(2,0)$ 代入得：

$$y = (2-2)^2 = 0, \text{ 所以该平移方式符合题意；}$$

②将二次函数 $y = x^2$ 向右平移 1 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度得到： $y = (x-1)^2 - 1$ ，把点 $(2,0)$ 代

入得： $y = (2-1)^2 - 1 = 0$ ，所以该平移方式符合题意；

③将二次函数 $y = x^2$ 向下平移 4 个单位长度得到： $y = x^2 - 4$ ，把点 $(2,0)$ 代入得： $y = 2^2 - 4 = 0$ ，所以该平移方式符合题意；

④将二次函数 $y = x^2$ 沿 x 轴翻折，再向上平移 4 个单位长度得到： $y = -x^2 + 4$ ，把点 $(2,0)$ 代入得：

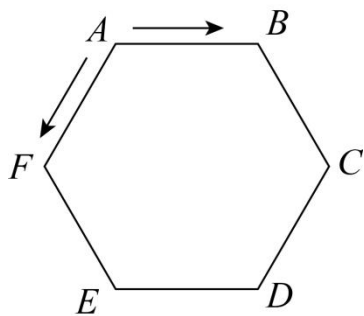
$y = -2^2 + 4 = 0$ ，所以该平移方式符合题意；

综上所述：正确的个数为 4 个；

故选 D.

【点睛】 本题主要考查二次函数图象的平移，熟练掌握二次函数图象的平移是解题的关键.

12. 如图的电子装置中，红黑两枚跳棋开始放置在边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 的顶点 A 处. 两枚跳棋跳动规则是：红跳棋按顺时针方向 1 秒钟跳 1 个顶点，黑跳棋按逆时针方向 3 秒钟跳 1 个顶点，两枚跳棋同时跳动，经过 2022 秒钟后，两枚跳棋之间的距离是()



A. 4

B. $2\sqrt{3}$

C. 2

D. 0

【答案】 B

【解析】

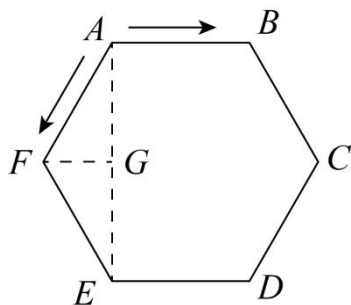
【分析】 由题意可分别求出经过 2022 秒后，红黑两枚跳棋的位置，然后根据正多边形的性质及含 30 度直角三角形的性质可进行求解.

【详解】 解： $\because 2022 \div 3 = 674$ ， $2022 \div 1 = 2022$ ，

$\therefore 674 \div 6 = 112 \cdots \cdots 2$ ， $2022 \div 6 = 337$ ，

$\therefore$ 经过 2022 秒后，红跳棋落在点 A 处，黑跳棋落在点 E 处，

连接 AE ，过点 F 作 $FG \perp AE$ 于点 G ，如图所示：



在正六边形 $ABCDEF$ 中, $AF = EF = 2, \angle AFE = 120^\circ$,

$$\therefore AG = \frac{1}{2} AE, \angle FAE = \angle FEA = 30^\circ,$$

$$\therefore FG = \frac{1}{2} AF = 1,$$

$$\therefore AG = \sqrt{AF^2 - FG^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore AE = 2\sqrt{3},$$

故选 B.

【点睛】 本题主要考查图形规律问题、勾股定理、含 30° 直角三角形的性质及正多边形的性质, 熟练掌握图形规律问题、勾股定理、含 30° 直角三角形的性质及正多边形的性质是解题的关键.

第 II 卷 (非选择题 共 84 分)

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分, 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 计算: $2 \div (-2) =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 根据有理数的除法运算可进行求解.

【详解】 解: 原式 $= -2 \div 2 = -1$;

故答案为-1.

【点睛】 本题主要考查有理数的除法, 熟练掌握有理数的除法运算是解题的关键.

14. 计算: $3a - a =$ _____.

【答案】 $2a$

【解析】

【分析】 按照合并同类项法则合并即可.

【详解】 $3a - a = 2a$,

故答案为： $2a$.

【点睛】 本题考查了合并同类项，解题关键是熟练运用合并同类项法则进行计算.

15. 已知 $\angle \alpha = 60^\circ$ ，则 $\angle \alpha$ 的余角等于 ____ 度.

【答案】 30

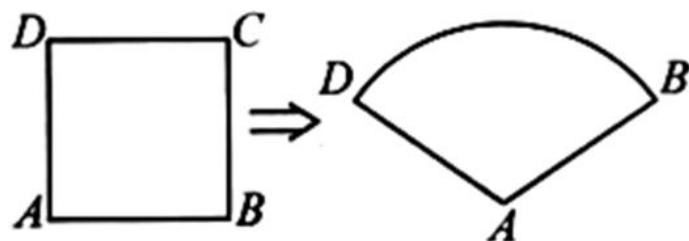
【解析】

【详解】 $\because$ 互余两角的和等于 90° ，

$\therefore \alpha$ 的余角为： $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

故答案为： 30

16. 数学课上，老师将如图边长为 1 的正方形铁丝框变形成为以 A 为圆心， AB 为半径的扇形（铁丝的粗细忽略不计），则所得扇形 DAB 的面积是 _____.



【答案】 1

【解析】

【分析】 根据题意结合图象得出 $AB = AD = 1$ ， $l_{\widehat{BD}} = CD + CB = 2$ ，利用扇形面积与弧长的关系式进行求解即可.

【详解】 解：根据图象可得： $AB = AD = 1$ ，

$$l_{\widehat{BD}} = CD + CB = 2,$$

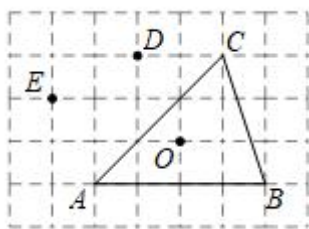
$$\therefore S_{\text{扇形}ABD} = \frac{1}{2} l_{\widehat{BD}} \times r = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1,$$

故答案为： 1.

【点睛】 题目主要考查正方形的性质，弧长及扇形面积公式，熟练掌握弧长及面积公式是解题关键.

17. 如图，在 5×7 网格中，各小正方形边长均为 1，点 O ， A ， B ， C ， D ， E 均在格点上，点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，在不添加其他字母的情况下，则除 $\triangle ABC$ 外把你认为外心也是 O 的三角形都写出来

_____.



【答案】 $\triangle ADC$ 、 $\triangle BDC$ 、 $\triangle ABD$

【解析】

【分析】 先求出 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 r ，再找到距离 O 点的长度同为 r 的点，即可求解。

【详解】 由网格图可知 O 点到 A 、 B 、 C 三点的距离均为： $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ，

则外接圆半径 $r = \sqrt{5}$ ，

图中 D 点到 O 点距离为： $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} = r$ ，

图中 E 点到 O 点距离为： $\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ ，

则可知除 $\triangle ABC$ 外把你认为外心也是 O 的三角形有： $\triangle ADC$ 、 $\triangle ADB$ 、 $\triangle BDC$ ，

故答案为： $\triangle ADC$ 、 $\triangle ADB$ 、 $\triangle BDC$ 。

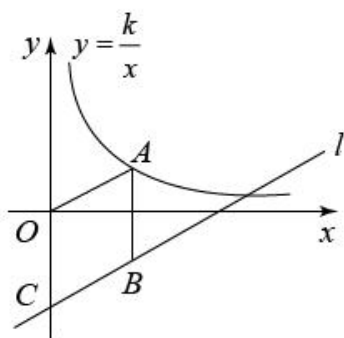
【点睛】 本题考查了外接圆的性质、勾股定理等知识，求出 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 r 是解答本题的关键。

18. 如图，点 A 在双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 上，点 B 在直线 $y = mx - 2b (m > 0, b > 0)$ 上， A 与 B 关于 x 轴对称，直线 l 与 y 轴交于点 C ，当四边形 $AOCB$ 是菱形时，有以下结论：

① $A(b, \sqrt{3}b)$ ② 当 $b = 2$ 时， $k = 4\sqrt{3}$

③ $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $S_{\text{四边形}AOCB} = 2b^2$

则所有正确结论的序号是_____。



【答案】 ②③

【解析】

【分析】根据一次函数图象上的点的坐标特征、菱形的性质及勾股定理即可求出 $A(\sqrt{3}b, b)$ ，即可判断①错误；根据反比例函数图象上的点的特征即可求出 $k = \sqrt{3}b^2$ ，当 $b = 2$ 时，即可求出 k 的值，即可判断②正确；将点 $B(\sqrt{3}b, b)$ 代入直线 $y = mx - 2b (m > 0, b > 0)$ ，即可求出 m 的值，即可判断③正确；再根据底乘高即可计算 $S_{\text{四边形}AOCB}$ ，继而判断④错误。

【详解】 $\because$ 直线 $y = mx - 2b (m > 0, b > 0)$ ，

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时， $y = -2b$ ，

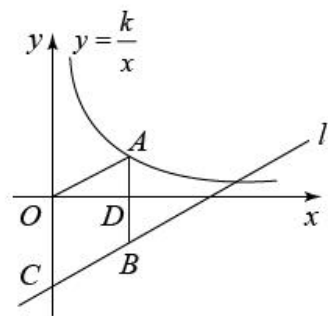
$\therefore C(0, -2b)$ ，

$\therefore OC = 2b$ ，

$\because$ 四边形 $AOCB$ 是菱形，

$\therefore OC = OA = AB = 2b$ ，

$\because A$ 与 B 关于 x 轴对称，设 AB 交 x 轴于点 D ，



$\therefore AD = BD = b$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle AOD$ 中， $OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{3}b$ ，

$\therefore A(\sqrt{3}b, b)$ ，故①错误；

$\because A(\sqrt{3}b, b)$ 在双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 上，

$\therefore b = \frac{k}{\sqrt{3}b}$ ，

$\therefore k = \sqrt{3}b^2$ ，

当 $b = 2$ 时， $k = 4\sqrt{3}$ ，故②正确；

$\because OD = \sqrt{3}b, BD = b$ ，

$$\therefore B(\sqrt{3}b, b),$$

$\because$ 点 B 在直线 $y = mx - 2b (m > 0, b > 0)$ 上,

$$\therefore \sqrt{3}mb - 2b = -b,$$

$$\therefore \sqrt{3}mb = b,$$

$$\therefore m = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 故③正确;}$$

$$S_{\text{四边形}AOCB} = AB \cdot OD = 2b \cdot \sqrt{3}b = 2\sqrt{3}b^2, \text{ 故④错误;}$$

综上, 正确结论的序号是②③,

故答案为: ②③.

【点睛】 本题考查了一次函数图象上的点的坐标特征、反比例函数图象上的点的坐标特征、菱形的性质及勾股定理, 熟练掌握知识点是解题的关键.

三、解答题: 本大题共 8 小题, 满分共 66 分, 解答应写出证明过程或演算步骤 (含相应的文字说明). 将解答写在答题卡上.

$$19. \text{ 计算: } 2022^0 + \sqrt{4} + \left| -\frac{1}{2} \right| - \sin 30^\circ.$$

【答案】 3

【解析】

【分析】 先化简每项, 再加减计算, 即可求解.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 原式} &= 1 + 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查零次幂, 二次根式, 绝对值, 三角函数; 注意先每项正确化简, 再加减计算即可求解.

$$20. \text{ 解方程: } \frac{x}{x-1} = \frac{x-1}{2x-2}.$$

【答案】 $x = -1$

【解析】

【分析】 两边同时乘以公分母 $(x-1)$, 先去分母化为整式方程, 计算出 x , 然后检验分母不为 0, 即可求解.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } \frac{x}{x-1} &= \frac{x-1}{2x-2}, \\ x &= \frac{1}{2}(x-1), \end{aligned}$$

解得 $x = -1$,

经检验 $x = -1$ 是原方程的解,

故原方程的解为: $x = -1$

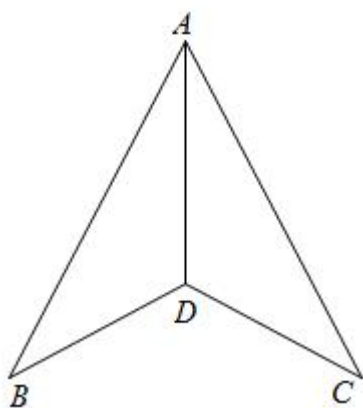
【点睛】 本题考查解分式方程, 注意分式方程要检验.

21. 问题情境:

在数学探究活动中, 老师给出了如图的图形及下面三个等式: ① $AB = AC$ ② $DB = DC$

③ $\angle BAD = \angle CAD$ 若以其中两个等式作为已知条件, 能否得到余下一个等式成立?

解决方案: 探究 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 全等.



问题解决:

(1) 当选择①②作为已知条件时, $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 全等吗? _____ (填“全等”或“不全等”), 理由是_____;

(2) 当任意选择两个等式作为已知条件时, 请用画树状图法或列表法求 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ 的概率.

【答案】 (1) 全等, 理由见详解

(2) $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 利用 SSS 即可作答;

(2) 先找到可以证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ 的条件组合, 再利用列表法列举即可求解.

【小问 1 详解】

全等,

理由: $\because AB=AC, DB=DC,$

又 $\because AD=AD,$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD(SSS);$

【小问 2 详解】

根据全等的判定方法可知①、②组合(SSS)或者①、③组合(SAS)可证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$,

根据题意列表如下:

	①	②	③
①		① ②	① ③
②	② ①		② ③
③	③ ①	③ ②	

由表可知总的可能情况有 6 种, 其中能判定 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ 的组合有 4 种,

能判定 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ 的概率为: $4 \div 6 = \frac{2}{3}$,

故所求概率为 $\frac{2}{3}$.

【点睛】 本题考查了全等三角形的判定、用列表法或树状图法求解概率的知识, 掌握全等的判定方法是解答本题的关键.

22. 为了加强对青少年防溺水安全教育, 5 月底某校开展了“远离溺水, 珍爱生命”的防溺水安全知识比赛. 下面是从参赛学生中随机收集到的 20 名学生的成绩 (单位: 分):

87 99 86 89 91 91 95 96 87 97

91 97 96 86 96 89 100 91 99 97

整理数据:

成绩 (分)	86	87	89	91	95	96	97	99	100
学生人数 (人)	2	2	2	<u>a</u>	1	3	<u>b</u>	2	1

分析数据:

平均数	众数	中位数
93	<u>c</u>	<u>d</u>

解决问题:

- (1) 直接写出上面表格中的 a , b , c , d 的值;
- (2) 若成绩达到 95 分及以上为“优秀”等级, 求“优秀”等级所占的百分率;
- (3) 请估计该校 1500 名学生中成绩达到 95 分及以上的学生人数.

【答案】(1) $a=4$; $b=3$; $c=91$; $d=93$;

(2) “优秀”等级所占的百分率为 50%;

(3) 估计该校 1500 名学生中成绩达到 95 分及以上的学生人数为 750 人.

【解析】

【分析】(1) 直接根据学生成绩的数据得出 a 、 b 的值; 由众数的定义确定 c 的值; 根据中位数的计算方法确定 d 的值即可;

(2) 先求出优秀的总人数, 然后求所占百分比即可;

(3) 用总人数乘以 (2) 中结论即可.

【小问 1 详解】

解: 根据学生的成绩得出: 得 91 分的学生人数为 4 人,

$$\therefore a=4;$$

得 97 分的学生人数为 4 人,

$$\therefore b=3;$$

得 91 分的学生人数最多, 出现 4 次,

$$\therefore \text{众数为 } 91,$$

$$\therefore c=91;$$

共有 20 名学生, 所以中位数为第 10、11 位学生成绩的平均数,

$$\because 2+2+2+4=10, \quad 2+2+2+4+1=11,$$

$$\therefore \text{第 } 10、11 \text{ 位学生成绩分别为 } 91, 95,$$

$$\therefore d = \frac{91+95}{2} = 93;$$

【小问 2 详解】

解: 95 分及以上的人数为: $1+3+3+2+1=10$,

$$\therefore \frac{10}{20} \times 100\% = 50\%,$$

“优秀”等级所占的百分率为 50%;

【小问 3 详解】

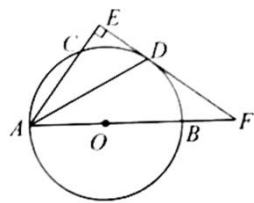
解: $1500 \times 50\% = 750$,

估计该校 1500 名学生中成绩达到 95 分及以上的学生人数为 750 人.

【点睛】题目主要考查对数据的分析, 包括求众数、中位数、优秀人数所占的百分比, 估计总人数等, 理解题意, 综合运用这些知识的是解题关键.

23. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, C, D 都是 $\odot O$ 上的点, AD 平分 $\angle CAB$, 过点 D 作 AC 的垂线交 AC 的延

长线于点 E ，交 AB 的延长线于点 F 。



(1) 求证： EF 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $AB = 10$ ， $AC = 6$ ，求 $\tan \angle DAB$ 的值。

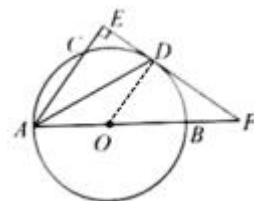
【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 连接 OD ，由题意可证 $OD \parallel AE$ ，由 $EF \perp AE$ ，可得 $EF \perp OD$ ，即可证得 EF 是 $\odot O$ 的切线；
(2) 连接 BC ，过点 C 作 $CM \perp AB$ 于点 M ，过点 D 作 $CN \perp AB$ 于点 N ，首先根据勾股定理可求得 BC ，根据面积可求得 CM ，再根据勾股定理可求得 AM ，再根据圆周角定理可证得 $\triangle CAM \sim \triangle DON$ ，即可求得 DN 、 ON 的长，据此即可解答。

【小问 1 详解】

证明：如图：连接 OD ，



$$\because OA = OD,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA,$$

$$\text{又} \because AD \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC,$$

$$\therefore \angle ODA = \angle CAD,$$

$$\therefore OD \parallel AE,$$

$$\text{又} \because EF \perp AE,$$

$$\therefore OD \perp EF,$$

$$\because OD \text{ 是 } \odot O \text{ 的半径},$$

$$\therefore EF \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线};$$

【小问 2 详解】

解：如图：连接 BC ，过点 C 作 $CM \perp AB$ 于点 M ，过点 D 作 $CN \perp AB$ 于点 N ，

吨龙眼加工成桂圆肉？

【答案】(1) 第一次购买了 7 吨龙眼，第二次购买了 14 吨龙眼

(2) 至少要把 15 吨龙眼加工成桂圆肉

【解析】

【分析】(1) 设第一次购买龙眼 x 吨，第二次购买龙眼 y 吨，根据题意列出二元一次方程组即可求解；

(2) 设将 a 吨龙眼加工成桂圆肉，则 $(21-a)$ 吨龙眼加工成龙眼干，则总的销售额为： $31.5 + 0.5a$ ，则根据题意有不等式 $31.5 + 0.5a \geq 39$ ，解该不等式即可求解。

【小问 1 详解】

设第一次购买龙眼 x 吨，第二次购买龙眼 y 吨，

根据题意有：

$$\begin{cases} x + y = 21 \\ 0.4x + 0.3y = 7 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = 7 \\ y = 14 \end{cases},$$

即第一次购买龙眼 7 吨，第二次购买龙眼 14 吨；

【小问 2 详解】

设将 a 吨龙眼加工成桂圆肉，则 $(21-a)$ 吨龙眼加工成龙眼干，

则总的销售额为： $a \times 0.2 \times 10 + (21-a) \times 0.5 \times 3 = 31.5 + 0.5a$ ，

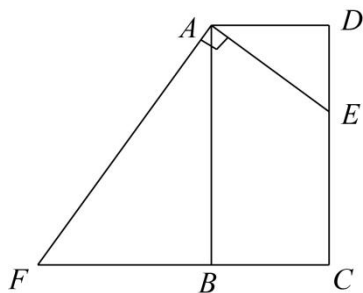
则根据题意有： $31.5 + 0.5a \geq 39$ ，

解得： $a \geq 15$ ，

即至少要把 15 吨龙眼加工成桂圆肉。

【点睛】 本题考查了二元一次方程组即一元一次不等式的应用，明确题意列出二元一次方程组即一元一次不等式是解答本题的关键。

25. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 8, AD = 4$ ，点 E 是 DC 边上的任一点（不包括端点 D, C ），过点 A 作 $AF \perp AE$ 交 CB 的延长线于点 F ，设 $DE = a$ 。



(1) 求 BF 的长（用含 a 的代数式表示）；

(2) 连接 EF 交 AB 于点 G ，连接 GC ，当 $GC \parallel AE$ 时，求证：四边形 $AGCE$ 是菱形.

【答案】(1) $BF = 2a$

(2) 见详解

【解析】

【分析】(1) 根据矩形的性质可得 $\angle BAD = \angle ABC = \angle D = 90^\circ$ ，然后可证 $\triangle ADE \sim \triangle ABF$ ，进而根据相似三角形的性质可求解；

(2) 如图，连接 AC ，由题意易证四边形 $AGCE$ 是平行四边形，然后可得 $\frac{BC}{AB} = \frac{BG}{BF} = \frac{1}{2}$ ，进而可证 $\triangle ABC \sim \triangle FBG$ ，则可证 $AC \perp GE$ ，最后问题可求证.

【小问 1 详解】

解：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle BAD = \angle ABC = \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore AF \perp AE,$$

$$\therefore \angle FAB + \angle BAE = \angle BAE + \angle EAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FAB = \angle EAD,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABF,$$

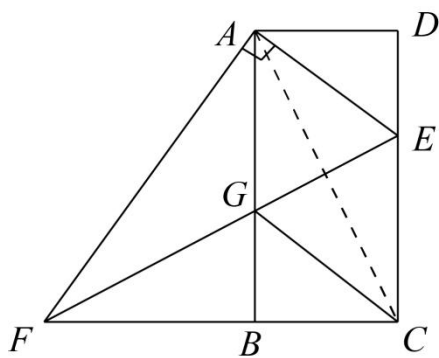
$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BF},$$

$$\therefore AB = 8, AD = 4, DE = a,$$

$$\therefore BF = \frac{DE \cdot AB}{AD} = 2a;$$

【小问 2 详解】

证明：由题意可得如图所示：



连接 AC ,

在矩形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD = BC = 4$, $AB = CD = 8$, $\angle ABC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ABC = \angle FBG = 90^\circ,$$

$$\because GC \parallel AE,$$

$\therefore$ 四边形 $AGCE$ 是平行四边形,

$$\therefore AG = CE,$$

$$\therefore BG = DE = a,$$

$$\therefore BF = 2a,$$

$$\therefore \frac{GB}{BF} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{BG}{BF} = \frac{1}{2},$$

$$\because \angle ABC = \angle FBG = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle FBG,$$

$$\therefore \angle FGB = \angle ACB,$$

$$\because \angle GFB + \angle FBG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GFB + \angle ACB = 90^\circ,$$

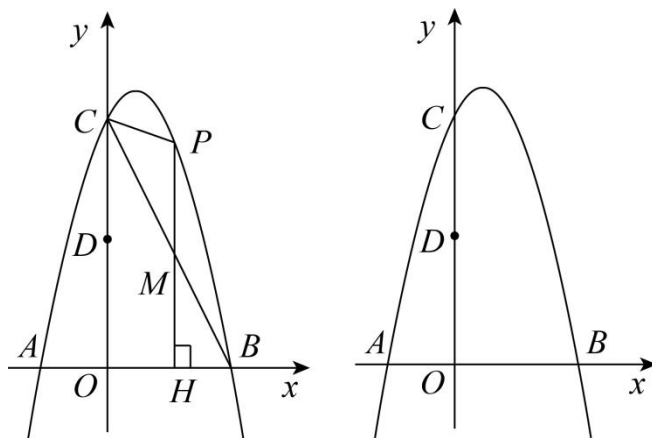
$$\therefore AC \perp GE,$$

$\therefore$ 四边形 $AGCE$ 是菱形.

【点睛】 本题主要考查相似三角形的性质与判定、矩形的性质及菱形的判定, 熟练掌握相似三角形的性质与判定、矩形的性质及菱形的判定是解题的关键.

26. 如图, 已知抛物线: $y = -2x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A , $B(2, 0)$ (A 在 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C ,

对称轴是直线 $x = \frac{1}{2}$, P 是第一象限内抛物线上的任一点.



备用图

- (1) 求抛物线的解析式；
- (2) 若点 D 为线段 OC 的中点，则 $\triangle POD$ 能否是等边三角形？请说明理由；
- (3) 过点 P 作 x 轴的垂线与线段 BC 交于点 M ，垂足为点 H ，若以 P, M, C 为顶点的三角形与 $\triangle BMH$ 相似，求点 P 的坐标。

【答案】(1) $y = -2x^2 + 2x + 4$

(2) 不能，理由过程见详解

(3) (1,4)或者 $(\frac{3}{4}, \frac{35}{8})$

【解析】

【分析】(1) 根据抛物线对称轴即可求出 b ，再根据抛物线过 B 点即可求出 C ，则问题得解；

(2) 假设 $\triangle POD$ 是等边三角形，过 P 点作 $PN \perp OD$ 于 N 点，根据等边三角形的性质即可求出 P 点坐标，再验证 P 点是否在抛物线上即可求证；

(3) 先根据 $PH \perp BO$ ，求得 $\angle MHB = 90^\circ$ ，根据 (2) 中的结果求得 $OC=4$ ，根据 B 点(2,0)，可得 $OB=2$ ，则有 $\tan \angle CBO=2$ ，分类讨论：第一种情况： $\triangle BMH \sim \triangle CMP$ ，即可得 $PC \parallel OB$ ，即 P 点纵坐标等于 C 点纵坐标则可求出此时 P 点坐标为(1,4)；第二种情况： $\triangle BMH \sim \triangle PMC$ ，过 P 点作 $PG \perp y$ 轴于点 G ，先证明 $\angle GCP = \angle OBC$ ，即有 $\tan \angle GCP=2$ ，即有 $2GC=GP$ ，设 $GP=a$ ，则 $GC=\frac{1}{2}a$ ，即可得 $PH=OG=\frac{1}{2}a+4$ ，则有 P 点坐标为 $(a, \frac{1}{2}a+4)$ ，代入到抛物线即可求出 a 值，则此时 P 点坐标可求。

【小问 1 详解】

$\because y = -2x^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = \frac{1}{2}$,

$\therefore -\frac{b}{2 \times (-2)} = \frac{1}{2}$, 即 $b=2$,

$\because y = -2x^2 + bx + c$ 过 B 点(2,0),

$\therefore -2 \times 2^2 + b \times 2 + c = 0$,

$\therefore$ 结合 $b=2$ 可得 $c=4$,

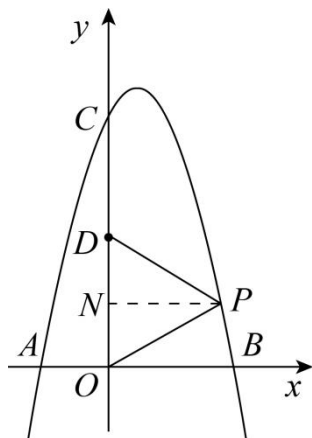
即抛物线解析式为: $y = -2x^2 + 2x + 4$;

【小问 2 详解】

$\triangle POD$ 不可能是等边三角形,

理由如下:

假设 $\triangle POD$ 是等边三角形，过 P 点作 $PN \perp OD$ 于 N 点，如图，



$$\because \text{当 } x=0 \text{ 时, } y = -2x^2 + 2x + 4 = 4,$$

$$\therefore C \text{ 点坐标为}(0,4),$$

$$\therefore OC=4,$$

$$\because D \text{ 点是 } OC \text{ 的中点},$$

$$\therefore DO=2,$$

$$\because \text{在等边 } \triangle POD \text{ 中, } PN \perp OD,$$

$$\therefore DN=NO=\frac{1}{2}DO=1,$$

$$\because \text{在等边 } \triangle POD \text{ 中, } \angle NOP=60^\circ,$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle NOP \text{ 中, } NP=NO \times \tan \angle NOP=1 \times \tan 60^\circ=\sqrt{3},$$

$$\therefore P \text{ 点坐标为}(\sqrt{3},1),$$

经验证 P 点不在抛物线上，

故假设不成立，

即 $\triangle POD$ 不可能是等边三角形；

【小问 3 详解】

$$\because PH \perp BO,$$

$$\therefore \angle MHB=90^\circ,$$

根据 (2) 中的结果可知 C 点坐标为 $(0,4)$ ，

$$\text{即 } OC=4,$$

$$\because B \text{ 点}(2,0),$$

$$\therefore OB=2,$$

$$\therefore \tan \angle CBO = 2,$$

分类讨论

第一种情况： $\triangle BMH \sim \triangle CMP$,

$$\therefore \angle MHB = \angle MPC = 90^\circ,$$

$$\therefore PC \parallel OB,$$

$\therefore$ 即 P 点纵坐标等于 C 点纵坐标，也为 4，

$$\text{当 } y=4 \text{ 时， } -2x^2 + 2x + 4 = 4,$$

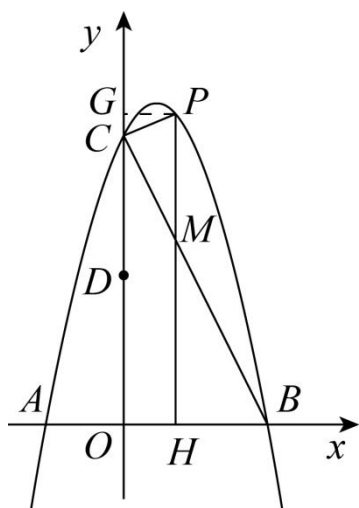
解得： $x=1$ 或者 0，

$\therefore P$ 点在第一象限，

$\therefore$ 此时 P 点坐标为(1,4)，

第二种情况： $\triangle BMH \sim \triangle PMC$,

过 P 点作 $PG \perp y$ 轴于点 G ，如图，



$$\therefore \triangle BMH \sim \triangle PMC,$$

$$\therefore \angle MHB = \angle MCP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GCP + \angle OCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OCB + \angle OBC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GCP = \angle OBC,$$

$$\therefore \tan \angle GCP = \tan \angle OBC = 2,$$

$$\therefore PG \perp OG,$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle PGC \text{ 中， } 2GC = GP,$$

设 $GP=a$,

$$\therefore GC = \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore GO = \frac{1}{2}a + OC = \frac{1}{2}a + 4,$$

$$\because PG \perp OG, PH \perp OH,$$

$\therefore$ 可知四边形 $PGOH$ 是矩形,

$$\therefore PH = OG = \frac{1}{2}a + 4,$$

$$\therefore P \text{ 点坐标为 } (a, \frac{1}{2}a + 4),$$

$$\therefore \frac{1}{2}a + 4 = -2a^2 + 2a + 4,$$

$$\text{解得: } a = \frac{3}{4} \text{ 或者 } 0,$$

$\therefore P$ 点在第一象限,

$$\therefore a = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{2}a + 4 = \frac{35}{8},$$

$$\text{此时 } P \text{ 点坐标为 } (\frac{3}{4}, \frac{35}{8});$$

$\therefore \triangle BMH$ 与 $\triangle PCM$ 中, 有 $\angle BMH = \angle PMC$ 恒相等,

$\therefore \triangle PCM$ 中, 当 $\angle CPM$ 为直角时, 若 $\angle PCM = \angle BMH$, 则可证 $\triangle PCM$ 是等腰直角三角形,

通过相似可知 $\triangle BMH$ 也是等腰直角三角形, 这与 $\tan \angle CBO = 2$ 相矛盾, 故不存在当 $\angle CPM$ 为直角时, $\angle PCM = \angle BMH$ 相等的情况;

同理不存在当 $\angle PCM$ 为直角时, $\angle CPM = \angle BMH$ 相等的情况,

综上所述: P 点坐标为: $(1, 4)$ 或者 $(\frac{3}{4}, \frac{35}{8})$.

【点睛】 本题考查了求解抛物线解析式、二次函数的图像与性质、等边三角形的判定、相似三角形的性质、解直角三角形等知识, 掌握二次函数的图像与性质是解答本题的关键.

淘宝：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022