

济南市 2022 年九年级学业水平考试

数学试题

选择题部分 共 48 分

一、选择题 (本大题共 12 个小题, 每小题 4 分, 共 48 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

1. -7 的相反数是 ()

- A. -7 B. 7 C. $\frac{1}{7}$ D. $-\frac{1}{7}$

【答案】 B

【解析】

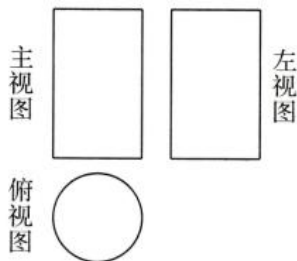
【分析】 据相反数的性质, 互为相反数的两个数和为 0, 采用逐一检验法求解即可.

【详解】 解: 根据概念, -7 的相反数是 7 .

故选: B.

【点睛】 本题考查了相反数的意义, 一个数的相反数就是在这个数前面添上“ $-$ ”号: 一个正数的相反数是负数, 一个负数的相反数是正数, 0 的相反数是 0 .

2. 如图是某几何体的三视图, 该几何体是 ()



- A. 圆柱 B. 球 C. 圆锥 D. 正四棱柱

【答案】 A

【解析】

【分析】 由主视图和左视图确定是柱体, 锥体还是球体, 再由俯视图确定具体形状.

【详解】 解: 主视图和左视图都是长方形, 那么此几何体为柱体, 由俯视图为圆, 可得此几何体是圆柱.

故选: A.

【点睛】 此题考查了由三视图判断几何体, 主视图和左视图的大致轮廓为三角形的几何体为锥体.

3. 神舟十三号飞船在近地点高度 200000m , 远地点高度 356000m 的轨道上驻留了 6 个月后, 于 2022 年 4 月 16 日顺利返回. 将数字 356000 用科学记数法表示为 ()

- A. 3.56×10^5 B. 0.356×10^6 C. 3.56×10^6 D. 35.6×10^4

【答案】A

【解析】

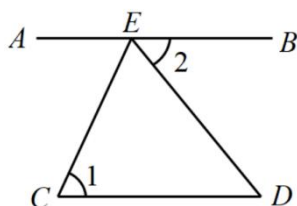
【分析】用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，且 n 比原来的整数位数少 1，据此判断即可.

【详解】解： $356000 = 3.56 \times 10^5$.

故选：A.

【点睛】此题主要考查了用科学记数法表示较大的数，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ，确定 a 与 n 的值是解题的关键.

4. 如图， $AB \parallel CD$ ，点 E 在 AB 上， EC 平分 $\angle AED$ ，若 $\angle 1 = 65^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为 ()



A. 45°

B. 50°

C. 57.5°

D. 65°

【答案】B

【解析】

【分析】根据平行线及角平分线的性质即可求解.

【详解】解： $\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle AEC = \angle 1$ (两直线平行，内错角相等)，

$\because EC$ 平分 $\angle AED$ ，

$\therefore \angle AEC = \angle CED = \angle 1$ ，

$\because \angle 1 = 65^\circ$ ，

$\therefore \angle CED = \angle 1 = 65^\circ$ ，

$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle CED - \angle 1 = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ$.

故选：B.

【点睛】本题考查了平行线的性质，解题关键根据直线平行和角平分线的性质得出角度之间的关系即可得出答案.

5. 下列绿色能源图标中既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



【答案】B

【解析】

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的概念，对各选项分析判断即可得解，把一个图形绕某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形；如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形.

【详解】解：A、既不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故本选项不合题意；

B、既是轴对称图形，又是中心对称图形，故本选项符合题意；

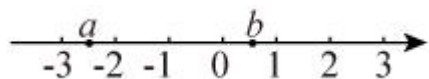
C、不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项不合题意；

D、是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不合题意.

故选：B.

【点睛】本题考查了中心对称图形以及轴对称图形的概念，轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180° 度后与自身重合.

6. 实数 a , b 在数轴上对应点的位置如图所示，下列结论正确的是 ()



A. $ab > 0$

B. $a + b > 0$

C. $|a| < |b|$

D. $a + 1 < b + 1$

【答案】D

【解析】

【分析】利用数轴与实数的关系，及正负数在数轴上的表示求解.

【详解】解：根据图形可以得到：

$$-3 < a < -2 < 0, \quad 0 < b < 1,$$

$\therefore ab < 0$ ，故 A 项错误，

$a + b < 0$ ，故 B 项错误，

$|a| > |b|$ ，故 C 项错误，

$a + 1 < b + 1$ ，故 D 项错误.

故选：D.

【点睛】本题考查了数轴与实数的关系，理解并正确运用是解题的关键.

7. 某班级计划举办手抄报展览，确定了“5G 时代”、“北斗卫星”、“高铁速度”三个主题，若小明和小亮每人随机选择其中一个主题，则他们恰好选择同一个主题的概率是 ()

A. $\frac{1}{9}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{3}$

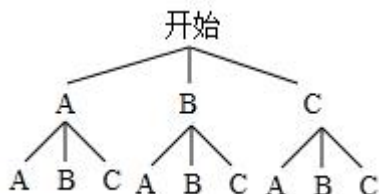
D. $\frac{2}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】画树状图，共有 9 种等可能的结果，其中小明和小刚恰好选择同一个主题结果有 3 种，再由概率公式求解即可.

【详解】解：把“5G 时代”、“北斗卫星”、“高铁速度”三个主题分别记为 A 、 B 、 C ，画树状图如下：



共有 9 种等可能的结果，其中小明和小刚恰好选择同一个主题的结果有 3 种，

$\therefore$ 小明和小刚恰好选择同一个主题的概率为 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

故选：C.

【点睛】本题考查了用树状图法求概率. 树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合两步或两步以上完成的事件. 用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

8. 若 $m-n=2$ ，则代数式 $\frac{m^2-n^2}{m} \cdot \frac{2m}{m+n}$ 的值是 ()

A. -2

B. 2

C. -4

D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】先因式分解，再约分得到原式 $= 2(m-n)$ ，然后利用整体代入的方法计算代数式的值.

【详解】解：原式 $= \frac{(m+n)(m-n)}{m} \cdot \frac{2m}{m+n}$

$= 2(m-n)$,

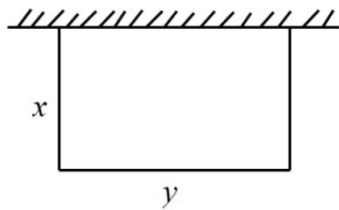
当 $m-n=2$ 时，原式 $= 2 \times 2 = 4$.

故选：D.

【点睛】本题考查了分式的化简求值：先把分式化简后，再把分式中未知数对应的值代入求出分式的值. 在化简的过程中要注意运算顺序和分式的化简. 化简的最后结果分子、分母要进行约分，注意运算的结果要化成最简分式或整式.

9. 某学校要建一块矩形菜地供学生参加劳动实践，菜地的一边靠墙，另外三边用木栏围成，木栏总长为 $40m$. 如图所示，设矩形一边长为 xm ，另一边长为 ym ，当 x 在一定范围内变化时， y 随 x 的变化而变化，

则 y 与 x 满足的函数关系是 ()



- A. 正比例函数关系
B. 一次函数关系
C. 反比例函数关系
D. 二次函数关系

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据矩形周长找出关于 x 和 y 的等量关系即可解答.

【详解】 解: 根据题意得:

$$2x + y = 40,$$

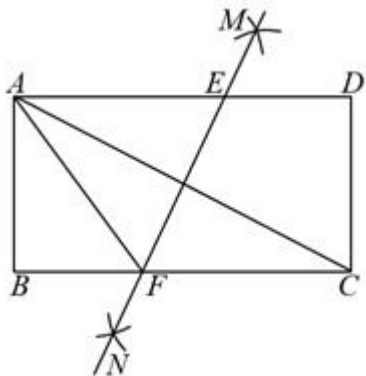
$$\therefore y = -2x + 40,$$

$\therefore y$ 与 x 满足的函数关系是一次函数;

故选: B.

【点睛】 本题通过矩形的周长考查一次函数的定义, 解题的关键是理清实际问题中的等量关系准确地列式.

10. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, 分别以 A, C 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}AC$ 的长为半径作弧, 两弧相交于 M, N 两点, 作直线 MN 分别交 AD, BC 于点 E, F , 连接 AF , 若 $BF = 3, AE = 5$, 以下结论错误的是 ()



- A. $AF = CF$
B. $\angle FAC = \angle EAC$
C. $AB = 4$
D. $AC = 2AB$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据作图过程可得, MN 是 AC 的垂直平分线, 再由矩形的性质可以证明 $\triangle AFO \cong \triangle CEO$, 可

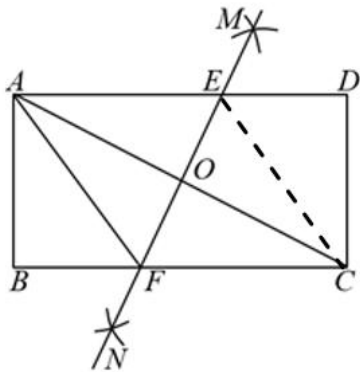
得 $AF = CE = AE = 5$, 再根据勾股定理可得 AB 的长, 即可判定得出结论.

【详解】解: A, 根据作图过程可得, MN 是 AC 的垂直平分线,

$$\therefore AF = CF,$$

故此选项不符合题意.

B, 如图,



由矩形的性质可以证明 $\triangle AFO \cong \triangle CEO$,

$$\therefore AE = CF,$$

$$\because FA = FC,$$

$$\therefore AE = AF,$$

$\therefore MN$ 是 AC 的垂直平分线,

$$\therefore \angle FAC = \angle EAC,$$

故此选项不符合题意.

$$C, \because AE = 5,$$

$$\therefore AF = AE = 5,$$

在 $Rt\triangle ABF$ 中

$$\because BF = 3,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AF^2 - BF^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

故此选项不符合题意.

$$D, \because BC = BF + FC = 3 + 5 = 8,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\therefore AB = 4,$$

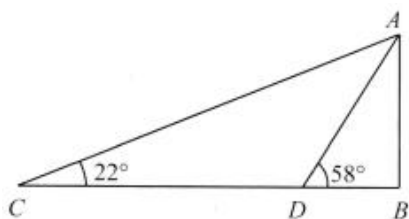
$$\therefore AC \neq 2AB.$$

故此选项符合题意.

故选: D.

【点睛】本题考查了作图-基本作图, 线段垂直平分线的性质、矩形的性质、勾股定理, 解决本题的关键是掌握基本作图方法.

11. 数学活动小组到某广场测量标志性建筑 AB 的高度. 如图, 他们在地面上 C 点测得最高点 A 的仰角为 22° , 再向前 70m 至 D 点, 又测得最高点 A 的仰角为 58° , 点 C, D, B 在同一直线上, 则该建筑物 AB 的高度约为 () (精确到 1m. 参考数据: $\sin 22^\circ \approx 0.37$, $\tan 22^\circ \approx 0.40$, $\sin 58^\circ \approx 0.85$, $\tan 58^\circ \approx 1.60$)



A. 28m

B. 34m

C. 37m

D. 46m

【答案】C

【解析】

【分析】在 $Rt\triangle ABD$ 中, 解直角三角形求出 $DB = \frac{5}{8}AB$, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, 解直角三角形可求出 AB .

【详解】解: 在 $Rt\triangle ABD$ 中, $\tan \angle ADB = \frac{AB}{DB}$,

$$\therefore DB = \frac{AB}{\tan 58^\circ} \approx \frac{AB}{1.6} = \frac{5}{8}AB,$$

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\tan \angle ACB = \frac{AB}{CB}$,

$$\therefore \tan 22^\circ = \frac{AB}{70 + \frac{5}{8}AB} \approx 0.4,$$

$$\text{解得: } AB = \frac{112}{3} \approx 37 \text{ m},$$

故选: C.

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用, 熟练掌握正切函数的定义是解题的关键.

12. 抛物线 $y = -x^2 + 2mx - m^2 + 2$ 与 y 轴交于点 C , 过点 C 作直线 l 垂直于 y 轴, 将抛物线在 y 轴右侧的部分沿直线 l 翻折, 其余部分保持不变, 组成图形 G , 点 $M(m-1, y_1)$, $N(m+1, y_2)$ 为图形 G 上两点,

若 $y_1 < y_2$, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $m < -1$ 或 $m > 0$ B. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ C. $0 \leq m < \sqrt{2}$ D. $-1 < m < 1$

【答案】D

【解析】

【分析】求出抛物线的对称轴、C点坐标以及当 $x=m-1$ 和 $x=m+1$ 时的函数值，再根据 $m-1 < m+1$ ，判断出M点在N点左侧，此时分类讨论：第一种情况，当N点在y轴左侧时，第二种情况，当M点在y轴的右侧时，第三种情况，当y轴在M、N点之间时，来讨论，结合图像即可求解.

【详解】抛物线解析式 $y = -x^2 + 2mx - m^2 + 2$ 变形为： $y = 2 - (x - m)^2$,

即抛物线对称轴为 $x = m$,

当 $x=m-1$ 时，有 $y = 2 - (m-1-m)^2 = 1$,

当 $x=m+1$ 时，有 $y = 2 - (m+1-m)^2 = 1$,

设 $(m-1, 1)$ 为A点， $(m+1, 1)$ 为B点，

即点A $(m-1, 1)$ 与B $(m+1, 1)$ 关于抛物线对称轴对称，

当 $x=0$ 时，有 $y = 2 - (0-m)^2 = 2 - m^2$,

$\therefore$ C点坐标为 $(0, 2 - m^2)$,

当 $x=m$ 时，有 $y = 2 - (m-m)^2 = 2$,

$\therefore$ 抛物线顶点坐标为 $(m, 2)$,

$\therefore$ 直线 $l \perp y$ 轴，

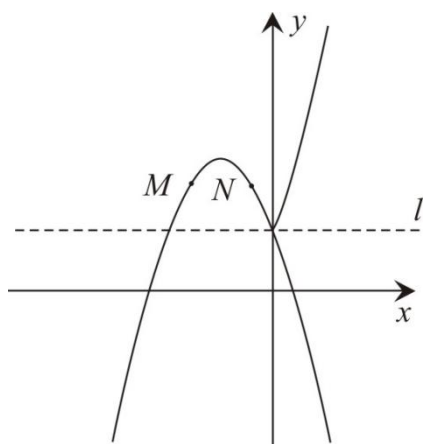
$\therefore$ 直线 l 为 $y = 2 - m^2$,

$\therefore m-1 < m+1$,

$\therefore$ M点在N点左侧，

此时分情况讨论：

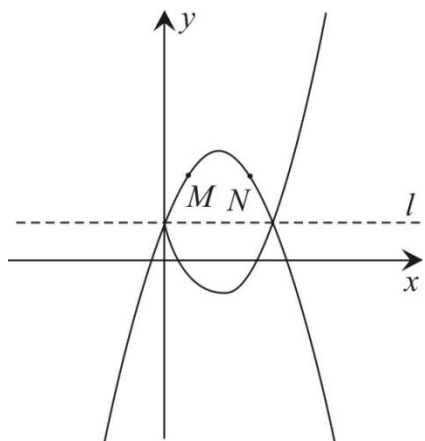
第一种情况，当N点在y轴左侧时，如图，



由图可知此时 M 、 N 点分别对应 A 、 B 点，即有 $y_1 = y_2 = 1$ ，

$\therefore$ 此时不符合题意；

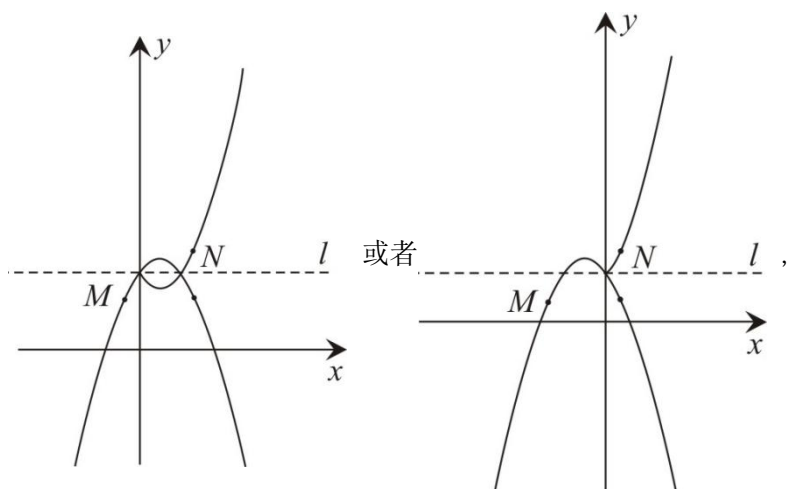
第二种情况，当 M 点在 y 轴的右侧时，如图，



由图可知此时 M 、 N 点满足 $y_1 = y_2$ ，

$\therefore$ 此时不符合题意；

第三种情况，当 y 轴在 M 、 N 点之间时，如图，



由图可知此时 M 、 N 点满足 $y_1 < y_2$ ，

∴此时符合题意;

此时由图可知: $m-1 < 0 < m+1$,

解得 $-1 < m < 1$,

综上所述: m 的取值范围为: $-1 < m < 1$,

故选: D.

【点睛】本题考查了二次函数的图像与性质、翻折的性质, 注重数形结合是解答本题的关键.

非选择题部分 共 102 分

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 直接填写答案.)

13. 因式分解: $a^2 + 4a + 4 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(a + 2)^2$

【解析】

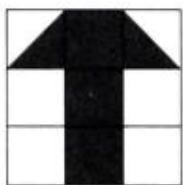
【分析】原式利用完全平方公式分解即可.

【详解】解: $a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$.

故答案为: $(a + 2)^2$.

【点睛】此题考查了公式法的运用, 熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键.

14. 如果小球在如图所示的地板上自由地滚动, 并随机的停留在某块方砖上, 那么它最终停留在阴影区域的概率是_____.



【答案】 $\frac{4}{9}$

【解析】

【分析】根据题意可得一共有 9 块方砖, 其中阴影区域的有 4 块, 再根据概率公式计算, 即可求解.

【详解】解: 根据题意得: 一共有 9 块方砖, 其中阴影区域的有 4 块,

∴它最终停留在阴影区域的概率是 $\frac{4}{9}$.

故答案为: $\frac{4}{9}$

【点睛】本题考查了概率公式: 熟练掌握随机事件 A 的概率 $P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$; $P(\text{必然事件}) = 1$; $P(\text{不可能事件}) = 0$ 是解题的关键.

15. 写出一个比 $\sqrt{2}$ 大且比 $\sqrt{17}$ 小的整数 _____.

【答案】3 (答案不唯一)

【解析】

【分析】先对 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{17}$ 进行估算, 再根据题意即可得出答案.

【详解】解: $\because \sqrt{2} < 2 < 3 < 4 < \sqrt{17} < 5$,

$\therefore$ 比 $\sqrt{2}$ 大且比 $\sqrt{17}$ 小的整数有 2, 3, 4.

故答案为: 3 (答案不唯一).

【点睛】此题考查了估算无理数的大小, 估算出 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{17}$ 是解题的关键.

16. 代数式 $\frac{3}{x+2}$ 与代数式 $\frac{2}{x-1}$ 的值相等, 则 $x =$ _____.

【答案】7

【解析】

【分析】根据题意列出分式方程, 求出方程的解, 得到 x 的值即可.

【详解】解: $\because$ 代数式 $\frac{3}{x+2}$ 与代数式 $\frac{2}{x-1}$ 的值相等,

$$\therefore \frac{3}{x+2} = \frac{2}{x-1},$$

去分母

$$3(x-1) = 2(x+2),$$

去括号

$$3x-3 = 2x+4,$$

解得 $x = 7$,

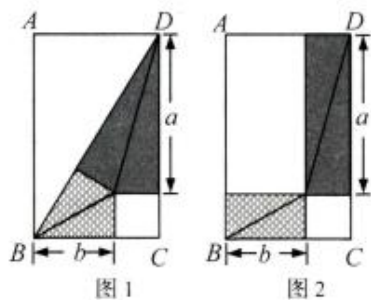
检验: 当 $x = 7$ 时, $(x+2)(x-1) \neq 0$,

$\therefore$ 分式方程的解为 $x = 7$.

故答案为: 7.

【点睛】本题考查了解分式方程, 利用了转化的思想, 解分式方程注意要检验.

17. 利用图形的分、和、移、补探索图形关系, 是我国传统数学的一种重要方法. 如图 1, BD 是矩形 $ABCD$ 的对角线, 将 $\triangle BCD$ 分割成两对全等的直角三角形和一个正方形, 然后按图 2 重新摆放, 观察两图, 若 $a = 4$, $b = 2$, 则矩形 $ABCD$ 的面积是_____.



【答案】 16

【解析】

【分析】 设小正方形的边长为 x ，利用 a 、 b 、 x 表示矩形的面积，再用 a 、 b 、 x 表示三角形以及正方形的面积，根据面积列出关于 a 、 b 、 x 的关系式，解出 x ，即可求出矩形面积.

【详解】 解： 设小正方形的边长为 x ，

$\therefore$ 矩形的长为 $(a+x)$ ， 宽为 $(b+x)$ ，

由图 1 可得： $\frac{1}{2}(a+x)(b+x) = \frac{1}{2}ax \times 2 + \frac{1}{2}bx \times 2 + x^2$ ，

整理得： $x^2 + ax + bx - ab = 0$ ，

$\because a = 4, b = 2$ ，

$\therefore x^2 + 6x - 8 = 0$ ，

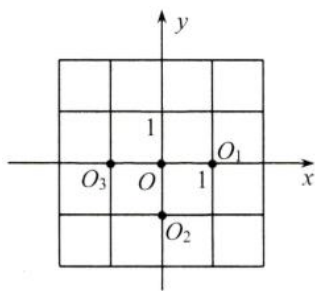
$\therefore x^2 + 6x = 8$ ，

$\therefore$ 矩形的面积为 $(a+x)(b+x) = (x+4)(x+2) = x^2 + 6x + 8 = 8 + 8 = 16$.

故答案为： 16.

【点睛】 本题主要考查列代数式，一元二次方程的应用，求出小正方形的边长是解题的关键.

18. 规定：在平面直角坐标系中，一个点作“0”变换表示将它向右平移一个单位，一个点作“1”变换表示将它绕原点顺时针旋转 90° ，由数字 0 和 1 组成的序列表示一个点按照上面描述依次连续变换. 例如：如图，点 $O(0,0)$ 按序列“011...”作变换，表示点 O 先向右平移一个单位得到 $O_1(1,0)$ ，再将 $O_1(1,0)$ 绕原点顺时针旋转 90° 得到 $O_2(0,-1)$ ，再将 $O_2(0,-1)$ 绕原点顺时针旋转 90° 得到 $O_3(-1,0)$...依次类推. 点 $(0,1)$ 经过“011011011”变换后得到点的坐标为_____.



【答案】 $(-1, -1)$

【解析】

【分析】 根据题意得出点 $(0, 1)$ 坐标变化规律，进而得出变换后的坐标位置，进而得出答案．

【详解】 解：点 $(0, 1)$ 按序列“011011011”作变换，表示点 $(0, 1)$ 先向右平移一个单位得到 $(1, 1)$ ，再将 $(1, 1)$ 绕原点顺时针旋转 90° 得到 $(1, -1)$ ，再将 $(1, -1)$ 绕原点顺时针旋转 90° 得到 $(-1, -1)$ ，然后右平移一个单位得到 $(0, -1)$ ，再将 $(0, -1)$ 绕原点顺时针旋转 90° 得到 $(-1, 0)$ ，再将 $(-1, 0)$ 绕原点顺时针旋转 90° 得到 $(0, 1)$ ，然后右平移一个单位得到 $(1, 1)$ ，再将 $(1, 1)$ 绕原点顺时针旋转 90° 得到 $(1, -1)$ ，再将 $(1, -1)$ 绕原点顺时针旋转 90° 得到 $(-1, -1)$ ．

故答案为： $(-1, -1)$

【点睛】 此题主要考查了点的坐标变化规律，得出点坐标变化规律是解题关键．

三、解答题（本大题共 9 个小题，共 78 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．）

19. 计算： $|-3| - 4\sin 30^\circ + \sqrt{4} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ ．

【答案】 6

【解析】

【分析】 先根据绝对值的意义，特殊角的三角函数值，负整数指数幂，算术平方根定义进行化简，然后再进行计算即可．

【详解】 解： $|-3| - 4\sin 30^\circ + \sqrt{4} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$$= 3 - 4 \times \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{\frac{1}{3}}$$

$$= 3 - 2 + 2 + 3$$

$$= 6$$

【点睛】本题主要考查了实数的混合运算，熟练掌握绝对值的意义，特殊角的三角函数值，负整数指数幂，算术平方根定义，是解题的关键.

20. 解不等式组:
$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} < \frac{x}{3}, & \text{①} \\ 2x-5 \leq 3(x-2). & \text{②} \end{cases}$$
, 并写出它的所有整数解.

【答案】 $1 \leq x < 3$, 整数解为 1, 2

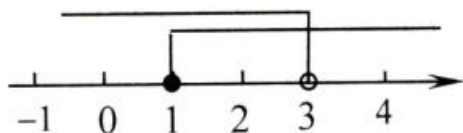
【解析】

【分析】分别求出不等式组中两不等式的解集，找出两解集的公共部分确定出不等式组的解集，进而确定出整数解即可.

【详解】解不等式①，得 $x < 3$,

解不等式②，得 $x \geq 1$,

在同一条数轴上表示不等式①②的解集



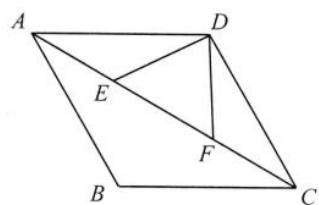
原不等式组的解集是 $1 \leq x < 3$,

∴ 整数解为 1, 2.

【点睛】此题考查了一元一次不等式组的整数解，以及解一元一次不等式组，熟练掌握不等式组的解法是解本题的关键.

21. 已知: 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, E, F 是对角线 AC 上两点, 连接 DE, DF , $\angle ADF = \angle CDE$. 求证:

$AE = CF$.



【答案】 见解析

【解析】

【分析】根据菱形的性质得出 $DA = DC$, $\angle DAC = \angle DCA$, 再利用角的等量代换得出 $\angle ADE = \angle CDF$, 接着由角边角判定 $\triangle DAE \cong \triangle DCF$, 最后由全等的性质即可得出结论.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, E, F 是对角线 AC 上两点,

$\therefore DA = DC$, $\angle DAC = \angle DCA$.

$\because \angle ADF = \angle CDE$,

$$\therefore \angle ADF - \angle EDF = \angle CDE - \angle EDF,$$

即 $\angle ADE = \angle CDF$.

$$\text{在 } \triangle DAE \text{ 和 } \triangle DCF \text{ 中, } \begin{cases} \angle DAC = \angle DCA \\ DA = DC \\ \angle ADE = \angle CDF \end{cases},$$

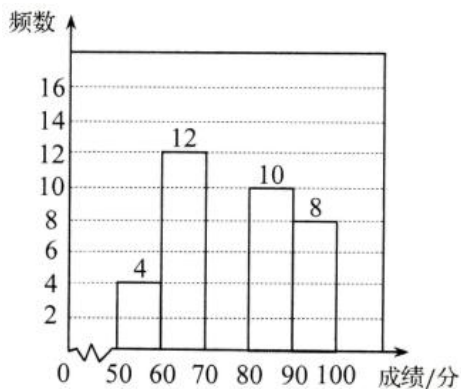
$$\therefore \triangle DAE \cong \triangle DCF (ASA),$$

$$\therefore AE = CF.$$

【点睛】本题考查菱形的性质，全等三角形的判定和性质，解题的关键是熟练地掌握这些性质和判定定理，并能从题中找到合适的条件进行证明.

22. 某校举办以 2022 年北京冬奥会为主题的知识竞赛，从七年级和八年级各随机抽取了 50 名学生的竞赛成绩进行整理、描述和分析，部分信息如下：

a: 七年级抽取成绩的频数分布直方图如图. (数据分成 5 组, $50 \leq x < 60$, $60 \leq x < 70$, $70 \leq x < 80$, $80 \leq x < 90$, $90 \leq x \leq 100$)



b: 七年级抽取成绩在 $70 \leq x < 80$ 这一组的是: 70, 72, 73, 73, 75, 75, 75, 76, 77, 77, 78, 78, 79, 79, 79, 79.

c: 七、八年级抽取成绩的平均数、中位数如下:

年级	平均数	中位数
七年级	76.5	m
八年级	78.2	79

请结合以上信息完成下列问题:

- 七年级抽取成绩在 $60 \leq x < 90$ 的人数是_____, 并补全频数分布直方图;
- 表中 m 的值为_____;
- 七年级学生甲和八年级学生乙的竞赛成绩都是 78, 则_____ (填“甲”或“乙”) 的成绩在本年级抽

取成绩中排名更靠前;

(4) 七年级的学生共有 400 人, 请你估计七年级竞赛成绩 90 分及以上的学生人数.

【答案】(1) 38, 理由见解析

(2) 77 (3) 甲

(4) 七年级竞赛成绩 90 分及以上人数约为 64 人

【解析】

【分析】(1) 根据题意及频数分布直方图即可得出结果;

(2) 根据中位数的计算方法求解即可;

(3) 由七八年级中位数与甲乙学生成绩的比较即可得出结果;

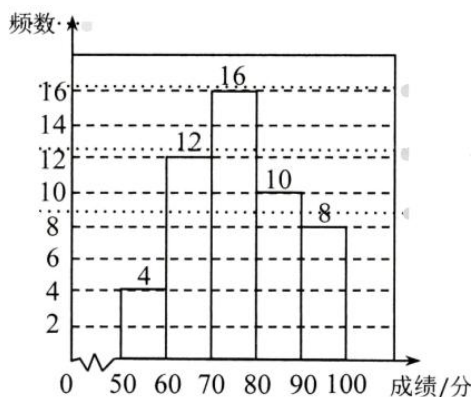
(4) 用总人数乘以七年级竞赛成绩 90 分及以上的学生人数占总的人数的比例求解即可.

【小问 1 详解】

解: 由题意可得: $70 \leq x < 80$ 这组的数据有 16 人,

$\therefore$ 七年级抽取成绩在 $60 \leq x < 90$ 的人数是: $12 + 16 + 10 = 38$ 人,

故答案为: 38; 补全频数分布直方图如图所示;



【小问 2 详解】

解: $\because 4 + 12 = 16 < 25$, $4 + 12 + 16 > 25$,

$\therefore$ 七年级中位数在 $70 \leq x < 80$ 这组数据中,

$\therefore$ 第 25、26 的数据分别为 77, 77,

$$\therefore m = \frac{77 + 77}{2} = 77,$$

故答案为: 77;

【小问 3 详解】

解: $\because$ 七年级学生的中位数为 $77 < 78$, 八年级学生的中位数为 $79 > 78$,

$\therefore$ 甲的成绩在本年级抽取成绩中排名更靠前,

故答案为: 甲;

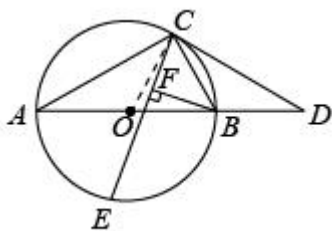
【小问 4 详解】

解: $400 \times \frac{8}{50} = 64$ (人)

答: 七年级竞赛成绩 90 分及以上人数约为 64 人.

【点睛】题目主要考查统计的相关应用, 包括频数分布直方图及用部分估计总体、中位数的求法等, 理解题意, 综合运用这些知识点是解题关键.

23. 已知: 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, CD 与 $\odot O$ 相切于点 C , 交 AB 延长线于点 D , 连接 AC , BC , $\angle D = 30^\circ$, CE 平分 $\angle ACB$ 交 $\odot O$ 于点 E , 过点 B 作 $BF \perp CE$, 垂足为 F .



(1) 求证: $CA = CD$;

(2) 若 $AB = 12$, 求线段 BF 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 连接 OC , 欲证明 $CA = CD$, 只要证明 $\angle CAD = \angle CDA$ 即可.

(2) 因为 AB 为直径, 所以 $\angle ACB = 90^\circ$, 可得出三角形 CBF 为等腰直角三角形, 即可求出 BF , 由此即可解决问题.

【小问 1 详解】

证明: 连接 OC

$\because CD$ 与 $\odot O$ 相切于点 C ,

$\therefore OC \perp CD$,

$\therefore \angle OCD = 90^\circ$,

$\because \angle CDA = 30^\circ$,

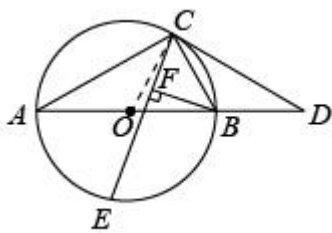
$\therefore \angle COB = 90^\circ - \angle CDA = 60^\circ$,

$\because \widehat{BC}$ 所对的圆周角为 $\angle CAB$, 圆心角为 $\angle COB$,

$\therefore \angle CAB = \frac{1}{2} \angle COB = 30^\circ$,

$\therefore \angle CAD = \angle CDA$,

$\therefore CA = CD$.



【小问 2 详解】

$\because AB$ 为直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 30^\circ$, $AB = 12$,

$\therefore BC = \frac{1}{2}AB = 6$,

$\because CE$ 平分 $\angle ACB$,

$\therefore \angle ECB = \frac{1}{2}\angle ACB = 45^\circ$,

$\because BF \perp CE$,

$\therefore \angle CFB = 90^\circ$,

$\therefore BF = BC \cdot \sin 45^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查切线的性质, 圆周角定理、解直角三角形等知识, 解题的关键是灵活运用这些知识解决问题, 学会条件常用辅助线, 属于中考常考题型.

24. 为增加校园绿化面积, 某校计划购买甲、乙两种树苗. 已知购买 20 棵甲种树苗和 16 棵乙种树苗共花费 1280 元, 购买 1 棵甲种树苗比 1 棵乙种树苗多花费 10 元.

(1) 求甲、乙两种树苗每棵的价格分别是多少元?

(2) 若购买甲、乙两种树苗共 100 棵, 且购买乙种树苗的数量不超过甲种树苗的 3 倍, 则购买甲、乙两种树苗各多少棵时花费最少? 请说明理由.

【答案】(1) 甲种树苗每棵 40 元, 乙种树苗每棵 30 元

(2) 当购买甲种树苗 25 棵, 乙种树苗 75 棵时, 花费最少, 理由见解析

【解析】

【分析】(1) 设每棵甲种树苗的价格为 x 元, 每棵乙种树苗的价格 y 元, 由“购买 20 棵甲种树苗和 16 棵乙种树苗共花费 1280 元, 购买 1 棵甲种树苗比 1 棵乙种树苗多花费 10 元”列出方程组, 求解即可;

(2) 设购买甲种树苗 m 棵, 则购买乙种树苗 $(100-m)$ 棵, 购买两种树苗总费用为 W 元得出一元一次函数, 根据一元一次函数的性质求解即可.

【小问 1 详解】

设甲种树苗每棵 x 元, 乙种树苗每棵 y 元.

由题意得,
$$\begin{cases} 20x + 16y = 1280 \\ x - y = 10 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = 40 \\ y = 30 \end{cases},$$

答: 甲种树苗每棵 40 元, 乙种树苗每棵 30 元.

【小问 2 详解】

设购买甲种树苗 m 棵, 则购买乙种树苗 $(100-m)$ 棵, 购买两种树苗总费用为 W 元,

由题意得 $W = 40m + 30(100-m)$, $W = 10m + 3000$,

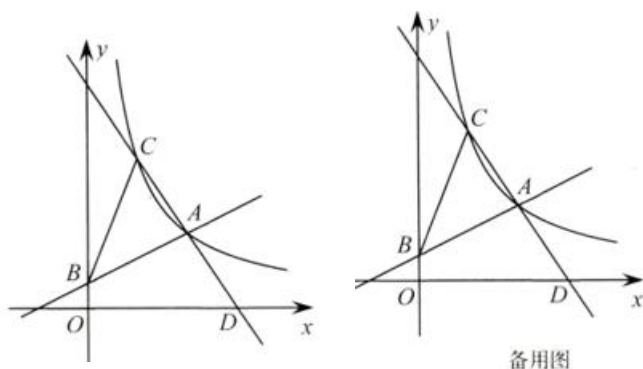
由题意得 $100-m \leq 3m$, 解得 $m \geq 25$,

因为 W 随 m 的增大而增大, 所以当 $m = 25$ 时 W 取得最小值.

答: 当购买甲种树苗 25 棵, 乙种树苗 75 棵时, 花费最少.

【点睛】本题考查了一次函数的应用, 二元一次方程组的应用, 找到正确的数量关系是本题的关键.

25. 如图, 一次函数 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 $A(a, 3)$, 与 y 轴交于点 B .



(1) 求 a, k 的值;

(2) 直线 CD 过点 A , 与反比例函数图象交于点 C , 与 x 轴交于点 D , $AC = AD$, 连接 CB .

①求 $\triangle ABC$ 的面积;

②点 P 在反比例函数的图象上, 点 Q 在 x 轴上, 若以点 A, B, P, Q 为顶点的四边形是平行四边形, 请求出所有符合条件的点 P 坐标.

【答案】(1) $a = 4, k = 12$;

(2) ①8; ②符合条件的点 P 坐标是 $(6, 2)$ 和 $(3, 4)$.

【解析】

【分析】(1) 将点 $A(a, 3)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x + 1$, 求出 $a = 4$, 即可得 $A(4, 3)$, 将点 $A(4, 3)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$, 即可

求出 k ;

(2) ①如图, 过 A 作 $AM \perp x$ 轴于点 M , 过 C 作 $CN \perp x$ 轴于点 N , 交 AB 于点 E , 求出 $C(2,6)$, $E(2,2)$, 得到 CE , 进一步可求出 $\triangle ABC$ 的面积; ②设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, 0)$. 分情况讨论: i、当四边形 $ABQP$ 为平行四边形时, ii、当四边形 $APBQ$ 为平行四边形时, 计算即可.

【小问 1 详解】

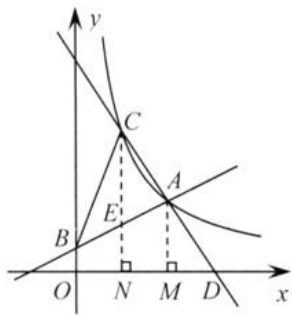
解: 将点 $A(a, 3)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x + 1$, 得 $a = 4$, $A(4, 3)$,

将点 $A(4, 3)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$, 得 $k = 4 \times 3 = 12$,

反比例函数的解析式为 $y = \frac{12}{x}$.

【小问 2 详解】

解: ①如图, 过 A 作 $AM \perp x$ 轴于点 M , 过 C 作 $CN \perp x$ 轴于点 N , 交 AB 于点 E ,



$$\therefore AM \parallel CN,$$

$$\because AC = AD,$$

$$\therefore \frac{AM}{CN} = \frac{DA}{DC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CN = 6,$$

$$\therefore x_C = \frac{12}{6} = 2,$$

$$\therefore C(2, 6),$$

$$\therefore E(2, 2),$$

$$\therefore CE = 6 - 2 = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACE} + S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 + \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 8.$$

②分两种情况: 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, 0)$.

i、如图, 当四边形 $ABQP$ 为平行四边形时,

60° , 得到线段 AE , 连接 BD , DE , CE .

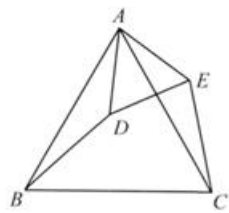


图 1

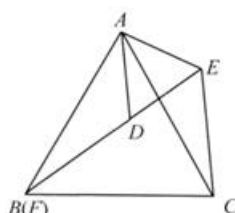


图 2

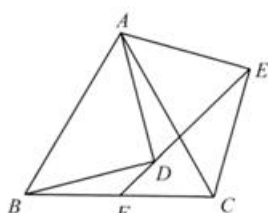


图 3

(1) 判断线段 BD 与 CE 的数量关系并给出证明;

(2) 延长 ED 交直线 BC 于点 F .

①如图 2, 当点 F 与点 B 重合时, 直接用等式表示线段 AE , BE 和 CE 的数量关系为_____;

②如图 3, 当点 F 为线段 BC 中点, 且 $ED = EC$ 时, 猜想 $\angle BAD$ 的度数, 并说明理由.

【答案】(1) $BD = CE$, 理由见解析

(2) ① $BE = AE + CE$; ② $\angle BAD = 45^\circ$, 理由见解析

【解析】

【分析】(1) 利用等边三角形的性质和旋转的性质易得到 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS), 再由全等三角形的性质求解;

(2) ①根据线段 AD 绕点 A 按逆时针方向旋转 60° 得到 AE 得到 $\triangle ADE$ 是等边三角形, 由等边三角形的性质和 (1) 的结论来求解; ②过点 A 作 $AG \perp EF$ 于点 G , 连接 AF , 根据等边三角形的性质和锐角三角函数求值得到 $\angle BAF = \angle DAG$, $\frac{AG}{AD} = \frac{AF}{AB}$, 进而得到 $\triangle BAD \sim \triangle FAG$, 进而求出 $\angle ADB = 90^\circ$, 结合 $BD = CE$, $ED = EC$ 得到 $BD = AD$, 再用等腰直角三角形的性质求解.

【小问 1 详解】

解: $BD = CE$.

证明: $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore AB = AC$, $\angle BAC = 60^\circ$.

$\because$ 线段 AD 绕点 A 按逆时针方向旋转 60° 得到 AE ,

$\therefore AD = AE$, $\angle DAE = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAC = \angle DAE$,

$\therefore \angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC$,

即 $\angle BAD = \angle CAE$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (SAS),$$

$$\therefore BD = CE;$$

【小问2 详解】

$$\text{解: ① } BE = AE + CE$$

理由: $\because$ 线段 AD 绕点 A 按逆时针方向旋转 60° 得到 AE ,

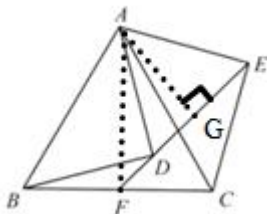
$\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形,

$$\therefore AD = DE = AE,$$

由 (1) 得 $BD = CE$,

$$\therefore BE = DE + BD = AE + CE;$$

② 过点 A 作 $AG \perp EF$ 于点 G , 连接 AF , 如下图.



$\because \triangle ADE$ 是等边三角形, $AG \perp DE$,

$$\therefore \angle DAG = \frac{1}{2} \angle DAE = 30^\circ,$$

$$\therefore \frac{AG}{AD} = \cos \angle DAG = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形, 点 F 为线段 BC 中点,

$$\therefore BF = CF, \quad AF \perp BC, \quad \angle BAF = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \frac{AF}{AB} = \cos \angle BAF = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle BAF = \angle DAG, \quad \frac{AG}{AD} = \frac{AF}{AB},$$

$$\therefore \angle BAF + \angle DAF = \angle DAG + \angle DAF,$$

即 $\angle BAD = \angle FAG$,

$$\therefore \triangle BAD \sim \triangle FAG,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle AGF = 90^\circ.$$

$$\because BD = CE, ED = EC,$$

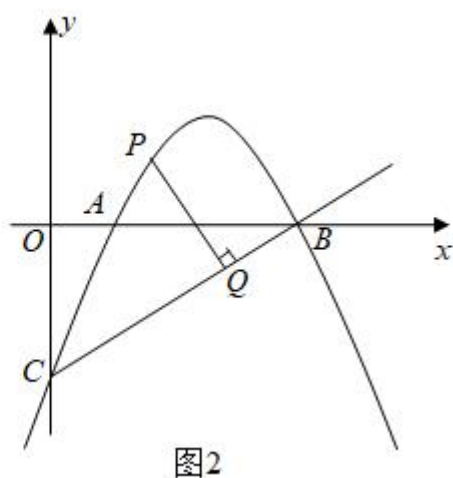
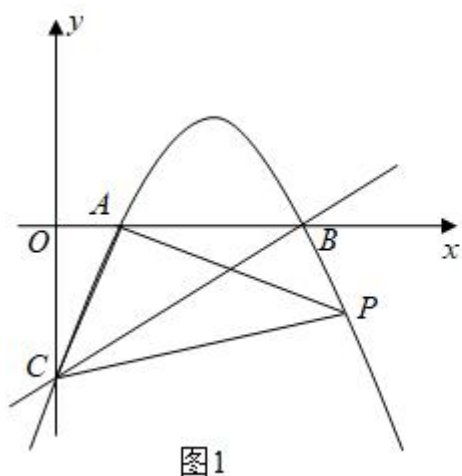
$$\therefore BD = AD,$$

即 $\triangle ABD$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle BAD = 45^\circ.$$

【点睛】本题主要考查了等边三角形的性质，旋转的性质，全等三角形的判定和性质，解直角三角形，相似三角形的判定和性质，等腰直角三角形的判定和性质，理解相关知识是解答关键.

27. 抛物线 $y = ax^2 + \frac{11}{4}x - 6$ 与 x 轴交于 $A(t, 0)$, $B(8, 0)$ 两点, 与 y 轴交于点 C , 直线 $y = kx - 6$ 经过点 B . 点 P 在抛物线上, 设点 P 的横坐标为 m .



(1) 求抛物线的表达式和 t , k 的值;

(2) 如图 1, 连接 AC , AP , PC , 若 $\triangle APC$ 是以 CP 为斜边的直角三角形, 求点 P 的坐标;

(3) 如图 2, 若点 P 在直线 BC 上方的抛物线上, 过点 P 作 $PQ \perp BC$, 垂足为 Q , 求 $CQ + \frac{1}{2}PQ$ 的最大值.

【答案】(1), $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{11}{4}x - 6$, $t=3$, $k = \frac{3}{4}$

(2) 点 $P\left(10, -\frac{7}{2}\right)$

(3) $\frac{169}{16}$

【解析】

【分析】(1) 分别把 $B(8, 0)$ 代入抛物线解析式和一次函数的解析式, 即可求解;

(2) 作 $PM \perp x$ 轴于点 M , 根据题意可得 $P\left(m, -\frac{1}{4}m^2 + \frac{11}{4}m - 6\right)$, 从而得到 $PM = \frac{1}{4}m^2 - \frac{11}{4}m + 6$,

$AM = m - 3$ ，再根据 $\triangle COA \sim \triangle AMP$ ，可求出 m ，即可求解；

(3) 作 $PN \perp x$ 轴交 BC 于点 N ，过点 N 作 $NE \perp y$ 轴于点 E ，则

$$PN = -\frac{1}{4}m^2 + \frac{11}{4}m - 6 - \left(\frac{3}{4}m - 6\right) = -\frac{1}{4}m^2 + 2m, \text{ 再根据 } \triangle PQN \sim \triangle BOC, \text{ 可得 } NQ = \frac{3}{5}PN,$$

$$PQ = \frac{4}{5}PN, \text{ 然后根据 } \triangle CNE \sim \triangle CBO, \text{ 可得 } CN = \frac{5}{4}m, \text{ 从而得到}$$

$$CQ + \frac{1}{2}PQ = CN + NQ + \frac{1}{2}PQ = CN + PN, \text{ 在根据二次函数的性质, 即可求解.}$$

【小问 1 详解】

解: $\because B(8,0)$ 在抛物线 $y = ax^2 + \frac{11}{4}x - 6$ 上,

$$\therefore 64a + \frac{11}{4} \times 8 - 6 = 0,$$

$$\therefore a = -\frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{11}{4}x - 6,$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } -\frac{1}{4}t^2 + \frac{11}{4}t - 6 = 0,$$

$$\therefore t_1 = 3, t_2 = 8 \text{ (舍)},$$

$$\therefore t = 3.$$

$\because B(8,0)$ 在直线 $y = kx - 6$ 上,

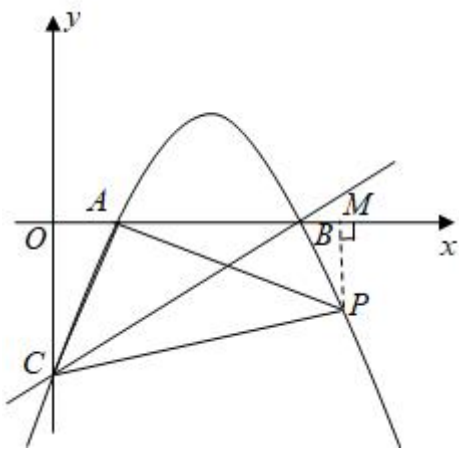
$$\therefore 8k - 6 = 0,$$

$$\therefore k = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{一次函数解析式为 } y = \frac{3}{4}x - 6.$$

【小问 2 详解】

解: 如图, 作 $PM \perp x$ 轴于点 M ,



对于 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{11}{4}x - 6$, 令 $x=0$, 则 $y=-6$,

$\therefore$ 点 C $(0, -6)$, 即 $OC=6$,

 $\therefore A = (3, 0),$
$$\therefore OA=3,$$

$\therefore$ 点 P 的横坐标为 m .

$$\therefore P\left(m, -\frac{1}{4}m^2 + \frac{11}{4}m - 6\right),$$

$$\therefore PM = \frac{1}{4}m^2 - \frac{11}{4}m + 6, \quad AM = m - 3,$$

$$\therefore \angle CAP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAC + \angle PAM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APM + \angle PAM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle APM ,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle AMP = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle COA \sim \triangle AMP,$$

$$\therefore \frac{OA}{PM} = \frac{OC}{MA},$$

$$\therefore OA \cdot MA = OC \cdot PM, \text{ 即 } 3(m-3) = 6 \cdot \left(\frac{1}{4}m^2 - \frac{11}{4}m + 6 \right),$$

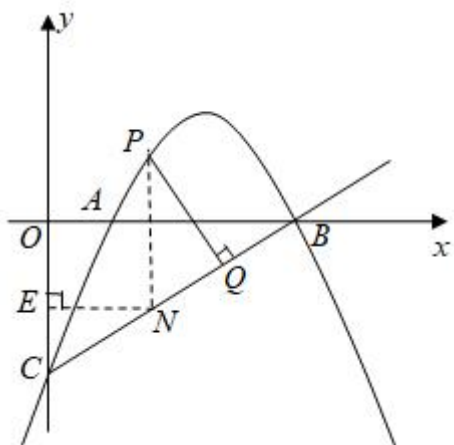
$$\therefore m_1 = 3 \text{ (舍)}, m_2 = 10,$$

$$\therefore m = 10,$$

$$\therefore \text{点 } P\left(10, -\frac{7}{2}\right).$$

【小问 3 详解】

解: 如图, 作 $PN \perp x$ 轴交 BC 于点 N , 过点 N 作 $NE \perp y$ 轴于点 E ,



$$\therefore P\left(m, -\frac{1}{4}m^2 + \frac{11}{4}m - 6\right),$$

$$\therefore \text{点 } N\left(m, \frac{3}{4}m - 6\right),$$

$$\therefore PN = -\frac{1}{4}m^2 + \frac{11}{4}m - 6 - \left(\frac{3}{4}m - 6\right) = -\frac{1}{4}m^2 + 2m,$$

$$\therefore PN \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore PN \parallel y \text{ 轴},$$

$$\therefore \angle PNQ = \angle OCB,$$

$$\therefore \angle PQN = \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle PQN \sim \triangle BOC,$$

$$\therefore \frac{PN}{BC} = \frac{NQ}{OC} = \frac{PQ}{OB},$$

$$\therefore OB = 8, \quad OC = 6,$$

$$\therefore BC = 10,$$

$$\therefore NQ = \frac{3}{5}PN, \quad PQ = \frac{4}{5}PN,$$

$$\therefore EN \perp y \text{ 轴},$$

$$\therefore EN \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore \triangle CNE \sim \triangle CBO,$$

$$\therefore \frac{CN}{BC} = \frac{EN}{OB}, \quad \text{即} \quad \frac{CN}{10} = \frac{m}{8}$$

$$\therefore CN = \frac{5}{4}m,$$

$$\therefore CQ + \frac{1}{2}PQ = CN + NQ + \frac{1}{2}PQ = CN + \frac{3}{5}PN + \frac{1}{2} \times \frac{4}{5}PN = CN + PN,$$

$$\therefore CQ + \frac{1}{2}PQ = \frac{5}{4}m - \frac{1}{4}m^2 + 2m = -\frac{1}{4}m^2 + \frac{13}{4}m = -\frac{1}{4}\left(m - \frac{13}{2}\right)^2 + \frac{169}{16},$$

$$\therefore \text{当 } m = \frac{13}{2} \text{ 时, } CQ + \frac{1}{2}PQ \text{ 的最大值是 } \frac{169}{16}.$$

【点睛】 本题主要考查了二次函数的综合题，熟练掌握二次函数的图象和性质，相似三角形的判定和性质，利用数形结合思想解答是解题的关键，是中考的压轴题.

