

2022 年广西北部湾经济区初中学业水平考试

数学

(考试时间：120 分钟 满分：120 分)

注意：本试卷分试题卷和答题卡两部分，答案一律填写在答题卡上，在试题卷上作答无效；不能使用计算器；考试结束后，将本试题卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

一、选择题（共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分。在每小题给出的四个选项中只有一项是符合要求的，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，）

1. $-\frac{1}{3}$ 的相反数是（ ）

A. $\frac{1}{3}$

B. $-\frac{1}{3}$

C. 3

D. -3

【答案】A

【解析】

【详解】试题分析：根据相反数的意义知： $-\frac{1}{3}$ 的相反数是 $\frac{1}{3}$ 。

故选：A.

【考点】相反数.

2. 2022 北京冬残奥会的会徽是以汉字“飞”为灵感来设计的，展现了运动员不断飞跃，超越自我，奋力拼搏，激励世界的冬残奥精神下列的四个图中，能由如图所示的会徽经过平移得到的是（ ）



【答案】D

【解析】

【分析】根据平移的特点分析判断即可.

【详解】根据题意，得



故 A 不符合题意;



故 B 不符合题意;



故 C 不符合题意;



故 D 符合题意;

故选 D.

【点睛】 本题考查了平移的特点，熟练掌握平移的特点是解题的关键.

3. 空气是混合物，为直观介绍空气各成分的百分比，最适合用的统计图是 ()

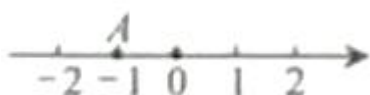
- A. 折线图 B. 条形图 C. 直方图 D. 扇形图

【答案】 D

【解析】

【详解】 解： 由分析可知， 要求直观反映空气的组成情况， 即各部分在总体中所占的百分比， 结合统计图各自的特点， 应选择扇形统计图. 故选 D.

4. 如图， 数轴上的点 A 表示的数是 -1 ， 则点 A 关于原点对称的点表示的数是 ()



- A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

【答案】 C

【解析】

【分析】根据数轴上表示一对相反数的点关于原点对称即可求得答案.

【详解】 $\because$ 数轴上的点 A 表示的数是 -1 ,

$\therefore$ 点 A 关于原点对称的点表示的数为 1 ,

故选: C.

【点睛】本题考查了实数与数轴之间的对应关系, 熟练掌握对称的性质是解题的关键.

5. 不等式 $2x-4<10$ 的解集是 ()

A. $x<3$

B. $x<7$

C. $x>3$

D. $x>7$

【答案】B

【解析】

【分析】先移项, 合并同类项, 再不等式的两边同时除以 2 , 即可求解.

【详解】 $\because 2x-4<10$,

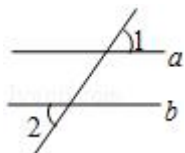
$\therefore 2x<14$,

$\therefore x<7$,

故选: B.

【点睛】本题考查了解一元一次不等式, 熟练掌握解不等式的步骤是解题的关键.

6. 如图, 已知 $a \parallel b$, $\angle 1=55^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数是().



A. 35°

B. 45°

C. 55°

D. 125°

【答案】C

【解析】

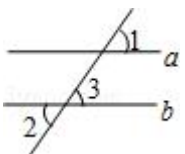
【分析】根据两直线平行, 同位角相等可得 $\angle 3=\angle 1=55^\circ$, 再根据对顶角相等即可求得答案.

【详解】 $\because a \parallel b$,

$\therefore \angle 3=\angle 1=55^\circ$,

$\therefore \angle 2=\angle 3=55^\circ$.

故选 C.



7. 下列事件是必然事件的是 ()

【答案】D

【解析】

【分析】根据各自的运算，依据法则计算判断即可.

【详解】 $\because a, a^2$ 不是同类项,

$\therefore$ 无法计算, 不符合题意;

$\because a \cdot a^2 = a^3$,

$\therefore$ 计算错误, 不符合题意;

$\because a^6 \div a^2 = a^4$,

$\therefore$ 计算错误, 不符合题意;

$\because (a^{-1})^{-3} = a^3$,

$\therefore$ 符合题意;

故选 D.

【点睛】本题考查了整式的乘法, 除法, 加减, 负整数指数幂的运算, 熟练掌握运算的法则是解题的关键.

10. 《千里江山图》是宋代王希孟的作品, 如图, 它的局部画面装裱前是一个长为 2.4 米, 宽为 1.4 米的矩形, 装裱后, 整幅图画宽与长的比是 8: 13, 且四周边衬的宽度相等, 则边衬的宽度应是多少米? 设边衬的宽度为 x 米, 根据题意可列方程 ()



A. $\frac{1.4-x}{2.4-x} = \frac{8}{13}$

B. $\frac{1.4+x}{2.4+x} = \frac{8}{13}$

C. $\frac{1.4-2x}{2.4-2x} = \frac{8}{13}$

D. $\frac{1.4+2x}{2.4+2x} = \frac{8}{13}$

【答案】D

【解析】

【分析】设边衬的宽度为 x 米, 则整幅图画宽为 $(1.4+2x)$ 米, 整幅图画长为 $(2.4+2x)$ 米, 根据整幅图画宽与长的比是 8: 13, 列出方程即可.

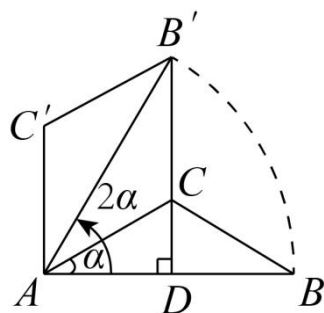
【详解】解: 设边衬的宽度为 x 米, 根据题意, 得

$$\frac{1.4+2x}{2.4+2x} = \frac{8}{13},$$

故选：D.

【点睛】 本题考查分式方程的应用，根据题意找出等量关系是解题的关键.

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $CA = CB = 4$ ， $\angle BAC = \alpha$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 2α ，得到 $\triangle AB'C'$ ，连接 $B'C$ 并延长交 AB 于点 D ，当 $B'D \perp AB$ 时， $\widehat{BB'}$ 的长是（ ）



A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$

C. $\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi$

D. $\frac{10\sqrt{3}}{9}\pi$

【答案】 B

【解析】

【分析】 先证 $\angle B'AD = 60^\circ$ ，再求出 AB 的长，最后根据弧长公式求得 $\widehat{BB'}$.

【详解】 解： $\because CA = CB, B'D \perp AB$,

$$\therefore AD = DB = \frac{1}{2}AB,$$

$\because \triangle AB'C'$ 是 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 2α 得到,

$$\therefore AB = AB', \quad AD = \frac{1}{2}AB',$$

在 $Rt\triangle AB'D$ 中, $\cos \angle B'AD = \frac{AD}{AB'} = \frac{1}{2}$,

$$\therefore \angle B'AD = 60^\circ,$$

$$\because \angle CAB = \alpha, \angle B'AB = 2\alpha,$$

$$\therefore \angle CAB = \frac{1}{2}\angle B'AB = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\because AC = BC = 4,$$

$$\therefore AD = AC \cdot \cos 30^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AB = 2AD = 4\sqrt{3},$$

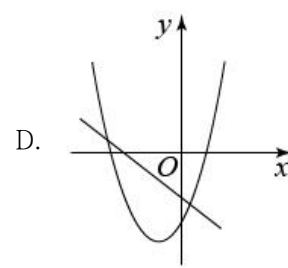
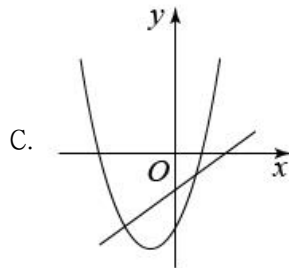
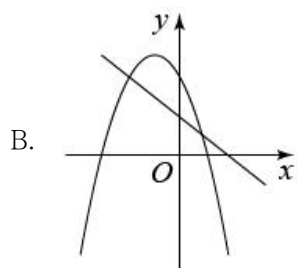
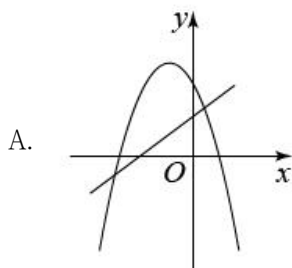
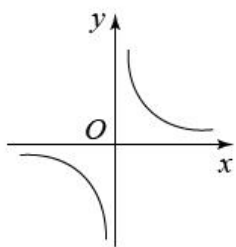
$$\therefore \widehat{BB'}$$
 的长 $= \frac{60\pi AB}{180} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi,$

故选：B.

【点睛】本题考查了图形的旋转变换，等腰三角形的性质，三角函数定义，弧长公式，正确运算三角函数定义求线段的长度是解本题的关键.

12. 已知反比例函数 $y = \frac{b}{x} (b \neq 0)$ 的图象如图所示，则一次函数 $y = cx - a (c \neq 0)$ 和二次函数

$y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 在同一平面直角坐标系中的图象可能是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】先由反比例函数图象得出 $b > 0$ ，再分当 $a > 0$ ， $a < 0$ 时分别判定二次函数图象符合的选项，在符合的选项中，再判定一次函数图象符合的即可得出答案.

【详解】解： $\because$ 反比例函数 $y = \frac{b}{x} (b \neq 0)$ 的图象在第一和第三象限内，

$$\therefore b > 0,$$

若 $a < 0$ ，则 $-\frac{b}{2a} > 0$ ，所以二次函数开口向下，对称轴在 y 轴右侧，故 A、B、C、D 选项全不符合；

当 $a > 0$ ，则 $-\frac{b}{2a} < 0$ 时，所以二次函数开口向上，对称轴在 y 轴左侧，故只有 C、D 两选项可能符合题意，

由 C、D 两选图象知， $c < 0$ ，又 $\because a > 0$ ，则 $-a < 0$ ，当 $c < 0, a > 0$ 时，一次函数 $y = cx - a$ 图象经过第二、第三、第四

象限，故只有 D 选项符合题意.

故选：D.

【点睛】本题词考查函数图象与系数的关键，熟练掌握反比例函数图象、一次函数图象、二次函数图象与系数的关系是解题的关键.

第 II 卷

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 2 分，共 12 分.）

13. 化简：(1) $\sqrt{8}$ =_____.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】根据 $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2}$ ，计算出结果即可.

【详解】解： $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

故答案为： $2\sqrt{2}$.

【点睛】此题主要考查了二次根式的性质与化简，正确化简二次根式是解题关键.

14. 当 x =_____时，分式 $\frac{2x}{x+2}$ 的值为零.

【答案】 0

【解析】

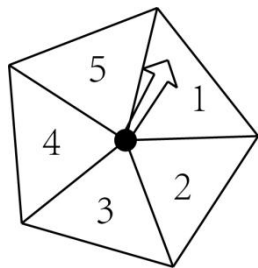
【分析】根据分式值为零，分子等于零，分母不为零得 $2x=0$ ， $x+2 \neq 0$ 求解即可.

【详解】解：由题意，得 $2x=0$ ，且 $x+2 \neq 0$ ，解得： $x=0$ ，

故答案为：0.

【点睛】本题考查分式值为零的条件，熟练掌握分式值为零的条件“分子为零，分母不为零”是解题的关键.

15. 如图，一个质地均匀的正五边形转盘，指针的位置固定，当转盘自由转动停止后，观察指针指向区域内的数（若指针正好指向分界线，则重新转一次），这个数是一个奇数的概率是_____.



【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】

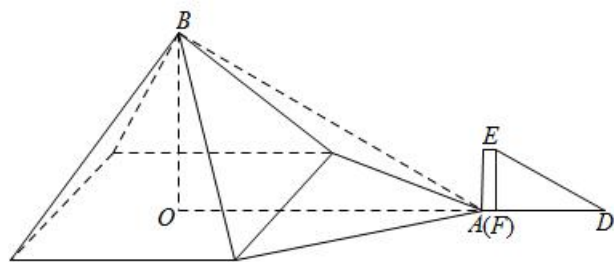
【分析】由题意知，一个质地均匀的正五边形转盘被分成 5 个形状大小相同的三角形，标有奇数的三角形有 3 个，用奇数的个数除以数字的总数即为这个数是一个奇数的概率。

【详解】解：一个质地均匀的正五边形转盘被分成 5 个形状大小相同的三角形，上面分别标有奇数的三角形有 3 个，当转盘自由转动停止后，观察指针指向区域内的数，这个数是一个奇数的概率是： $3 \div 5 = \frac{3}{5}$ 。

故答案为： $\frac{3}{5}$ 。

【点睛】本题考查概率的求法与运用。一般方法：如果一个事件有 n 种可能，而且这些事件的可能性相同，其中事件 A 出现 m 种结果，那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$ 。

16. 古希腊数学家泰勒斯曾利用立杆测影的方法，在金字塔影子的顶部直立一根木杆，借助太阳光测金字塔的高度。如图，木杆 EF 长 2 米，它的影长 FD 是 4 米，同一时刻测得 OA 是 268 米，则金字塔的高度 BO 是_____米。



【答案】 134

【解析】

【分析】在同一时刻物高和影子成正比，即在同一时刻的两个物体，影子，经过物体顶部的太阳光线三者构成的两个直角三角形相似，根据相似三角形的性质即可得。

【详解】解： $\because BF \parallel ED$,

$$\therefore \angle BAO = \angle EDF,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle DEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABO \sim \triangle EDF,$$

$$\therefore BO : EF = AO : FD,$$

$$\therefore BO : 2 = 268 : 4,$$

$$\therefore BO = 134,$$

故答案为：134。

【点睛】本题考查了相似三角形的应用，解题的关键是了解：同一时刻物高和影长成正比。

17. 阅读材料：整体代值是数学中常用的方法. 例如“已知 $3a-b=2$ ，求代数式 $6a-2b-1$ 的值.”可以这样解： $6a-2b-1=2(3a-b)-1=2\times 2-1=3$. 根据阅读材料，解决问题：若 $x=2$ 是关于 x 的一元一次方程 $ax+b=3$ 的解，则代数式 $4a^2+4ab+b^2+4a+2b-1$ 的值是_____.

【答案】 14

【解析】

【分析】先根据 $x=2$ 是关于 x 的一元一次方程 $ax+b=3$ 的解，得到 $2a+b=3$ ，再把所求的代数式变形为 $(2a+b)^2+2(2a+b)-1$ ，把 $2a+b=3$ 整体代入即可求值.

【详解】解：∵ $x=2$ 是关于 x 的一元一次方程 $ax+b=3$ 的解，

$$\therefore 2a+b=3,$$

$$\therefore 4a^2+4ab+b^2+4a+2b-1$$

$$=(2a+b)^2+2(2a+b)-1$$

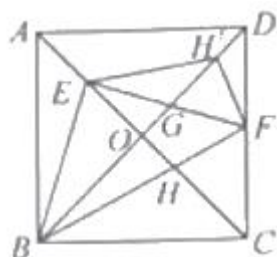
$$=3^2+2\times 3-1$$

$$=14.$$

故答案为：14.

【点睛】本题考查了代数式的整体代入求值及一元一次方程解的定义，把所求的代数式利用完全平方公式变形是解题的关键.

18. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB=4\sqrt{2}$ ，对角线 AC, BD 相交于点 O . 点 E 是对角线 AC 上一点，连接 BE ，过点 E 作 $EF \perp BE$ ，分别交 CD, BD 于点 F, G ，连接 BF ，交 AC 于点 H ，将 $\triangle EFH$ 沿 EF 翻折，点 H 的对应点 H' 恰好落在 BD 上，得到 $\triangle EFH'$ 若点 F 为 CD 的中点，则 $\triangle EGH'$ 的周长是_____.



【答案】 $5+\sqrt{5}+\sqrt{5}+5$

【解析】

【分析】过点 E 作 $PQ \parallel AD$ 交 AB 于点 P ，交 DC 于点 Q ，得到 $BP=CQ$ ，从而证得 $\triangle BPE \cong \triangle EQF$ ，得

到 $BE=EF$ ，再利用 $BC=4\sqrt{2}$ ， F 为中点，求得 $BF=\sqrt{BC^2+CF^2}=2\sqrt{10}$ ，从而得到

$BE=EF=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{5}$ ，再求出 $EO=\sqrt{BE^2-BO^2}=2$ ，再利用 $AB\parallel FC$ ，求出 $\triangle ABH\sim\triangle CFH$ ，

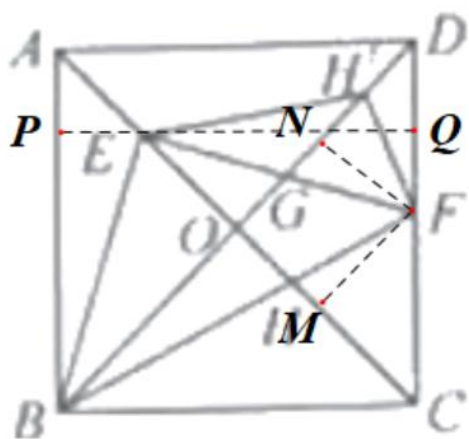
得到 $\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{AH}{CH}=\frac{2}{1}$ ，求得 $AH=\frac{2}{3}\times 8=\frac{16}{3}$ ， $CH=\frac{1}{3}\times 8=\frac{8}{3}$ ，从而得到 $EH=AH-AE=\frac{16}{3}-2=\frac{10}{3}$ ，

再求得 $\triangle EOB\sim\triangle GOE$ 得到 $\frac{EG}{2\sqrt{5}}=\frac{OG}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ，求得 $EG=\sqrt{5}$ ， $OG=1$ ，过点 F 作 $FM\perp AC$ 于点 M ，

作 $FN\perp OD$ 于点 N ，求得 $FM=2$ ， $MH=\frac{2}{3}$ ， $FN=2$ ，证得 $Rt\triangle FH'N\cong Rt\triangle FMH$ 得到 $H'N=MH=\frac{2}{3}$ ，从

而得到 $ON=2$ ， $NG=1$ ， $GH'=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$ ，从而得到答案.

【详解】解：过点 E 作 $PQ\parallel AD$ 交 AB 于点 P ，交 DC 于点 Q ，



$\because AD\parallel PQ$,

$\therefore AP=DQ$, $\angle BPQ=\angle CQE$,

$\therefore BP=CQ$,

$\because \angle ACD=45^\circ$,

$\therefore BP=CQ=EQ$,

$\because EF\perp BE$,

$\therefore \angle PEB+\angle FEQ=90^\circ$

$\because \angle PBE+\angle PEB=90^\circ$

$$\therefore \angle PBE = \angle FEQ,$$

在 $\triangle BPE$ 与 $\triangle EQF$ 中

$$\begin{cases} \angle BPQ = \angle FQE \\ PB = EQ \\ \angle PBE = \angle FEQ \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BPE \cong \triangle EQF,$$

$$\therefore BE = EF,$$

又 $\because BC = AB = 4\sqrt{2}$, F 为中点,

$$\therefore CF = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore BF = \sqrt{BC^2 + CF^2} = 2\sqrt{10},$$

$$\therefore BE = EF = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{5},$$

$$\text{又} \because BO = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4,$$

$$\therefore EO = \sqrt{BE^2 - BO^2} = 2,$$

$$\therefore AE = AO - EO = 4 - 2 = 2,$$

$$\because AB \parallel FC,$$

$$\therefore \triangle ABH \sim \triangle CFH,$$

$$\therefore \frac{AB}{CF} = \frac{AH}{CH},$$

$$\therefore \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{AH}{CH} = \frac{2}{1},$$

$$\because AC = \sqrt{2}AB = 8,$$

$$\therefore AH = \frac{2}{3} \times 8 = \frac{16}{3},$$

$$CH = \frac{1}{3} \times 8 = \frac{8}{3},$$

$$\therefore EH = AH - AE = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3},$$

$$\because \angle BEO + \angle FEO = 90^\circ,$$

$$\angle BEO + \angle EBO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FEO = \angle EBO,$$

$$\text{又} \because \angle EOB = \angle EOG = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle EOB \sim \triangle GOE$$

$$\therefore \frac{EG}{BE} = \frac{OG}{OE} = \frac{OE}{OB},$$

$$\frac{EG}{2\sqrt{5}} = \frac{OG}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore EG = \sqrt{5}, \quad OG = 1,$$

过点 F 作 $FM \perp AC$ 于点 M ,

$$\therefore FM = MC = \frac{FC}{\sqrt{2}} = 2,$$

$$\therefore MH = CH - MC = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3},$$

作 $FN \perp OD$ 于点 N ,

$$FN = \frac{DF}{\sqrt{2}} = 2,,$$

在 $\text{Rt} \triangle FH'N$ 与 $\text{Rt} \triangle FMH$ 中

$$\begin{cases} FH' = FH \\ FN = FM \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle FH'N \cong \text{Rt} \triangle FHM$$

$$\therefore H'N = MH = \frac{2}{3},$$

$$\therefore ON = 2, \quad NG = 1,$$

$$\therefore GH' = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3},$$

$$\therefore C_{\triangle EGH'} = EH' + EG + GH' = EH + EG + GH = \frac{10}{3} + \sqrt{5} + \frac{5}{3} = 5 + \sqrt{5},$$

故答案为: $5 + \sqrt{5}$.

【点睛】 本题考查了正方形的性质应用，重点是与三角形相似和三角形全等的结合，熟练掌握做辅助线是

解题的关键.

三、解答题（本大题共 8 小题，共 72 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

19. 计算： $(-1+2) \times 3 + 2^2 + (-4)$.

【答案】 3

【解析】

【分析】 先计算括号内的，并计算乘方，再计算乘法，最后计算加减即可．

【详解】 解： 原式 $=1 \times 3 + 4 - 4$

$$= 3 + 4 - 4$$

$$= 3.$$

【点睛】 本题考查有理数混合运算，熟练掌握有理数运算法则是解题的关键，注意解题时要注意运算顺序：从高级到低级运算，有括号时应先算括号．

20. 先化简，再求值 $x(x+y)(x-y) + (xy^2 - 2xy) + x$ ，其中 $x=1, y=\frac{1}{2}$.

【答案】 $x^3 - 2xy + x$, 1

【解析】

【分析】 首先运用平方差公式计算，再运用单项式乘以多项式计算，最后合并同类项，即可化简，然后把 x 、 y 值代入计算即可．

【详解】 解： $x(x+y)(x-y) + (xy^2 - 2xy) + x$

$$= x(x^2 - y^2) + xy^2 - 2xy + x$$

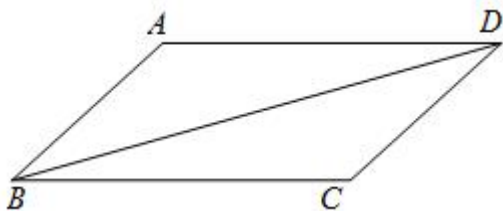
$$= x^3 - xy^2 + xy^2 - 2xy + x$$

$$= x^3 - 2xy + x,$$

$$\text{当 } x=1, y=\frac{1}{2} \text{ 时, 原式} = 1^3 - 2 \times 1 \times \frac{1}{2} + 1 = 1.$$

【点睛】 本题考查整式化简求值，熟练掌握整式混合运算法则是解题的关键．

21. 如图，在 $\square ABCD$ 中， BD 是它的一条对角线，



(1) 求证： $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ ；

(2) 尺规作图：作 BD 的垂直平分线 EF ，分别交 AD ， BC 于点 E ， F （不写作法，保留作图痕迹）；

(3) 连接 BE ，若 $\angle DBE = 25^\circ$ ，求 $\angle AEB$ 的度数.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 50°

【解析】

【分析】(1) 由平行四边形的性质得出 $AB = CD, AD = BC$ ，可利用“SSS”证明三角形全等；

(2) 根据垂直平分线的作法即可解答；

(3) 根据垂直平分线的性质可得 $BE = DE$ ，由等腰三角形的性质可得 $\angle DBE = \angle BDE$ ，再根据三角形外角的性质求解即可.

【小问 1 详解】

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

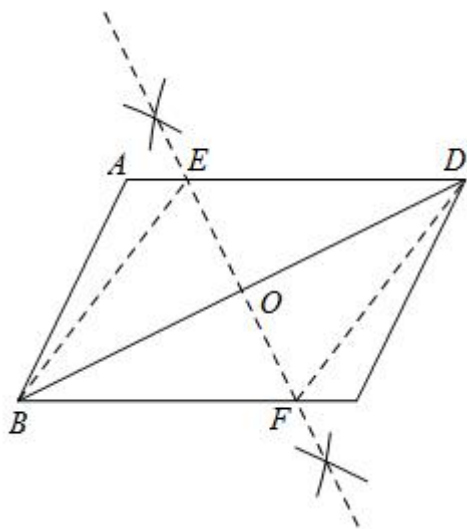
$\therefore AB = CD, AD = BC$ ，

$\because BD = BD$ ，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CDB (SSS)$

【小问 2 详解】

如图， EF 即为所求；



【小问 3 详解】

$\because BD$ 的垂直平分线为 EF ，

$\therefore BE = DE$ ，

$\therefore \angle DBE = \angle BDE$ ，

$\because \angle DBE = 25^\circ$ ，

$\therefore \angle DBE = \angle BDE = 25^\circ$ ，

$\therefore \angle AEB = \angle BDE + \angle DBE = 50^\circ$.

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质，全等三角形的判定和性质，垂直平分线的作法和性质，等腰三角形的性质及三角形外角的性质，熟练掌握知识点是解题的关键.

22. 综合与实践

【问题情境】 数学活动课上，老师带领同学们开展“利用树叶的特征对树木进行分类”的实践活动，

【实践发现】 同学们随机收集芒果树、荔枝树的树叶各 10 片，通过测量得到这些树叶的长 y （单位：cm），宽 x （单位：cm）的数据后，分别计算长宽比，整理数据如下：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
芒果树叶的长宽比	3.8	3.7	3.5	3.4	3.8	4.0	3.6	4.0	3.6	4.0
荔枝树叶的长宽比	2.0	2.0	2.0	2.4	1.8	1.9	1.8	2.0	1.3	1.9

【实践探究】 分析数据如下：



	平均数	中位数	众数	方差
芒果树叶的长宽比	3.74	m	4.0	0.0424
荔枝树叶的长宽比	1.91	2.0	n	0.0669

【问题解决】

- (1) 上述表格中， $m =$ _____， $n =$ _____；
- (2) ①A 同学说：“从树叶的长宽比的方差来看，我认为芒果树叶的形状差别大．”
- ②B 同学说：“从树叶的长宽比的平均数、中位数和众数来看，我发现荔枝树叶的长约为宽的两倍．”
- 上面两位同学的说法中，合理的是_____（填序号）
- (3) 现有一片长11cm，宽5.6cm的树叶，请判断这片树叶更可能来自于芒果、荔枝中的哪种树?并给出你的理由.

【答案】 (1) 3.75, 2.0

(2) ② (3) 这片树叶更可能来自于荔枝，理由见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据中位数和众数的定义求解即可；

(2) 根据方差的定义，方差越小，形状差别越小，根据树叶的长宽比的平均数、中位数和众数来看，即可判断荔枝树叶的长宽比；

(3) 计算该树叶的长宽比即可判断来自哪颗树.

【小问 1 详解】

芒果树叶的长宽比中数据从小到大排序处在第 5、6 位的两个数的平均数为 $\frac{3.7+3.8}{2}=3.75$ ，因此中位数 $m=3.75$ ；

荔枝树叶的长宽比中数据出现次数最多的是 2.0，因此众数 $n=2.0$ ；

故答案为：3.75，2.0；

【小问 2 详解】

合理的是②，理由如下：从树叶的长宽比的方差来看，芒果树叶的长宽比的方差较小，所以芒果叶形状差别更小；从树叶的长宽比的平均数、中位数和众数来看，荔枝树叶的长宽比为 2，所以荔枝树叶的长约为宽的两倍；

故答案为：②；

【小问 3 详解】

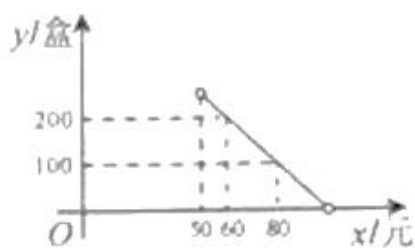
这片树叶更可能来自荔枝，理由如下：

这片树叶长 11cm，宽 5.6cm，长宽比大约为 2.0，

根据平均数这片树叶可能来自荔枝树.

【点睛】本题考查了统计图中中位数、众数、平均数、方差的意义，看懂统计图表，正确的计算是解决问题的关键.

23. 打油茶是广西少数民族特有的一种民俗，某特产公司近期销售一种盒装油茶，每盒的成本价为 50 元，经市场调研发现，该种油茶的月销售量 y （盒）与销售单价 x （元）之间的函数图像如图所示.



(1) 求 y 与 x 的函数解析式，并写出自变量 x 的取值范围；

(2) 当销售单价定为多少元时，该种油茶的月销售利润最大？求出最大利润.

【答案】(1) $y=-5x+500$ ， $50 < x < 100$

(2) 75 元，3125 元

【解析】

【分析】(1) 设直线的解析式为 $y=kx+b$ ，根据题意，得 $\begin{cases} 80k+b=100 \\ 60k+b=200 \end{cases}$ ，确定解析式，结合图像，确定自

变量取值范围是 $50 < x < 100$.

(2) 设销售单价为 x 元，总利润为 w 元，根据题意构造二次函数，根据函数的最值计算即可.

【小问 1 详解】

设直线的解析式为 $y=kx+b$ ，根据题意，得

$$\begin{cases} 80k+b=100 \\ 60k+b=200 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k=-5 \\ b=500 \end{cases}$$

$\therefore$ 函数的解析式为 $y=-5x+500$,

当 $y=0$ 时， $-5x+500=0$,

解得 $x=100$,

结合图像，自变量取值范围是 $50 < x < 100$.

【小问 2 详解】

设销售单价为 x 元，总利润为 w 元，根据题意，得：

$$W=(x-50)(-5x+500)$$

$$=-5(x-75)^2+3125,$$

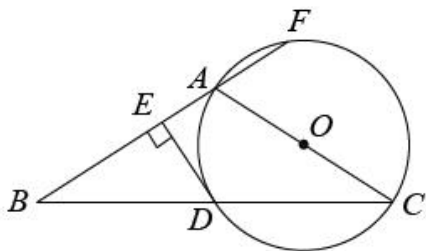
$$\because -5 < 0,$$

$\therefore w$ 有最大值，且当 $x=75$ 时， w 有最大值，为 3125，

故销售单价定为 75 元时，该种油茶按月销售利润最大；最大利润是 3125 元.

【点睛】本题考查了待定系数法确定一次函数的解析式，构造二次函数求最值，熟练掌握待定系数法，正确构造二次函数是解题的关键.

24. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，以 AC 为直径作 $\odot O$ 交 BC 于点 D ，过点 D 作 $DE \perp AB$ ，垂足为 E ，延长 BA 交 $\odot O$ 于点 F .



(1) 求证： DE 是 $\odot O$ 的切线

(2) 若 $\frac{AE}{DE} = \frac{2}{3}$, $AF = 10$, 求 $\odot O$ 的半径.

【答案】 (1) 见解析 (2) 13

【解析】

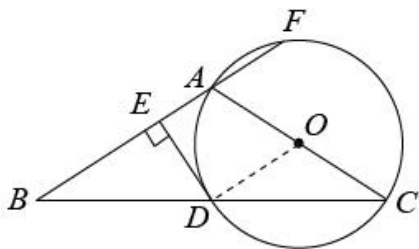
【分析】(1) 连接 OD , 只要证明 $OD \perp DE$ 即可;

(2) 连接 CF , 证 OD 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 得 $CF=2DE$, 再证 DE 是 $\triangle FBC$ 的中位线, 得 $CF=2DE$, 设 $AE=2x$, $DE=3k$, 则 $CF=6k$, $BE=EF=AE+AF=2k+10$, $AC=BA=EF+AE=4k+10$, 然后在 $Rt\triangle ACF$ 中, 由勾股定理, 得 $(4k+10)^2=10^2+(6k)^2$,

解得: $k=4$, 从而求得 $AC=4k+10=4\times 4+10=26$, 即可求得 $\odot O$ 的半径 OA 长, 即可求解.

【小问 1 详解】

证明: 连接 OD ;



$$\therefore OD=OC,$$

$$\therefore \angle C = \angle ODC,$$

$$\therefore AB=AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\therefore \angle B = \angle ODC,$$

$$\therefore OD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle ODE = \angle DEB;$$

$$\therefore DE \perp AB,$$

$$\therefore \angle DEB = 90^\circ,$$

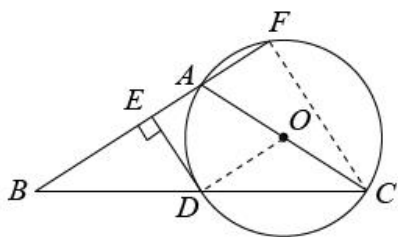
$$\therefore \angle ODE = 90^\circ,$$

即 $DE \perp OD$,

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线.

【小问 2 详解】

解: 连接 CF ,



由 (1) 知 $OD \perp DE$,

$\therefore DE \perp AB$,

$\therefore OD \parallel AB$,

$\therefore OA = OC$,

$\therefore BD = CD$, 即 OD 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore AC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle CFA = 90^\circ$,

$\therefore DE \perp AB$,

$\therefore \angle BED = 90^\circ$,

$\therefore \angle CFA = \angle BED = 90^\circ$,

$\therefore DE \parallel CF$,

$\therefore BE = EF$, 即 DE 是 $\triangle FBC$ 的中位线,

$\therefore CF = 2DE$,

$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{2}{3}$,

$\therefore$ 设 $AE = 2x$, $DE = 3k$, $CF = 6k$,

$\therefore AF = 10$,

$\therefore BE = EF = AE + AF = 2k + 10$,

$\therefore AC = BA = EF + AE = 4k + 10$,

在 $Rt\triangle ACF$ 中, 由勾股定理, 得

$AC^2 = AF^2 + CF^2$, 即 $(4k + 10)^2 = 10^2 + (6k)^2$,

解得: $k = 4$,

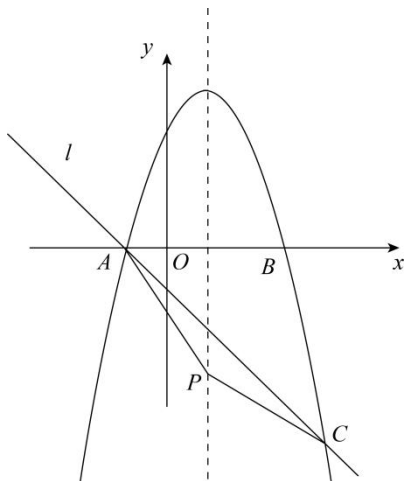
$\therefore AC = 4k + 10 = 4 \times 4 + 10 = 26$,

$\therefore OA = 13$,

即 $\odot O$ 的半径为 13.

【点睛】 本题考查圆周角定理, 切线的判定与性质, 勾股定理, 三角形中位线的判定与性质, 证 OD 是 $\triangle ABC$ 的中位线, DE 是 $\triangle FBC$ 的中位线是解题的关键.

25. 已知抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$ 与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧).



- (1) 求点 A , 点 B 的坐标;
- (2) 如图, 过点 A 的直线 $l: y = -x - 1$ 与抛物线的另一个交点为 C , 点 P 为抛物线对称轴上的一点, 连接 PA, PC , 设点 P 的纵坐标为 m , 当 $PA = PC$ 时, 求 m 的值;
- (3) 将线段 AB 先向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 5 个单位长度, 得到线段 MN , 若抛物线 $y = a(-x^2 + 2x + 3) (a \neq 0)$ 与线段 MN 只有一个交点, 请直接写出 a 的取值范围.

【答案】(1) $A(-1, 0), B(3, 0)$

(2) -3 (3) $a = \frac{5}{4}$ 或 $x \leq -1$ 或 $x \geq \frac{5}{3}$

【解析】

【分析】(1) 令 $y = 0$, 由抛物线解析式可得 $-(x-3)(x+1) = 0$, 解方程即可确定点 A , 点 B 的坐标;

(2) 由抛物线解析式确定其对称轴为 $x = 1$, 可知点 $P(1, m)$, 再将直线 l 与抛物线解析式联立, 解方程组可确定点 C 坐标, 由 $PA = PB$ 列方程求解即可;

(3) 根据题意先确定点 $M(0, 5), N(4, 5)$, 令 $y = a(-x^2 + 2x + 3) = 5$, 整理可得 $x^2 - 2x + (\frac{5}{a} - 3) = 0$, 根据一元二次方程的根的判别式为可知 $\Delta = 16 - \frac{20}{a}$, 然后分情况讨论 $\Delta = 0$ 时以及 $\Delta > 0$ 结合图像分析 a 的取值范围.

【小问 1 详解】

解: 抛物线解析式 $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-3)(x+1)$, 令 $y = 0$,

可得 $-(x-3)(x+1) = 0$,

解得 $x_1 = -1$, $x_2 = 3$,

故点 A 、 B 的坐标分别为 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$;

【小问 2 详解】

对于抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$, 其对称轴为 $x = -\frac{2}{2 \times (-1)} = 1$,

$\therefore$ 点 P 为抛物线对称轴上的一点, 且点 P 的纵坐标为 m ,

$\therefore P(1, m)$,

将直线 l 与抛物线解析式联立, 可得

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = -x - 1 \end{cases}, \text{ 可解得 } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases},$$

故点 C 坐标为 $(4, -5)$,

$$\therefore PA = \sqrt{[1 - (-1)]^2 + m^2} = \sqrt{m^2 + 4},$$

$$PB = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-5 - m)^2} = \sqrt{m^2 + 10m + 34},$$

当 $PA = PB$ 时, 可得 $m^2 + 4 = m^2 + 10m + 34$,

解得 $m = -3$;

【小问 3 详解】

将线段 AB 先向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 5 个单位长度, 得到线段 MN ,

结合 (1), 可知 $M(0, 5)$ 、 $N(4, 5)$,

令 $y = a(-x^2 + 2x + 3) = 5$, 整理可得 $x^2 - 2x + (\frac{5}{a} - 3) = 0$,

其判别式为 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (\frac{5}{a} - 3) = 16 - \frac{20}{a}$,

①当 $\Delta = 16 - \frac{20}{a} = 0$ 时, 解得 $a = \frac{5}{4}$, 此时抛物线 $y = a(-x^2 + 2x + 3)$ ($a \neq 0$) 与线段 MN 只有一个交点;

②当 $\Delta = 16 - \frac{20}{a} > 0$ 即时, 解方程 $x^2 - 2x + (\frac{5}{a} - 3) = 0$,

$$\text{可得 } x = \frac{2 \pm \sqrt{16 - \frac{20}{a}}}{2 \times 1} = 1 \pm \sqrt{4 - \frac{5}{a}},$$

$$\text{即 } x_1 = 1 - \sqrt{4 - \frac{5}{a}}, \quad x_2 = 1 + \sqrt{4 - \frac{5}{a}},$$

若 $a > 0$ 时, 如图 1,

由 $\Delta = 16 - \frac{20}{a} > 0$ ，可解得 $a > \frac{5}{4}$ ，

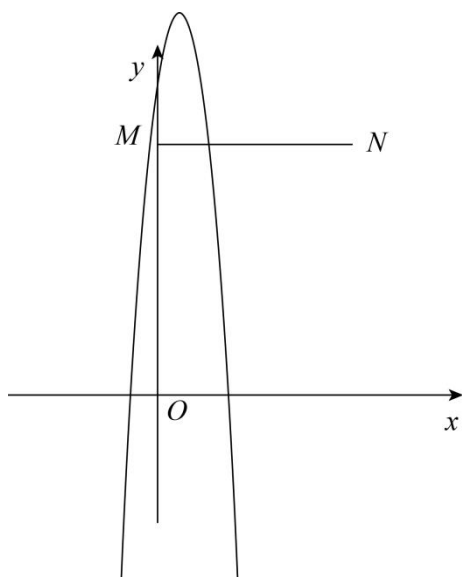


图 1

此时有 $1 + \sqrt{4 - \frac{5}{a}} \leq 4$ ，且 $1 - \sqrt{4 - \frac{5}{a}} \leq 0$ ，

解得 $x \geq \frac{5}{3}$ ；

②当 $a < 0$ 时，如图 2，

由 $\Delta = 16 - \frac{20}{a} > 0$ ，可解得 $a < 0$ ，

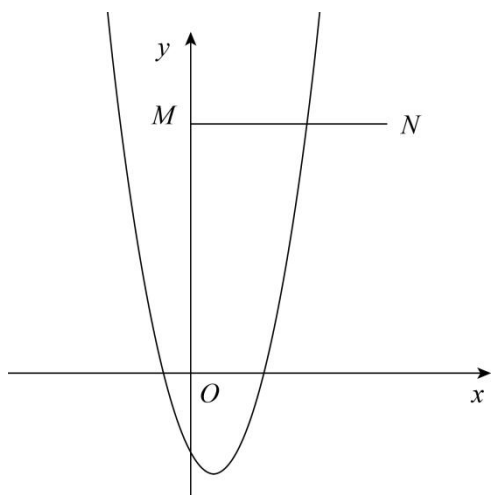


图 2

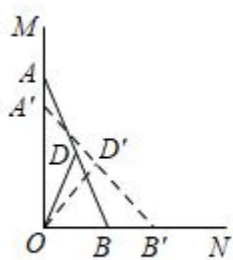
此时有 $1 + \sqrt{4 - \frac{5}{a}} \leq 4$ ，且 $1 - \sqrt{4 - \frac{5}{a}} \leq 0$ ，

解得 $x \leq -1$ ；

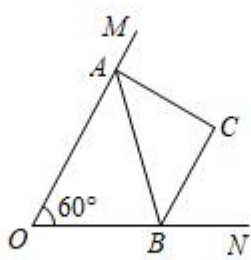
综上所述，当抛物线 $y = a(-x^2 + 2x + 3)$ ($a \neq 0$) 与线段 MN 只有一个交点时， a 的取值范围为 $a = \frac{5}{4}$ 或 $x \leq -1$ 或 $x \geq \frac{5}{3}$ 。

【点睛】本题主要考查了二次函数的综合应用，包括求二次函数与 x 轴的交点、利用二次函数解决图形问题等知识，解题关键是熟练运用数形结合和分类讨论的思想分析问题。

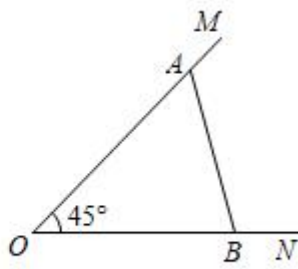
26. 已知 $\angle MON = \alpha$ ，点 A, B 分别在射线 OM, ON 上运动， $AB = 6$ 。



图①



图②



图③

(1) 如图①，若 $\alpha = 90^\circ$ ，取 AB 中点 D ，点 A, B 运动时，点 D 也随之运动，点 A, B, D 的对应点分别为 A', B', D' ，连接 OD, OD' 。判断 OD 与 OD' 有什么数量关系？证明你的结论：

(2) 如图②，若 $\alpha = 60^\circ$ ，以 AB 为斜边在其右侧作等腰直角三角形 ABC ，求点 O 与点 C 的最大距离：

(3) 如图③，若 $\alpha = 45^\circ$ ，当点 A, B 运动到什么位置时， $\triangle AOB$ 的面积最大？请说明理由，并求出 $\triangle AOB$ 面积的最大值。

【答案】(1) $OD = OD'$ ，证明见解析

(2) $3\sqrt{3} + 3$

(3) 当 $OA = OB$ 时， $\triangle AOB$ 的面积最大；理由见解析， $\triangle AOB$ 面积的最大值为 $9\sqrt{2} + 9$

【解析】

【分析】(1) 根据直角三角形斜边的中线等于斜边的一半进行证明即可；

(2) 取 AB 中点 T ，连接 OT, CT, OC ，由等腰直角三角形的性质可得

$CT \perp AB, \angle ACT = \angle BCT = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ, AC = BC, CT = AT = BT = \frac{1}{2} AB = 3$ ，继而可得当 O, T, C 在同一直线上时， CO 最大，再证明 $\triangle ACO \cong \triangle BCO (SAS)$ ，再由勾股定理求出 OT 的长，即可求解；

(3) 以 AB 为斜边在其右侧作等腰直角三角形 ABC ，连接 OC 交 AB 于点 T ，在 OT 上取点 E ，使 $OE = BE$ ，

连接 BE ，由 (2) 可知，当 $OC \perp AB$ 时， OC 最大，当 $OA = OB$ 时，此时 OT 最大，即 $\triangle AOB$ 的面积最大，由勾股定理等进行求解即可。

【小问 1 详解】

$OD = OD'$ ，证明如下：

$\because \angle AOB = \alpha = 90^\circ$ ， AB 中点为 D ，

$$\therefore OD = \frac{1}{2} AB,$$

$\because D'$ 为 $A'B'$ 的中点， $\angle A'OB' = \alpha = 90^\circ$ ，

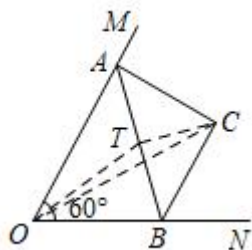
$$\therefore OD' = \frac{1}{2} A'B',$$

$\because AB = A'B'$ ，

$$\therefore OD = OD';$$

【小问 2 详解】

如图，取 AB 中点 T ，连接 OT 、 CT 、 OC ，



$\because$ 以 AB 为斜边在其右侧作等腰直角三角形 ABC ，

$$\therefore CT \perp AB, \angle ACT = \angle BCT = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ, AC = BC, CT = AT = BT = \frac{1}{2} AB = 3,$$

$\because OT + CT \geq OC$ (当且仅当点 T 在线段 OC 上时，等号成立)，

$\therefore$ 当 O 、 T 、 C 在同一直线上时， CO 最大，

在 $\triangle ACO$ 和 $\triangle BCO$ 中，

$$\therefore \begin{cases} AC = BC \\ \angle ACO = \angle BCO, \\ CO = CO \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACO \cong \triangle BCO (SAS),$$

$$\therefore \angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ,$$

$\because CT \perp AB$ ，即 $OT \perp AB$ ，

$$\therefore OB = 2BT = 2 \times 3 = 6,$$

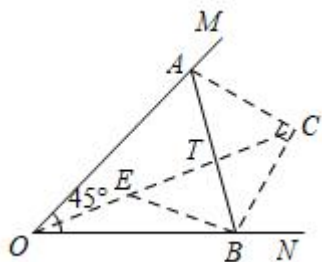
$$\therefore OT = \sqrt{OB^2 - BT^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore OC = OT + CT = 3\sqrt{3} + 3;$$

【小问3 详解】

如图，当点 A, B 运动到 $OA = OB$ 时， $\triangle AOB$ 的面积最大，证明如下：

以 AB 为斜边在其右侧作等腰直角三角形 ABC ，连接 OC 交 AB 于点 T ，在 OT 上取点 E ，使 $OE = BE$ ，连接 BE ，



由 (2) 可知，当 $OC \perp AB$ 时， OC 最大， $BT = 3$ ，

$$\therefore \text{当 } OA = OB \text{ 时，} \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 45^\circ = 22.5^\circ,$$

此时 OT 最大，

$\therefore \triangle AOB$ 的面积最大，

$\because OE = BE$ ，

$$\therefore \angle OBE = \angle BOC = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle BET = \angle OBE + \angle BOC = 45^\circ$$

$\because OT \perp AB$

$$\therefore \angle EBT = 90^\circ - \angle BET = 45^\circ$$

$$\therefore \angle EBT = \angle BET = 45^\circ$$

$$\therefore ET = BT = 3, \quad OE = BE = \sqrt{ET^2 + BT^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore OT = OE + ET = 3\sqrt{2} + 3$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OT = \frac{1}{2} \times 6 \times (3\sqrt{2} + 3) = 9\sqrt{2} + 9$$

综上，当点 A, B 运动到 $OA = OB$ 时， $\triangle AOB$ 的面积最大， $\triangle AOB$ 面积的最大值为 $9\sqrt{2} + 9$ 。

【点睛】 本题考查了直角三角形的性质，等腰直角三角形的性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理等，熟练掌握知识点是解题的关键。

淘宝：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022