

## 2022 年山东省济宁市中考数学真题

### 一、选择题

1. 用四舍五入法取近似值，将数 0.0158 精确到 0.001 的结果是 ( )

- A. 0.015                      B. 0.016                      C. 0.01                      D. 0.02

【答案】 B

【解析】

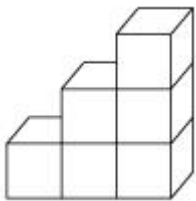
【分析】 利用四舍五入的方法，从万分位开始四舍五入取近似值即可.

【详解】 解：  $0.0158 \approx 0.016$ .

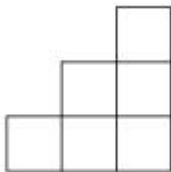
故选： B.

【点睛】 本题主要考查了近似数和有效数字，正确利用四舍五入法取近似值是解题的关键.

2. 如图是由 6 个完全相同的小正方体搭建而成的几何体，则这个几何体的主视图是 ( )



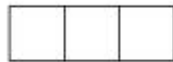
A.



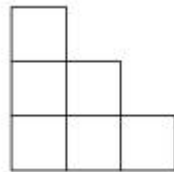
B.



C.



D.



【答案】 A

【解析】

【分析】 找到从正面看所得的图形即可.

【详解】 解： 从正面看，底层有 3 个正方形，第二层有 2 个正方形，第三层有 1 个正方形，

故选： A.

【点睛】 本题考查简单组合体三视图的识别，主视图是指从物体的正面看物体所得到的图形.

3. 下列各式运算正确的是 ( )

A.  $-3(x-y) = -3x+y$

B.  $x^3 \cdot x^2 = x^6$

C.  $(\pi-3.14)^0 = 1$

D.  $(x^3)^2 = x^5$

【答案】 C

【解析】

【分析】利用去括号的法则，幂的运算法则和零指数幂的意义对每个选项进行判断即可.

【详解】A:  $-3(x-y) = -3x+3y$ ，故选项 A 不正确；

B:  $x^3 \times x^2 = x^5$ ，故选项 B 不正确；

C:  $(\pi-3.14)^0 = 1$ ，故选项 C 正确；

D:  $(x^3)^2 = x^6$ ，故选项 D 不正确；

故选: C.

【点睛】本题考查了去括号法则，幂的运算法则和零指数幂的意义，正确利用上述法则对每个选项做出判断是解题的关键.

4. 下面各式从左到右的变形，属于因式分解的是 ( )

A.  $x^2 - x - 1 = x(x-1) - 1$

B.  $x^2 - 1 = (x-1)^2$

C.  $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

D.  $x(x-1) = x^2 - x$

【答案】C

【解析】

【分析】根据因式分解的定义对选项逐一分析即可.

【详解】把一个多项式化成几个整式积的形式，这种变形叫做因式分解.

A、右边不是整式积的形式，故不是因式分解，不符合题意；

B、形式上符合因式分解，但等号左右不是恒等变形，等号不成立，不符合题意；

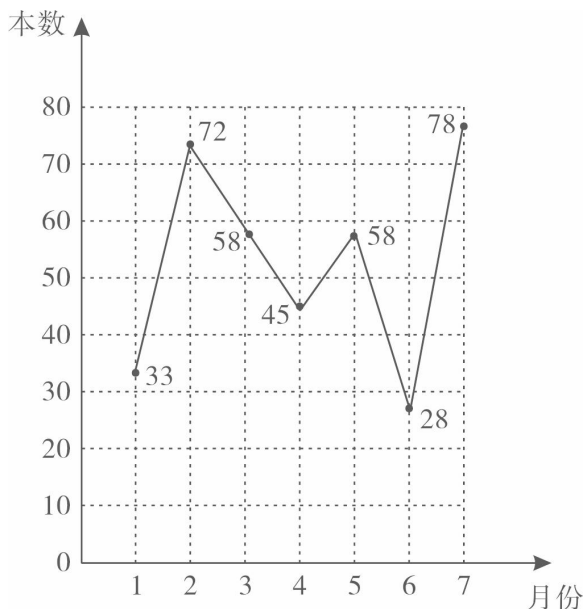
C、符合因式分解的形式，符合题意；

D、从左到右是整式的乘法，从右到左是因式分解，不符合题意；

故选 C.

【点睛】本题考查因式分解，解决本题的关键是充分理解并应用因式分解的定义.

5. 某班级开展“共建书香校园”读书活动. 统计了 1 至 7 月份该班同学每月阅读课外书的本数，并绘制出如图所示的折线统计图. 则下列说法正确的是 ( )



- A. 从2月到6月，阅读课外书的本数逐月下降
- B. 从1月到7月，每月阅读课外书本数的最大值比最小值多45
- C. 每月阅读课外书本数的众数是45
- D. 每月阅读课外书本数的中位数是58

【答案】D

【解析】

【分析】根据折线统计图的变化趋势即可判断A，根据折线统计图中的数据以及众数的定义，中位数的定义即可判断B，C，D选项.

【详解】A.从2月到6月，阅读课外书的本数有增有降，故该选项不正确，不符合题意；

B.从1月到7月，每月阅读课外书本数的最大值为78比最小值28多50，故该选项不正确，不符合题意；

C. 每月阅读课外书本数的众数是58，故该选项不正确，不符合题意；

D.这组数据为：28，33，45，58，58，72，78，则每月阅读课外书本数的中位数是58，故该选项正确，符合题意；

故选D

【点睛】本题考查了折线统计图，求极差，求中位数，从统计图获取信息是解题的关键.

6. 一辆汽车开往距出发地420km的目的地，若这辆汽车比原计划每小时多行10km，则提前1小时到达目的地. 设这辆汽车原计划的速度是x km/h，根据题意所列方程是（ ）

A.  $\frac{420}{x} = \frac{420}{x-10} + 1$

B.  $\frac{420}{x} + 1 = \frac{420}{x+10}$

C.  $\frac{420}{x} = \frac{420}{x+10} + 1$

D.  $\frac{420}{x} + 1 = \frac{420}{x-10}$

【答案】C

【解析】

【分析】设这辆汽车原计划的速度是  $x$  km/h, 则实际速度为  $(x+10)$  km/h, 根据题意“提前 1 小时到达目的地”, 列分式方程即可求解.

【详解】解: 设这辆汽车原计划的速度是  $x$  km/h, 则实际速度为  $(x+10)$  km/h,

根据题意所列方程是  $\frac{420}{x} = \frac{420}{x+10} + 1$

故选 C

【点睛】本题考查了列分式方程, 理解题意列出方程是解题的关键.

7. 已知圆锥的母线长 8cm, 底面圆的直径 6cm, 则这个圆锥的侧面积是 ( )

A.  $96\pi\text{cm}^2$

B.  $48\pi\text{cm}^2$

C.  $33\pi\text{cm}^2$

D.  $24\pi\text{cm}^2$

【答案】D

【解析】

【分析】根据圆锥的侧面积  $= \frac{1}{2} \times \text{底面周长} \times \text{母线长}$  计算即可求解.

【详解】解: 底面直径为 6cm, 则底面周长  $= 6\pi$ ,

侧面面积  $= \frac{1}{2} \times 6\pi \times 8 = 24\pi\text{cm}^2$ .

故选 D.

【点睛】本题考查圆锥的计算, 解题的关键是熟练掌握圆锥的侧面积  $= \frac{1}{2} \times \text{底面周长} \times \text{母线长}$ .

8. 若关于  $x$  的不等式组  $\begin{cases} x-a>0, \\ 7-2x>5 \end{cases}$  仅有 3 个整数解, 则  $a$  的取值范围是 ( )

A.  $-4 \leq a < -2$

B.  $-3 < a \leq -2$

C.  $-3 \leq a \leq -2$

D.  $-3 \leq a < -2$

【答案】D

【解析】

【分析】先求出每个不等式的解集, 再求出不等式组的解集, 即可解答.

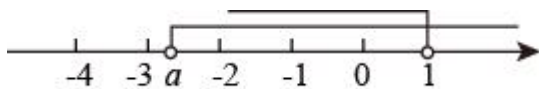
【详解】解:  $\begin{cases} x-a>0 \text{ ①} \\ 7-2x>5 \text{ ②} \end{cases}$

由①得,  $x > a$

由②得,  $x < 1$

因不等式组有 3 个整数解

$\therefore a < x < 1$

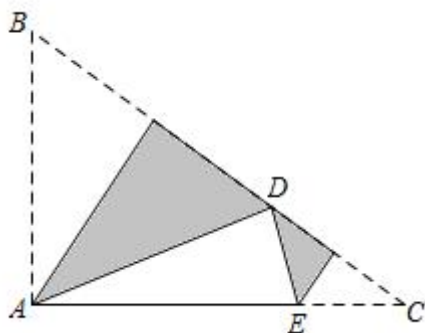


$$\therefore -3 \leq a < -2$$

故选: D.

【点睛】本题考查解一元一次不等式组、一元一次不等式组的整数解, 掌握相关知识是解题关键.

9. 如图, 三角形纸片  $ABC$  中,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AB = 2$ ,  $AC = 3$ . 沿过点  $A$  的直线将纸片折叠, 使点  $B$  落在边  $BC$  上的点  $D$  处; 再折叠纸片, 使点  $C$  与点  $D$  重合, 若折痕与  $AC$  的交点为  $E$ , 则  $AE$  的长是 ( )



A.  $\frac{13}{6}$

B.  $\frac{5}{6}$

C.  $\frac{7}{6}$

D.  $\frac{6}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意可得  $AD = AB = 2$ ,  $\angle B = \angle ADB$ ,  $CE = DE$ ,  $\angle C = \angle CDE$ , 可得  $\angle ADE = 90^\circ$ , 继而设  $AE = x$ , 则  $CE = DE = 3 - x$ , 根据勾股定理即可求解.

【详解】解:  $\because$  沿过点  $A$  的直线将纸片折叠, 使点  $B$  落在边  $BC$  上的点  $D$  处,

$$\therefore AD = AB = 2, \quad \angle B = \angle ADB,$$

$\because$  折叠纸片, 使点  $C$  与点  $D$  重合,

$$\therefore CE = DE, \quad \angle C = \angle CDE,$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB + \angle CDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore AD^2 + DE^2 = AE^2,$$

设  $AE = x$ , 则  $CE = DE = 3 - x$ ,

$$\therefore 2^2 + (3 - x)^2 = x^2,$$

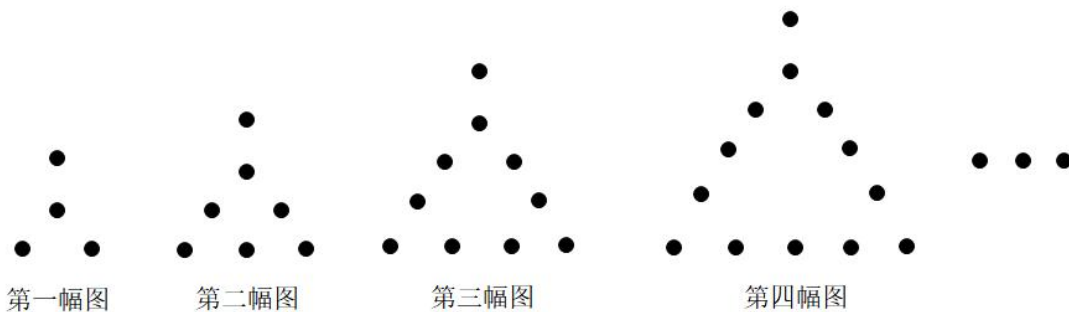
$$\text{解得 } x = \frac{13}{6}$$

$$\text{即 } AE = \frac{13}{6}$$

故选 A

【点睛】 本题考查了折叠的性质，勾股定理，掌握折叠的性质以及勾股定理是解题的关键.

10. 如图，用相同的圆点按照一定的规律拼出图形. 第一幅图 4 个圆点，第二幅图 7 个圆点，第三幅图 10 个圆点，第四幅图 13 个圆点……按照此规律，第一百幅图中圆点的个数是 ( )



A. 297

B. 301

C. 303

D. 400

【答案】 B

【解析】

【分析】 首先根据前几个图形圆点的个数规律即可发现规律，从而得到第 100 个图摆放圆点的个数.

【详解】 解：观察图形可知：第 1 幅图案需要 4 个圆点，即  $4 + 3 \times 0$ ,

第 2 幅图 7 个圆点，即  $4 + 3 = 4 + 3 \times 1$ ;

第 3 幅图 10 个圆点，即  $4 + 3 + 3 = 4 + 3 \times 2$ ;

第 4 幅图 13 个圆点，即  $4 + 3 + 3 + 3 = 4 + 3 \times 3$ ;

第  $n$  幅图中，圆点的个数为：  $4 + 3(n-1) = 3n + 1$ ,

……,

第 100 幅图，圆中点的个数为：  $3 \times 100 + 1 = 301$ .

故选： B.

【点睛】 本题主要考查了图形的变化规律，解答的关键是由所给的图形总结出存在的规律.

## 二、填空题

11. 若二次根式  $\sqrt{x-3}$  有意义，则  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】  $x \geq 3$

【解析】

【分析】 根据二次根式的被开方数是非负数列出不等式，解不等式即可.

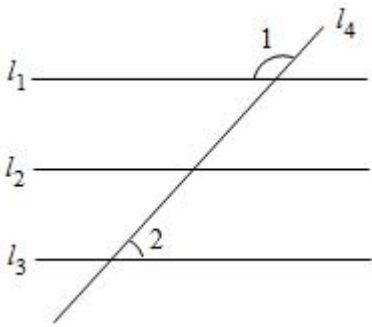
【详解】根据题意, 得  $x-3 \geq 0$ ,

解得:  $x \geq 3$ ;

故答案为:  $x \geq 3$ .

【点睛】本题考查的是二次根式有意义的条件, 掌握二次根式的被开方数是非负数是解题的关键.

12. 如图, 直线  $l_1, l_2, l_3$  被直线  $l_4$  所截, 若  $l_1 \parallel l_2, l_2 \parallel l_3$ ,  $\angle 1 = 126^\circ 32'$ , 则  $\angle 2$  的度数是\_\_\_\_\_.

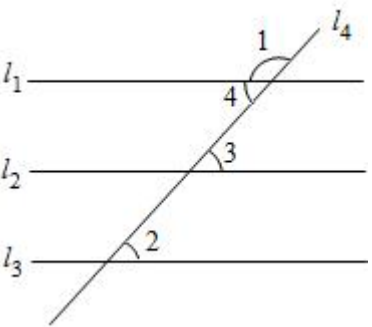


【答案】  $53^\circ 28'$

【解析】

【分析】根据平行线的性质得  $\angle 2 = \angle 3, \angle 3 = \angle 4$ , 根据等量等量代换得  $\angle 3 = \angle 4$ , 进而根据邻补角性质即可求解.

【详解】解: 如图



$\because l_1 \parallel l_2, l_2 \parallel l_3,$

$\therefore \angle 2 = \angle 3, \angle 3 = \angle 4,$

$\therefore \angle 2 = \angle 4,$

$\because \angle 1 = 126^\circ 32',$

$\therefore \angle 2 = \angle 4 = 180^\circ - 126^\circ 32' = 179^\circ 60' - 126^\circ 32' = 53^\circ 28',$

故答案为:  $53^\circ 28'$ .

【点睛】本题考查了邻补角, 平行线的性质, 掌握平行线的性质是解题的关键.

13. 已知直线  $y_1 = x - 1$  与  $y_2 = kx + b$  相交于点  $(2, 1)$ . 请写出  $b$  值\_\_\_\_\_ (写出一个即可), 使  $x > 2$  时,  $y_1$

$> y_2$ .

【答案】2 (答案不唯一)

【解析】

【分析】根据题意将点  $(2, 1)$  代入  $y_2 = kx + b$  可得  $2k + b = 1$ , 即  $k = \frac{1-b}{2}$ , 根据  $x > 2$  时,  $y_1 > y_2$ , 可得  $k < 1$ , 即可求得  $b$  的范围, 即可求解.

【详解】解:  $\because$  直线  $y_1 = x - 1$  与  $y_2 = kx + b$  相交于点  $(2, 1)$ ,

$\therefore$  点  $(2, 1)$  代入  $y_2 = kx + b$ ,

得  $2k + b = 1$ ,

解得  $k = \frac{1-b}{2}$ ,

$\because$  直线  $y_1 = x - 1$ ,  $y$  随  $x$  的增大而增大,

又  $x > 2$  时,  $y_1 > y_2$ ,

$\therefore k < 1$ ,

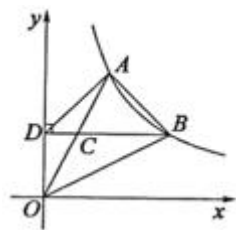
$\therefore 1 - b < 2$ ,

解得  $b > -1$ ,

故答案为: 2 (答案不唯一)

【点睛】本题考查了两直线交点问题, 掌握一次函数的性质是解题的关键.

14. 如图,  $A$  是双曲线  $y = \frac{8}{x} (x > 0)$  上的一点, 点  $C$  是  $OA$  的中点, 过点  $C$  作  $y$  轴的垂线, 垂足为  $D$ , 交双曲线于点  $B$ , 则  $\triangle ABD$  的面积是\_\_\_\_\_.



【答案】4

【解析】

【分析】根据点  $C$  是  $OA$  的中点, 根据三角形中线的可得  $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle OCD}$ ,  $S_{\triangle ACB} = S_{\triangle OCB}$ , 进而可得  $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle OBD}$ , 根据点  $B$  在双曲线  $y = \frac{8}{x} (x > 0)$  上,  $BD \perp y$  轴, 可得  $S_{\triangle OBD} = 4$ , 进而即可求解.

【详解】 $\because$  点  $C$  是  $OA$  的中点,

$\therefore S_{\triangle ACD} = S_{\triangle OCD}$ ,  $S_{\triangle ACB} = S_{\triangle OCB}$ ,

$\therefore S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ACB} = S_{\triangle OCD} + S_{\triangle OCB}$ ,

$$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle OBD},$$

$\because$  点  $B$  在双曲线  $y = \frac{8}{x} (x > 0)$  上,  $BD \perp y$  轴,

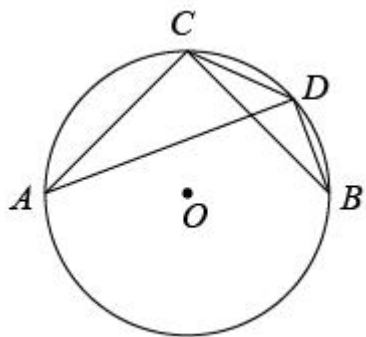
$$\therefore S_{\triangle OBD} = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = 4,$$

答案为: 4.

【点睛】本题考查了三角形中线的性质, 反比例函数的  $k$  的几何意义, 掌握反比例函数  $k$  的几何意义是解题的关键.

15. 如图, 点  $A, C, D, B$  在  $\odot O$  上,  $AC = BC$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ . 若  $CD = a$ ,  $\tan \angle CBD = \frac{1}{3}$ , 则  $AD$  的长是 \_\_\_\_\_.

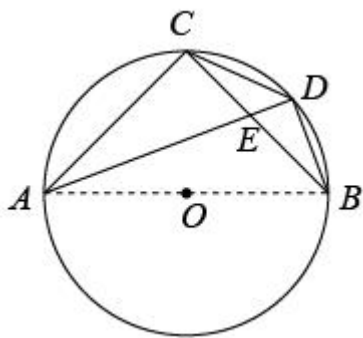


【答案】  $2\sqrt{2}a$

【解析】

【分析】如图, 连接  $AB$ , 设  $AD, BC$  交于点  $E$ , 根据题意可得  $AB$  是  $\odot O$  的直径,  $\angle ADB = 90^\circ$ , 设  $AC = m$ , 证明  $\triangle CED \sim \triangle AEB$ , 根据相似三角形的性质以及正切的定义, 分别表示出  $AE, ED$ , 根据  $\text{Rt}\triangle ABC$ , 勾股定理求得  $m = \sqrt{5}a$ , 根据  $AD = AE + ED$  即可求解.

【详解】解: 如图, 连接  $AB$ , 设  $AD, BC$  交于点  $E$ ,



$$\because \angle ACB = 90^\circ$$

$\therefore AB$  是  $\odot O$  的直径,

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\because \tan \angle CBD = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{DE}{DB} = \frac{1}{3},$$

$$\text{在 Rt}\triangle DEB \text{ 中, } BE = \sqrt{DE^2 + DB^2} = \sqrt{10}DE,$$

$$\because \widehat{CD} = \widehat{CD},$$

$$\therefore \angle CBD = \angle ACD,$$

$$\therefore \tan \angle CAD = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{CE}{AC} = \frac{1}{3}$$

设  $AC = m$

$$\text{则 } CE = \frac{1}{3}m,$$

$$\because AC = BC,$$

$$\therefore EB = \frac{2}{3}m,$$

$$\therefore DE = \frac{\sqrt{10}}{10}BE = \frac{2\sqrt{10}}{30}m,$$

$$\text{Rt}\triangle ACE \text{ 中, } AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{m^2 + \left(\frac{1}{3}m\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}m,$$

$$\therefore AD = AE + ED = \frac{2\sqrt{10}}{30}m + \frac{\sqrt{10}}{3}m = \frac{2}{5}\sqrt{10}m,$$

$$\because \widehat{DB} = \widehat{DB},$$

$$\therefore \angle ECD = \angle EAB,$$

$$\text{又 } \angle CED = \angle AEB,$$

$$\therefore \triangle CED \sim \triangle AEB,$$

$$\therefore \frac{CD}{AB} = \frac{CE}{AE} = \frac{\frac{1}{3}m}{\frac{\sqrt{10}m}{3}} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\therefore CD = a,$$

$$\therefore AB = \sqrt{10}a,$$

$$\therefore AC = BC = m,$$

$$\therefore AB = \sqrt{2}m,$$

$$\therefore \sqrt{2}m = \sqrt{10}a,$$

$$\text{解得 } m = \sqrt{5}a,$$

$$\therefore AD = \frac{2}{5}\sqrt{10}m = \frac{2}{5}\sqrt{10} \times \sqrt{5}a = 2\sqrt{2}a,$$

故答案为:  $2\sqrt{2}a$ .

【点睛】本题考查了  $90^\circ$  圆周角所对的弦是直径，同弧所对的圆周角相等，正切的定义，相似三角形的性质与判定，勾股定理，掌握以上知识是解题的关键.

### 三、解答题

16. 已知  $a = 2 + \sqrt{5}$ ,  $b = 2 - \sqrt{5}$ , 求代数式  $a^2b + ab^2$  的值.

【答案】  $-4$

【解析】

【分析】先将代数式因式分解，再代入求值.

【详解】  $a^2b + ab^2 = ab(a + b)$

$$= (2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5})$$

$$= -1 \times 4 = -4.$$

故代数式的值为  $-4$ .

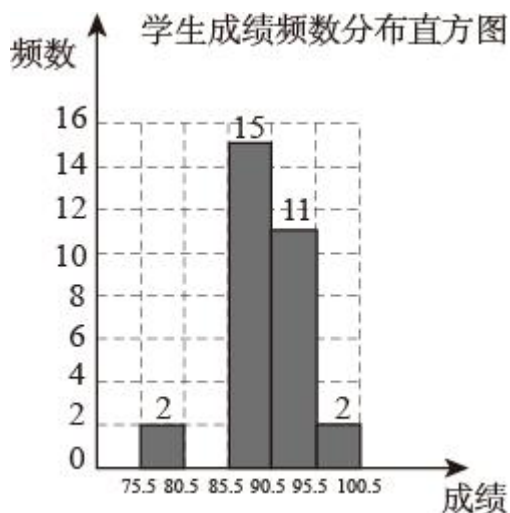
【点睛】本题考查因式分解、二次根式的混合运算，解决本题的关键是熟练进行二次根式的计算.

17. 6月5日是世界环境日. 某校举行了环保知识竞赛, 从全校学生中随机抽取了  $n$  名学生的成绩进行分析, 并依据分析结果绘制了不完整的统计表和统计图 (如下图所示).

学生成绩分布统计表

| 成绩/分                 | 组中值 | 频率   |
|----------------------|-----|------|
| $75.5 \leq x < 80.5$ | 78  | 0.05 |
| $80.5 \leq x < 85.5$ | 83  | $a$  |

|                       |    |       |
|-----------------------|----|-------|
| $85.5 \leq x < 90.5$  | 88 | 0.375 |
| $90.5 \leq x < 95.5$  | 93 | 0.275 |
| $95.5 \leq x < 100.5$ | 98 | 0.05  |



请根据以上图表信息，解答下列问题：

- (1) 填空：  $n = \underline{\hspace{2cm}}$ ，  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (2) 请补全频数分布直方图；
- (3) 求这  $n$  名学生成绩的平均分；
- (4) 从成绩在  $75.5 \leq x < 80.5$  和  $95.5 \leq x < 100.5$  的学生中任选两名学生．请用列表法或画树状图的方法，求选取的学生成绩在  $75.5 \leq x < 80.5$  和  $95.5 \leq x < 100.5$  中各一名的概率．

**【答案】** (1) 40, 0.25

(2) 见解析 (3) 88.125 分

(4) 图表见解析,  $\frac{2}{3}$

**【解析】**

**【分析】** (1) 根据“频率=频数÷总数”和频率之和为 1 可得答案；

(2) 用总人数减去其他组的人数即为 80.5 到 85.5 组人数，即可补全频数分布直方图；

(3) 利用平均数的计算公式计算即可；

(4) 列出树状图即可求出概率

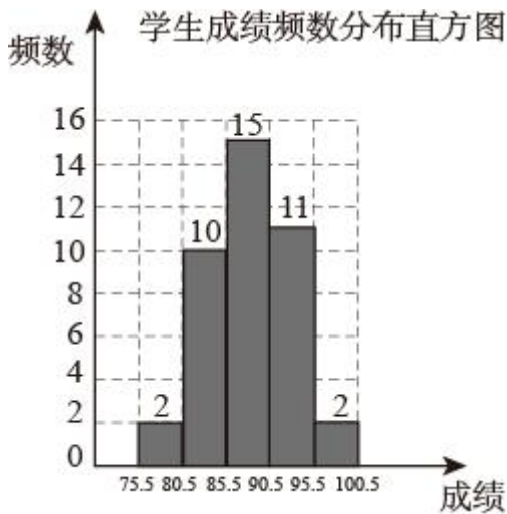
**【小问 1 详解】**

解：由图表可知：  $n = 2 \div 0.05 = 40$ ，  $a = \frac{40 - 2 - 15 - 11 - 2}{40} = \frac{10}{40} = 0.25$

## 【小问 2 详解】

解：由 (1) 可知，80.5 到 85.5 组人数为  $40 - 2 - 15 - 11 - 2 = 10$  (人)，

频数分布图为：

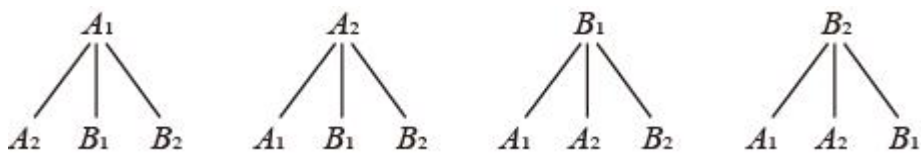


## 【小问 3 详解】

解：  $\frac{1}{40}(2 \times 78 + 10 \times 83 + 15 \times 88 + 11 \times 93 + 2 \times 98) = 88.125$  (分)

## 【小问 4 详解】

解：解：用  $A_1, A_2$  表示  $75.5 \leq x < 80.5$  中的两名学生，用  $B_1, B_2$  表示  $95.5 \leq x < 100.5$  中的两名学生，画树状图，得

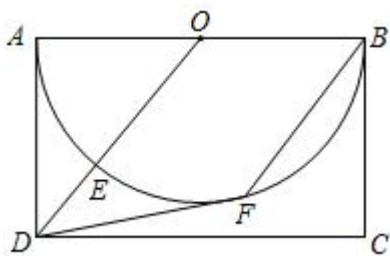


由上图可知，所有结果可能性共 12 种，而每一种结果的可能性是一样的，其中每一组各有一名被选到有 8 种。

$\therefore$  每一组各有一名被选到的概率为  $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ 。

【点睛】 本题主要考查读频数分布直方图，求平均数，利用树状图求概率，掌握相关的概念以及方法是解题的关键。

18. 如图，在矩形  $ABCD$  中，以  $AB$  的中点  $O$  为圆心，以  $OA$  为半径作半圆，连接  $OD$  交半圆于点  $E$ ，在  $\widehat{BE}$  上取点  $F$ ，使  $\widehat{BE} = \widehat{AF}$ ，连接  $BF, DF$ 。



- (1) 求证:  $DF$  与半圆相切;  
 (2) 如果  $AB = 10$ ,  $BF = 6$ , 求矩形  $ABCD$  的面积.

【答案】(1) 见解析 (2)  $\frac{200}{3}$

【解析】

【分析】(1) 连接  $OF$ , 证明  $\triangle DAO \cong \triangle DFO$  (SAS), 可得  $\angle DAO = \angle DFO$ , 根据矩形的性质可得  $\angle DAO = 90^\circ$ , 进而即可得证;

(2) 连接  $AF$ , 根据题意证明  $\triangle AOD \sim \triangle FBA$ , 根据相似三角形的性质求得  $DO$ , 进而勾股定理  $AD$ , 根据矩形的面积公式即可求解.

【小问 1 详解】

证明: 连接  $OF$ .

$$\because \widehat{AE} = \widehat{EF},$$

$$\therefore \angle DOA = \angle FOD.$$

$$\because AO = FO, DO = DO,$$

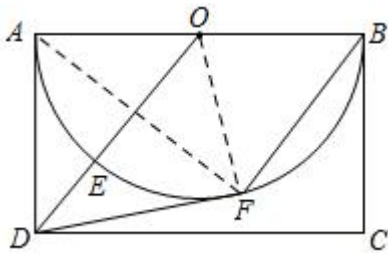
$$\therefore \triangle DAO \cong \triangle DFO (\text{SAS})$$

$$\therefore \angle DAO = \angle DFO.$$

$\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,

$$\therefore \angle DAO = 90^\circ$$

$$\therefore \angle DFO = 90^\circ \therefore DF \text{ 与半圆相切.}$$



【小问 2 详解】

解: 连接  $AF$ ,

$$\because AO = FO, \angle DOA = \angle DOF,$$

$$\therefore DO \perp AF,$$

$\because AB$  为半圆的直径,

$$\therefore \angle AFB = 90^\circ,$$

$$\therefore BF \perp AF,$$

$$\therefore DO \parallel BF. \therefore \angle AOD = \angle ABF.$$

$$\because \angle OAD = \angle AFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOD \sim \triangle FBA$$

$$\therefore \frac{AO}{BF} = \frac{DO}{AB},$$

$$\therefore \frac{5}{6} = \frac{DO}{10},$$

$$\therefore DO = \frac{25}{3},$$

$$\text{在 } Rt\triangle AOD \text{ 中, } AD = \sqrt{DO^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)^2 - 5^2} = \frac{20}{3}.$$

$$\therefore \text{矩形 } ABCD \text{ 的面积为 } \frac{20}{3} \times 10 = \frac{200}{3}.$$

【点睛】本题考查了切线的性质，相似三角形的性质与判定，勾股定理，矩形的性质，掌握以上知识是解题的关键.

19. 某运输公司安排甲、乙两种货车 24 辆恰好一次性将 328 吨的物资运往  $A$ ,  $B$  两地，两种货车载重量及到  $A$ ,  $B$  两地的运输成本如下表:

| 货车类型 | 载重量 (吨/辆) | 运往 $A$ 地的成本 (元/辆) | 运往 $B$ 地的成本 (元/辆) |
|------|-----------|-------------------|-------------------|
| 甲种   | 16        | 1200              | 900               |
| 乙种   | 12        | 1000              | 750               |

(1) 求甲、乙两种货车各用了多少辆;

(2) 如果前往  $A$  地的甲、乙两种货车共 12 辆，所运物资不少于 160 吨，其余货车将剩余物资运往  $B$  地. 设甲、乙两种货车到  $A$ ,  $B$  两地的总运输成本为  $w$  元，前往  $A$  地的甲种货车为  $t$  辆.

①写出  $w$  与  $t$  之间的函数解析式;

②当  $t$  为何值时， $w$  最小? 最小值是多少?

【答案】(1) 甲种货车用 10 辆，则乙种货车用 14 辆

(2) ①  $w = 50t + 22500$ ; ②  $t = 4$  时,  $w_{\text{最小}} = 22\ 700$  元

【解析】

【分析】(1) 设甲种货车用  $x$  辆, 则乙种货车用  $(24 - x)$  辆. 根据题意列一元一次方程即可求解;

(2) ①根据表格信息列出  $w$  与  $t$  之间的函数解析式;

②根据所运物资不少于 160 吨列出不等式, 求得  $t$  的范围, 然后根据一次函数的性质求得最小值即可.

【小问 1 详解】

(1) 设甲种货车用  $x$  辆, 则乙种货车用  $(24 - x)$  辆. 根据题意, 得

$$16x + 12(24 - x) = 328.$$

解得  $x = 10$ .

$$\therefore 24 - x = 24 - 10 = 14.$$

答: 甲种货车用 10 辆, 则乙种货车用 14 辆.

【小问 2 详解】

$$\textcircled{1} w = 1200t + 1000(12 - t) + 900(10 - t) + 750[14 - (12 - t)] = 50t + 22500.$$

$$\textcircled{2} \because 16t + 12(12 - t) \geq 160$$

$$\therefore t \geq 4$$

$$\because 50 > 0,$$

$\therefore w$  随  $t$  的减小而减小.

$$\therefore \text{当 } t = 4 \text{ 时, } w_{\text{最小}} = 50 \times 4 + 22\ 500 = 22\ 700 \text{ (元)}.$$

【点睛】本题考查了一元一次方程的应用, 一元一次不等式的应用, 一次函数的应用, 根据题意列出方程, 不等式与一次函数关系式是解题的关键.

20. 知识再现: 如图 1, 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$  的对边分别为  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

$$\because \sin A = \frac{a}{c}, \quad \sin B = \frac{b}{c}$$

$$\therefore c = \frac{a}{\sin A}, \quad c = \frac{b}{\sin B}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

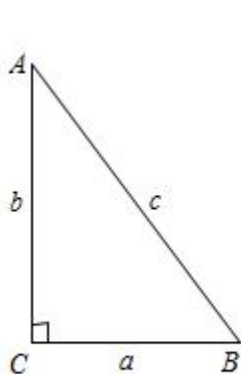


图1

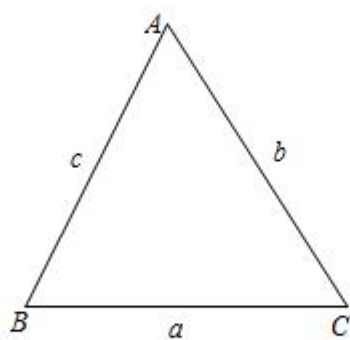


图2

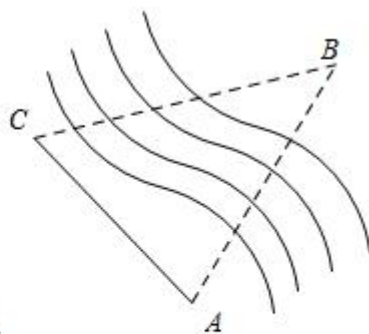


图3

(1) 拓展探究: 如图 2, 在锐角  $ABC$  中,  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$  的对边分别为  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . 请探究  $\frac{a}{\sin A}$ ,  $\frac{b}{\sin B}$ ,  $\frac{c}{\sin C}$  之间的关系, 并写出探究过程.

(2) 解决问题: 如图 3, 为测量点  $A$  到河对岸点  $B$  的距离, 选取与点  $A$  在河岸同一侧的点  $C$ , 测得  $AC = 60\text{m}$ ,  $\angle A = 75^\circ$ ,  $\angle C = 60^\circ$ . 请用拓展探究中的结论, 求点  $A$  到点  $B$  的距离.

【答案】(1)  $\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C}$ , 证明见解析

(2)  $30\sqrt{6}$  米

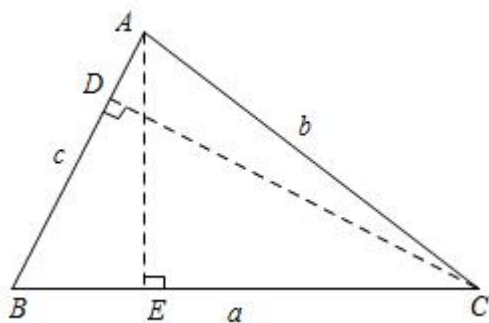
【解析】

【分析】拓展研究: 作  $CD \perp AB$  于点  $D$ ,  $AE \perp BC$  于点  $E$ , 根据正弦的定义得  $AE = c \sin B$ ,  $AE = b \sin \angle BCA$ ,  $CD = a \sin B$ ,  $CD = b \sin \angle BAC$ , 从而得出结论;

解决问题: 由拓展探究知,  $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin \angle CBA}$  代入计算即可.

【小问 1 详解】

(拓展探究) 证明: 作  $CD \perp AB$  于点  $D$ ,  $AC \perp BC$  于点  $E$ .



在  $Rt\triangle ABE$  中,  $\sin B = \frac{AE}{AB} = \frac{AE}{c}$ ,

同理:  $\sin B = \frac{CD}{BC} = \frac{CD}{a}$ ,

$$\sin \angle BAC = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{b}, \sin \angle BCA = \frac{AE}{AC} = \frac{AE}{b}.$$

$$\therefore AE = c \sin B, AE = b \sin \angle BCA,$$

$$CD = a \sin B, CD = b \sin \angle BAC.$$

$$\therefore c \sin B = b \sin \angle BCA, a \sin B = b \sin \angle BAC.$$

$$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin \angle BCA}, \frac{a}{\sin \angle BAC} = \frac{b}{\sin B}.$$

$$\therefore \frac{a}{\sin \angle BAC} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin \angle BCA}.$$

【小问2详解】

【解答问题】解：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle CBA = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ$ .

$$\therefore \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin \angle CBA},$$

$$\therefore \frac{AB}{\sin 60^\circ} = \frac{60}{\sin 45^\circ}$$

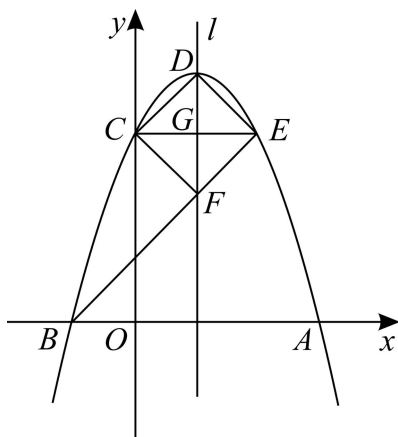
$$\text{解得: } AB = 30\sqrt{6}$$

答：点 $A$ 到点 $B$ 的距离为 $AB = 30\sqrt{6} m$ .

【点睛】本题主要考查了解直角三角形，对于锐角三角形，利用正弦的定义，得出

$$\frac{a}{\sin \angle BAC} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin \angle BCA} \text{ 是解题的关键.}$$

21. 已知抛物线 $C_1: y = -\frac{1}{2}(m^2 + 1)x^2 - (m+1)x - 1$ 与 $x$ 轴有公共点.



(1) 当 $y$ 随 $x$ 的增大而增大时，求自变量 $x$ 的取值范围；

(2) 将抛物线 $C_1$ 先向上平移4个单位长度，再向右平移 $n$ 个单位长度得到抛物线 $C_2$ （如图所示），抛物线

$C_2$ 与 $x$ 轴交于点 $A, B$ （点 $A$ 在点 $B$ 的右侧），与 $y$ 轴交于点 $C$ 。当 $OC = OA$ 时，求 $n$ 的值；

(3)  $D$  为抛物线  $C_2$  的顶点, 过点  $C$  作抛物线  $C_2$  的对称轴  $l$  的垂线, 垂足为  $G$ , 交抛物线  $C_2$  于点  $E$ , 连接  $BE$  交  $l$  于点  $F$ . 求证: 四边形  $CDEF$  是正方形.

【答案】(1)  $x < -1$

(2)  $n = 2$  (3) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据抛物线与  $x$  轴有公共点, 可得  $\Delta \geq 0$ , 从而求出  $m$  的值, 进而求得抛物线对称轴, 进一步得到结果;

(2) 根据图像平移的特征可求出平移后抛物线的解析式, 根据  $x = 0$  和  $y = 0$  分别得出点  $C$  和  $A$  的坐标, 根据  $OC = OA$  列出方程, 进而求得的结果;

(3) 从而得出点  $B$ 、点  $C$  的坐标, 由抛物线的解析式可得出点  $D$  的坐标和点  $E$  的坐标, 进而求得  $BE$  的解析式, 从而得出点  $F$  的坐标, 进而得出  $CG = EG = DG = FG = 1$ , 进一步得出结论.

【小问 1 详解】

解:  $\because$  抛物线  $y = -\frac{1}{2}(m^2 + 1)x^2 - (m + 1)x - 1$  与  $x$  轴有公共点,

$$\therefore (m + 1)^2 - 4 \times \left[ -\frac{1}{2}(m^2 + 1) \right] \times (-1) \geq 0.$$

$$\therefore -(m - 1)^2 \geq 0. \therefore m - 1 = 0.$$

$$\therefore m = 1,$$

$$\therefore y = -x^2 - 2x - 1 = -(x + 1)^2,$$

$$\therefore -1 < 0,$$

$\therefore$  当  $x < -1$  时,  $y$  随着  $x$  的增大而增大.

【小问 2 详解】

解: 由题意, 得  $y = -(x + 1 - n)^2 + 4 = -x^2 - 2(1 - n)x - n^2 + 2n + 3$ ,

当  $y = 0$  时,  $-(x + 1 - n)^2 + 4 = 0$ .

解得:  $x = -3 + n$  或  $x = 1 + n$ .

$\therefore$  点  $A$  在点  $B$  的右侧,

$\therefore$  点  $A$  的坐标为  $(1 + n, 0)$ , 点  $B$  的坐标为  $(-3 + n, 0)$ .

$\therefore$  点  $C$  的坐标为  $(0, -n^2 + 2n + 3)$ ,

$$\therefore n + 1 = -n^2 + 2n + 3.$$

解得:  $n = 2$  或  $n = -1$  (舍去).

故  $n$  的值为 2.

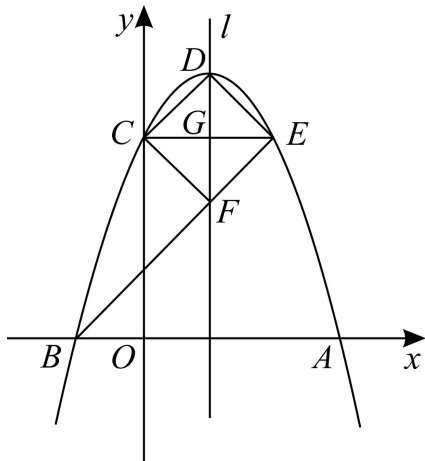
【小问 3 详解】

解: 由 (2) 可知: 抛物线  $C_2$  的解析式为  $y = -(x-1)^2 + 4$ .

$\therefore$  点  $A$  的坐标为  $(3, 0)$ , 点  $B$  的坐标为  $(-1, 0)$

点  $C$  的坐标为  $(0, 3)$ , 点  $D$  的坐标为  $(1, 4)$ ,

抛物线  $C_2$  的对称轴是直线  $x = 1$ ,



$\therefore$  点  $E$  与点  $C$  关于直线  $x = 1$  对称,

$\therefore$  点  $E$  的坐标为  $(2, 3)$ .

$\therefore$  点  $G$  的坐标为  $(1, 3)$ .

设直线  $BE$  解析式为  $y = kx + b$ ,

$$\therefore \begin{cases} -k + b = 0, \\ 2k + b = 3. \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = 1, \\ b = 1. \end{cases}$$

$$\therefore y = x + 1.$$

当  $x = 1$  时,  $y = 1 + 1 = 2$ . 点  $F$  的坐标为  $(1, 2)$ .

$$\therefore FG = EG = DG = CG = 1.$$

$\therefore$  四边形  $CDEF$  为矩形.

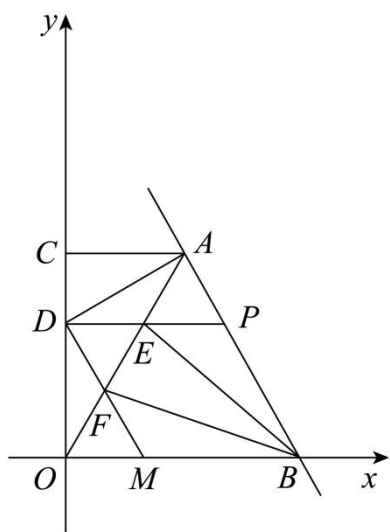
又  $\because CE \perp DF$ ,

$\therefore$  四边形  $CDEF$  为正方形.

【点睛】 本题主要考查二次函数的图像与性质, 求一次函数的解析式, 平移图像的特征, 正方形的判定, 解决问题的关键是平移前后抛物线解析式之间的关系.

22. 如图,  $\triangle AOB$  是等边三角形, 过点  $A$  作  $y$  轴的垂线, 垂足为  $C$ , 点  $C$  的坐标为  $(0, \sqrt{3})$ .  $P$  是直线  $AB$

上在第一象限内的一动点, 过点  $P$  作  $y$  轴的垂线, 垂足为  $D$ , 交  $AO$  于点  $E$ , 连接  $AD$ , 作  $DM \perp AD$  交  $x$  轴于点  $M$ , 交  $AO$  于点  $F$ , 连接  $BE$ ,  $BF$ .



- (1) 填空: 若  $\triangle AOD$  是等腰三角形, 则点  $D$  的坐标为\_\_\_\_\_;
- (2) 当点  $P$  在线段  $AB$  上运动时 (点  $P$  不与点  $A$ ,  $B$  重合), 设点  $M$  的横坐标为  $m$ .
- ①求  $m$  值最大时点  $D$  的坐标;
- ②是否存在这样的  $m$  值, 使  $BE = BF$ ? 若存在, 求出此时的  $m$  值; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1)  $\left(0, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$  或  $(0, 2)$

(2) ①点  $D$  坐标为  $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ; ②存在,  $m = \frac{2}{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据题意易得  $\angle AOB = 60^\circ$  从而  $\angle AOC = 30^\circ$  和  $\angle CDA = 60^\circ$ , 根据  $\tan 30^\circ$  求得  $AC$  的长, 再根据  $\sin 60^\circ$  求得  $AD$  的长, 当  $OA = AD$  和  $OD = OA$  时分情况讨论, 即可得到  $OD$  的长, 从而得到  $D$  点坐标;

(2) ①设点  $D$  的坐标为  $(0, a)$ , 则  $OD = a$ ,  $CD = \sqrt{3} - a$ , 易证  $\triangle ACD \sim \triangle DOM$ , 从而得出  $\frac{CD}{OM} = \frac{AC}{DO}$ , 代入即可得到  $m$  与  $a$  的函数关系, 化为顶点式即可得出答案;

②作  $FH \perp y$  轴于点  $H$ , 得到  $AC \parallel PD \parallel FH \parallel x$  轴, 易得  $\frac{AE}{EF} = \frac{CD}{DH}$ ,  $\frac{OH}{DH} = \frac{OF}{EF}$ , 易证  $\triangle BEA \cong \triangle BFO$  得出  $AE = FO$ , 即  $\frac{OH}{DH} = \frac{CD}{DH}$ , 设  $OD = n$ , 则  $DH = OC - CD - OH = 2n - \sqrt{3}$ , 通过证得  $\triangle ACD \sim \triangle DHF$  得出  $\frac{HD}{CA} = \frac{HF}{CD}$ , 代入即可得到  $n$  的值, 进一步得到  $m$  的值.

【小问 1 详解】

$\therefore \triangle AOB$  是等边三角形,

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ, \therefore \angle AOC = 30^\circ,$$

$$\because AC \perp y \text{ 轴}, \text{ 点 } C \text{ 的坐标为 } (0, \sqrt{3}),$$

$$\therefore OC = \sqrt{3},$$

$$\therefore AC = OC \cdot \tan 30^\circ = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1,$$

当  $\triangle AOD$  是等腰三角形,  $OD = AD$ ,  $\angle DAO = \angle DOA = 30^\circ$ ,

$$\therefore \angle CDA = 60^\circ,$$

$$\therefore AD = \frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore OD = AD = \frac{2}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore D \text{ 的坐标为 } \left(0, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right),$$

$$\text{当 } \triangle AOD \text{ 是等腰三角形, 此时 } OA = OD \text{ 时, } OA = \frac{OC}{\cos 30^\circ} = 2,$$

$$\therefore OD = OA = 2,$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 坐标为 } (0, 2),$$

$$\text{故答案为: } \left(0, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) \text{ 或 } (0, 2);$$

### 【小问 2 详解】

$$\text{①解: 设点 } D \text{ 的坐标为 } (0, a), \text{ 则 } OD = a, CD = \sqrt{3} - a,$$

$$\because \triangle AOB \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore \angle AOB = \angle OBA = \angle BAO = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle COA = 90^\circ - \angle AOB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\text{在 } Rt\triangle AOC \text{ 中, } \tan \angle COA = \frac{CA}{OC},$$

$$\therefore CA = OC \tan \angle COA = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1,$$

$$\therefore OA = 2CA = 2,$$

$$\because AD \perp DM, \therefore \angle ADC + \angle ODM = 90^\circ,$$

$$\because \angle CAD + \angle ADC = 90^\circ, \therefore \angle CAD = \angle ODM,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle DOM = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle DOM,$$

$$\therefore \frac{CD}{OM} = \frac{AC}{DO}, \text{ 即: } \frac{\sqrt{3}-a}{m} = \frac{1}{a},$$

$$\therefore m = -a^2 + \sqrt{3}a = -\left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

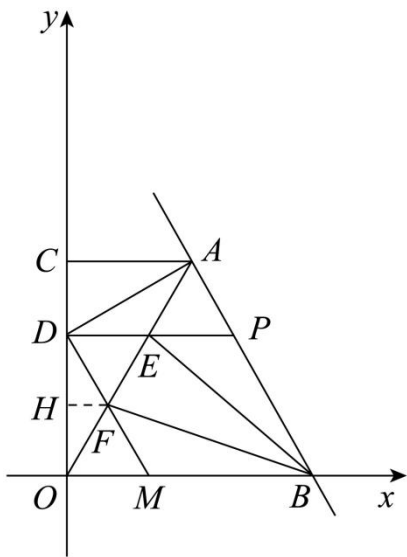
$$\therefore \text{当 } a = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 时, } m \text{ 的最大值为 } \frac{3}{4};$$

$$\therefore m \text{ 的最大值为 } \frac{3}{4} \text{ 时, 点 } D \text{ 坐标为 } \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

②存在这样的  $m$  值, 使  $BE = BF$ ;

作  $FH \perp y$  轴于点  $H$ ,

$$\therefore AC \parallel PD \parallel FH \parallel x \text{ 轴,}$$



$$\therefore \frac{AE}{EF} = \frac{CD}{DH}, \quad \frac{OH}{DH} = \frac{OF}{EF},$$

$$\therefore BF = BE,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle BFE,$$

$$\therefore \angle BEA + \angle BEF = 180^\circ, \quad \angle BFO + \angle BFE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BEA = \angle BFO,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle BOF = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle BEA \cong \triangle BFO (AAS),$$

$$\therefore AE = FO,$$

$$\therefore \frac{OH}{DH} = \frac{CD}{DH},$$

$$\therefore CD = HO,$$

$$\text{设 } OD = n, \text{ 则 } DH = OC - CD - OH = 2n - \sqrt{3},$$

$$HF = HO \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3} - n),$$

$$\therefore \angle CAD = \angle ODM, \angle ACD = \angle DHF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle DHF,$$

$$\therefore \frac{HD}{CA} = \frac{HF}{CD},$$

$$\therefore \frac{2n - \sqrt{3}}{1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3} - n)}{\sqrt{3} - n},$$

$$\text{解得: } n = \sqrt{3} \text{ 或 } n = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

当  $n = \sqrt{3}$  时, 点  $P$  与点  $A$  重合, 不合题意, 舍去,

$$\text{当 } n = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 时, } m = -\left(n - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = -\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{存在这样的 } m \text{ 值, 使 } BE = BF. \text{ 此时 } m = \frac{2}{3}.$$

**【点睛】** 本题考查了等边三角形的性质、特殊角的三角函数, 全等三角形的判定和性质、相似三角形的判定和性质以及二次函数的综合运用, 解题的关键是得出二次函数的关系式, 是对知识的综合考查.

