

2022 年四川省攀枝花市中考数学试卷

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. 实数 2 的平方根为 ()

A. 2

B. ± 2

C. $\sqrt{2}$

D. $\pm\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用平方根的定义求解即可.

【详解】 $\because 2$ 的平方根是 $\pm\sqrt{2}$.

故选 D.

【点睛】此题主要考查了平方根的定义，注意一个正数的平方根有 2 个，它们互为相反数.

2. 下列各式不是单项式的为 ()

A. 3

B. a

C. $\frac{b}{a}$

D. $\frac{1}{2}x^2y$

【答案】C

【解析】

【分析】数或字母的积组成的式子叫做单项式，根据单项式的定义进行判断即可.

【详解】解：A、3 是单项式，故本选项不符合题意；

B、 a 是单项式，故本选项不符合题意；

C、 $\frac{b}{a}$ 不是单项式，故本选项符合题意；

D、 $\frac{1}{2}x^2y$ 是单项式，故本选项不符合题意；

故选：C.

【点睛】此题考查了单项式，熟练掌握单项式的定义是解题的关键.

3. 下列计算正确的是 ()

A. $(a^2b)^2 = a^2b^2$

B. $a^6 \div a^2 = a^3$

C. $(3xy^2)^2 = 6x^2y^4$

D. $(-m)^7 \div (-m)^2 = -m^5$

【答案】D

【解析】

【详解】A. 积的乘方等于乘方的积，故 A 错误，不符合题意；

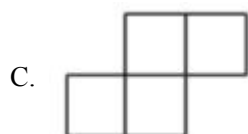
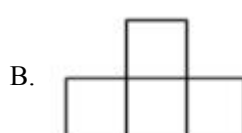
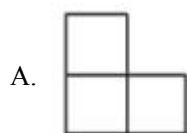
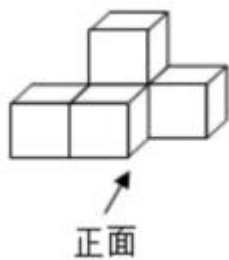
B. 同底数幂的除法底数不变指数相减，故 B 错误，不符合题意；

C. 积的乘方等于乘方的积，故 C 错误，不符合题意；

D. 同底数幂的除法底数不变指数相减, 故 D 正确, 符合题意;

故选 D.

4. 如图是由 5 个相同的正方体搭成的几何体, 这个几何体的俯视图是 ()



【答案】C

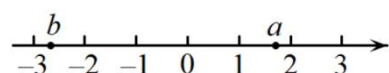
【解析】

【分析】由上面看到的平面图形是俯视图, 根据定义逐一分析即可.

【详解】解: 从上面看第一列是一个小正方形, 第二列是两个小正方形, 第三列居上是一个小正方形.
故选: C.

【点睛】本题考查的是三视图中的俯视图, 掌握“俯视图的含义”是解本题的关键.

5. 实数 a 、 b 在数轴上的对应点位置如图所示, 下列结论中正确的是 ()



A. $b > -2$

B. $|b| > a$

C. $a + b > 0$

D. $a - b < 0$

【答案】B

【解析】

【分析】利用数轴可知 a 、 b 的大小和绝对值, 然后判断即可.

【详解】解: 由数轴知, $1 < a < 2$, $-3 < b < -2$, $\therefore$ A 错误,
 $|b| > a$, 即 B 正确,
 $a + b < 0$, 即 C 错误,
 $a - b > 0$, 即 D 错误.

故选: B.

【点睛】 本题考查了数轴, 绝对值, 实数加减法, 实数的大小比较, 解题的关键是综合应用以上知识解题.

6. 若点 $A(-a, b)$ 在第一象限, 则点 $B(a, b)$ 在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据点 $A(-a, b)$ 在第一象限, 得到 $-a > 0$, $b > 0$, 即可得到点 B 所在的象限.

【详解】 解: $\because$ 点 $A(-a, b)$ 在第一象限内,

$$\therefore -a > 0, \quad b > 0,$$

$$\therefore a < 0,$$

$\therefore$ 点 $B(a, b)$ 所在的象限是: 第二象限.

故选: B.

【点睛】 此题考查了已知点所在是象限求参数, 根据点坐标判断点所在的象限, 正确理解点的坐标与点所在象限的关系是解题的关键.

7. 若关于 x 的方程 $x^2 - x - m = 0$ 有实数根, 则实数 m 的取值的范围是 ()

- A. $m < \frac{1}{4}$ B. $m \leq \frac{1}{4}$ C. $m \geq -\frac{1}{4}$ D. $m > -\frac{1}{4}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据一元二次方程有实数根 $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$, 列不等式求解即可.

【详解】 解析: $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - x - m = 0$ 有实数根,

$$\therefore \Delta = (-1)^2 - 4(-m) = 1 + 4m \geq 0,$$

$$\text{解得 } m \geq -\frac{1}{4},$$

故选 C.

【点睛】 此题考查了一元二次方程根的判别式, 熟练掌握一元二次方程根的个数与判别式之间的关系是解答此题的关键.

8. 为深入落实“立德树人”的根本任务, 坚持德、智、体、美、劳全面发展, 某学校积极推进学生综合素质评价改革, 某同学在本学期德智体美劳的评价得分如图所示, 则该同学五项评价得分的众数, 中位数, 平均数分别为 ()



- A. 8, 8, 8 B. 7, 7, 7.8 C. 8, 8, 8.6 D. 8, 8, 8.4

【答案】 D

【解析】

【分析】 先从图中读取该同学五项评价得分，再根据众数、中位数、平均数的定义，依次计算即可.

【详解】 解：该同学五项评价得分分别为 7, 8, 8, 9, 10,

出现次数最多的数是 8, 所以众数为 8,

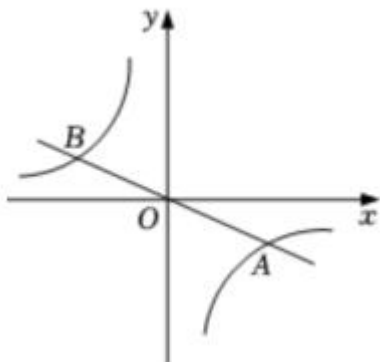
这组数据从小到大排列后，位于中间位置的数是 8, 所以中位数是 8,

平均数为 $\frac{7+8+8+9+10}{5} = 8.4$,

故选：D.

【点睛】 本题考查了众数、中位数、平均数的定义，注意在求一组数据的中位数时，应先将这组数按从小到大或从大到小的关系排序，再求出这组数的中位数.

9. 如图，正比例函数 $y = k_1x$ 与反比例函数 $y = \frac{k_2}{x}$ 的图像交于 $A(1, m)$ 、 B 两点，当 $k_1x \leq \frac{k_2}{x}$ 时， x 的取值范围是 ()



- A. $-1 \leq x < 0$ 或 $x \geq 1$ B. $x \leq -1$ 或 $0 < x \leq 1$
C. $x \leq -1$ 或 $x \geq 1$ D. $-1 \leq x < 0$ 或 $0 < x \leq 1$

【答案】 A

【解析】

【分析】先根据反比例函数图像的对称点求出点 B 的坐标，然后根据 $k_1x \leq \frac{k_2}{x}$ 的解集即为反比例函数在一次函数上方的部分可得答案.

【详解】解析：∵ 正比例函数 $y = k_1x$ 与反比例函数 $y = \frac{k_2}{x}$ 的图像交于 $A(1, m)$ 、 B 两点，
 $\therefore B(-1, -m)$,

由图像可知，当 $k_1x \leq \frac{k_2}{x}$ 时， x 的取值范围是 $-1 \leq x < 0$ 或 $x \geq 1$,

故选：A.

【点睛】本题考查了一次函数与反比例函数的交点问题，根据反比例函数的对称性得出点 B 的坐标的坐标是解本题的关键.

10. 如图 1 是第七届国际数学教育大会 (ICME) 的会徽，在其主体图案中选择两个相邻的直角三角形，恰好能够组合得到如图 2 所示的四边形 $OABC$. 若 $OC = \sqrt{5}$, $BC = 1$, $\angle AOB = 30^\circ$, 则 OA 的值为 ()

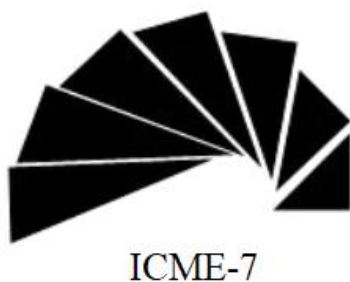


图1

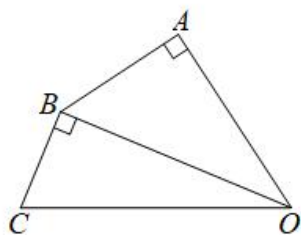


图2

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 1

【答案】A

【解析】

【分析】根据勾股定理和含 30° 角的直角三角形的性质即可得到结论.

【详解】解：∵ $\angle OBC = 90^\circ$, $OC = \sqrt{5}$, $BC = 1$,

$$\therefore OB = \sqrt{OC^2 - BC^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2$$

∵ $\angle A = 90^\circ$, $\angle AOB = 30^\circ$,

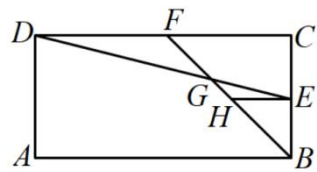
$$\therefore AB = \frac{1}{2}OB = 1,$$

$$\therefore OA = \sqrt{OB^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

故选: A.

【点睛】本题主要考查了勾股定理, 含 30° 角的直角三角形的性质等知识, 熟练掌握直角三角形的性质是解题的关键.

11. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=6$, $AD=4$, 点 E 、 F 分别为 BC 、 CD 的中点, BF 、 DE 相交于点 G , 过点 E 作 $EH \parallel CD$, 交 BF 于点 H , 则线段 GH 的长度是 ()



A. $\frac{5}{6}$

B. 1

C. $\frac{5}{4}$

D. $\frac{5}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据矩形的性质得出 $DC=AB=6$, $BC=AD=4$, $\angle C=90^\circ$, 求出 $DF=CF=\frac{1}{2}DC=3$, $CE=BE=\frac{1}{2}BC=2$, 求出 $FH=BH$, 根据勾股定理求出 BF , 求出 $FH=BH=\frac{5}{2}$, 根据三角形的中位线求出 EH , 根据相似三角形的判定得出 $\triangle EHG \sim \triangle DFG$, 根据相似三角形的性质得出 $\frac{EH}{DF} = \frac{GH}{FG}$, 再求出答案即可.

【详解】解析: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $AB=6$, $AD=4$,
 $\therefore DC=AB=6$, $BC=AD=4$, $\angle C=90^\circ$,
 $\because$ 点 E 、 F 分别为 BC 、 CD 的中点,

$$\therefore DF=CF=\frac{1}{2}DC=3, \quad CE=BE=\frac{1}{2}BC=2,$$

$$\because EH \parallel CD,$$

$$\therefore FH=BH,$$

$$\because BE=CE,$$

$$\therefore EH=\frac{1}{2}CF=\frac{3}{2}.$$

$$\text{由勾股定理得: } BF=\sqrt{BC^2+CF^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5,$$

$$\therefore BH=FH=\frac{1}{2}BF=\frac{5}{2},$$

$$\because EH \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle EHG \sim \triangle DFG,$$

$$\therefore \frac{EH}{DF} = \frac{GH}{FG},$$

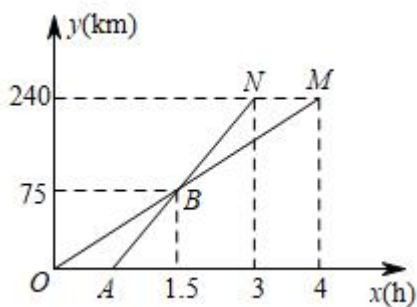
$$\therefore \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{GH}{\frac{5}{2} - GH},$$

$$\text{解得: } GH = \frac{5}{3},$$

故选: D.

【点睛】本题考查了矩形的性质和相似三角形的性质和判定, 能熟记矩形的性质是解此题的关键.

12. 中国人逢山开路, 遇水架桥, 靠自己勤劳的双手创造了世界奇迹. 雅西高速是连接雅安和西昌的高速公路, 被国内外专家学者公认为全世界自然环境最恶劣、工程难度最大、科技含量最高的山区高速公路之一, 全长 240km. 一辆货车和一辆轿车先后从西昌出发驶向雅安, 如图, 线段 OM 表示货车离西昌距离 $y_1(\text{km})$ 与时间 $x(\text{h})$ 之间的函数关系: 折线 $OABN$ 表示轿车离西昌距离 $y_2(\text{km})$ 与时间 $x(\text{h})$ 之间的函数关系, 则以下结论错误的是 ()



- A. 货车出发 1.8 小时后与轿车相遇
- B. 货车从西昌到雅安的速度为 60km/h
- C. 轿车从西昌到雅安的速度为 110km/h
- D. 轿车到雅安 20 分钟后, 货车离雅安还有 60km

【答案】D

【解析】

【分析】结合函数图象, 根据时间、速度、路程之间的关系逐项判断, 即可得出答案.

【详解】解: 由题意可知,

货车从西昌到雅安的速度为: $240 \div 4 = 60(\text{km/h})$, 故选项 B 不合题意;

轿车从西昌到雅安的速度为: $(240 - 75) \div (3 - 1.5) = 110(\text{km/h})$, 故选项 C 不合题意;

轿车从西昌到雅安所用时间为: $240 \div 110 = 2\frac{2}{11}$ (小时),

$3 - 2\frac{2}{11} = \frac{9}{11}$ (小时), 即 A 点表示 $\frac{9}{11}\text{h}$,

设货车出发 x 小时后与轿车相遇, 根据题意得:

$$60x = 110\left(x - \frac{9}{11}\right), \text{ 解得 } x = 1.8,$$

$\therefore$ 货车出发 1.8 小时后与轿车相遇, 故选项 A 不合题意;

轿车到雅安 20 分钟后, 货车离雅安的距离为: $60 \times \frac{60 - 20}{60} = 40(\text{km})$, 故选项 D 错误, 符合题意.

故选 D.

【点睛】 本题考查一次函数的实际应用, 解题的关键是理解题意, 能够从函数图象中获取相关信息.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $\sqrt[3]{-8} - (-1)^0 = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 -3

【解析】

【分析】 根据立方根的定义, 零指数次幂的定义以及有理数减法法则, 进行计算即可.

【详解】 解: 原式 $= -2 - 1 = -3$.

故答案为: -3.

【点睛】 本题考查了立方根的定义, 零指数次幂的定义以及有理数减法法则, 正确进行计算是解题的关键.

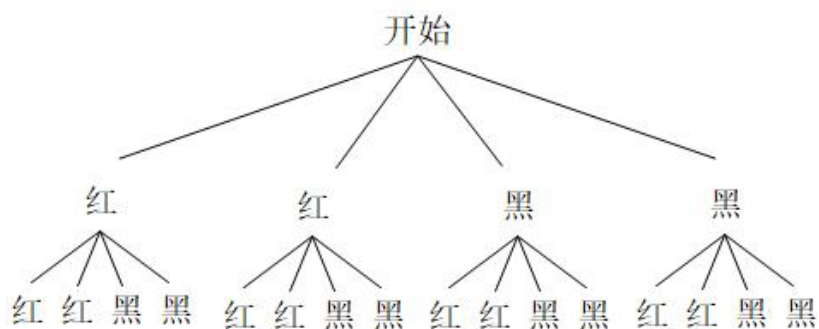
14. 盒子里装有除颜色外, 没有其他区别的 2 个红球和 2 个黑球, 搅匀后从中取出 1 个球, 放回搅匀再取出第 2 个球, 则两次取出的球是 1 红 1 黑的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 先画树状图, 再利用概率公式计算求解即可.

【详解】 解: 画树状图如下:



共有 16 种等可能的结果，其中两次取出的球是 1 红 1 黑的结果有 8 种，

$\therefore$ 两次取出的球是 1 红 1 黑的概率为 $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点睛】此题考查了用树状图法求概率，熟练掌握树状图法以及概率公式是解答此题的关键.

15. 如果一元一次方程的解是一元一次不等式组的解，则称该一元一次方程为该一元一次不等式组的关联方程.

若方程 $\frac{1}{3}x - 1 = 0$ 是关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x - 2 \leq n \\ 2n - 2x < 0 \end{cases}$ 的关联方程，则 n 的取值范围是 _____.

【答案】 $1 \leq n < 3$

【解析】

【分析】解一元一次方程得出方程的解 $x = 3$ ，代入不等式组可得答案.

【详解】解：解方程 $\frac{1}{3}x - 1 = 0$ 得 $x = 3$,

$\therefore x = 3$ 为不等式组 $\begin{cases} x - 2 \leq n \\ 2n - 2x < 0 \end{cases}$ 的解，

$\therefore \begin{cases} 1 \leq n \\ 2n - 6 \leq 0 \end{cases}$ ，解得 $1 \leq n < 3$ ，

即 n 的取值范围为: $1 \leq n < 3$ ，

故答案为: $1 \leq n < 3$.

【点睛】本题主要考查解一元一次不等式组和一元一次方程，解题的关键是理解并掌握“关联方程”的定义和解一元一次不等式组、一元一次方程的能力.

16. 如图，以 $\triangle ABC$ 的三边为边在 BC 上方分别作等边 $\triangle ACD$ 、 $\triangle ABE$ 、 $\triangle BCF$ ，且点 A 在 $\triangle BCF$ 内部，给出以下结论：

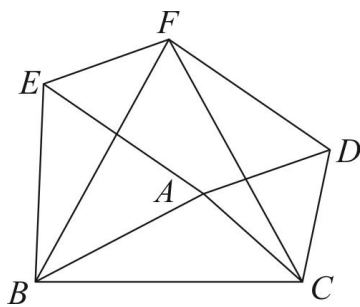
①四边形 $ADFE$ 是平行四边形；

②当 $\angle BAC = 150^\circ$ 时，四边形 $ADFE$ 是矩形；

③当 $AB = AC$ 时，四边形 $ADFE$ 是菱形；

④当 $AB = AC$ ，且 $\angle BAC = 150^\circ$ 时，四边形 $ADFE$ 是正方形.

其中正确结论有_____ (填上所有正确结论的序号).



【答案】①②③④

【解析】

【分析】对于结论①，由等边三角形的性质可得， $\triangle EFB \cong \triangle ACB$ (SAS)，则 $EF = AC = AD$ ；同理，由 $\triangle CDF \cong \triangle CAB$ ，得 $DF = AB = AE$ ，由 $AE = DF$ ， $AD = EF$ 即可得出四边形 $ADFE$ 是平行四边形；对于结论②，当 $\angle BAC = 150^\circ$ 时， $\angle EAD = 360^\circ - \angle BAE - \angle BAC - \angle CAD = 90^\circ$ ，结合结论①，可知结论②正确；对于结论③，当 $AB = AC$ 时， $AE = AD$ ，结合结论①，可知结论③正确；对于结论④，综合②③的结论知：当 $AB = AC$ ，且 $\angle BAC = 150^\circ$ 时，四边形 $AEFD$ 既是菱形，又是矩形，故结论④正确.

【详解】解析：① $\because \triangle ABE$ 、 $\triangle ACF$ 是等边三角形，

$$\therefore BE = AB, BF = CB, \angle EBA = \angle FBC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EBF = \angle ABC = 60^\circ - \angle ABF,$$

$$\therefore \triangle EFB \cong \triangle ACB(\text{SAS}),$$

$$\therefore EF = AC = AD,$$

同理由 $\triangle CDF \cong \triangle CAB$ ，得 $DF = AB = AE$ ，

由 $AE = DF$ ， $AD = EF$ 即可得出四边形 $ADFE$ 是平行四边形，故结论①正确；

②当 $\angle BAC = 150^\circ$ 时，

$$\angle EAD = 360^\circ - \angle BAE - \angle BAC - \angle CAD = 360^\circ - 60^\circ - 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ,$$

由①知四边形 $AEFD$ 是平行四边形，

$\therefore$ 平行四边形 $ADFE$ 是矩形，故结论②正确；

③由①知 $AB = AE$ ， $AC = AD$ ，四边形 $AEFD$ 是平行四边形，

$\therefore$ 当 $AB = AC$ 时， $AE = AD$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $AEFD$ 是菱形，故结论③正确；

④综合②③的结论知：当 $AB = AC$ ，且 $\angle BAC = 150^\circ$ 时，四边形 $AEFD$ 既是菱形，又是矩形，

∴ 四边形 $AEFD$ 是正方形, 故结论④正确.

故答案为: ①②③④.

【点睛】 本题主要考查了平行四边形、菱形、矩形、正方形的判定方法, 熟练掌握以上图形的判定方法是解题的关键.

三、解答题: 本大题共 8 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解不等式: $\frac{1}{2}(x-3) < \frac{1}{3} - 2x$.

【答案】 $x < \frac{11}{15}$

【解析】

【分析】 按照去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为 1 的步骤解答即可.

【详解】 解: $\frac{1}{2}(x-3) < \frac{1}{3} - 2x$

去分母, 得 $3(x-3) < 2-12x$,

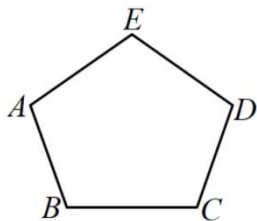
去括号, 得 $3x-9 < 2-12x$,

移项、合并同类项, 得 $15x < 11$.

化系数为 1, 得 $x < \frac{11}{15}$.

【点睛】 此题考查了一元一次不等式, 熟练掌握一元一次不等式的解法是解题的关键.

18. 同学们在探索“多边形的内角和”时, 利用了“三角形的内角和”. 请你在不直接运用结论“ n 边形的内角和为 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ” 计算的条件下, 利用“一个三角形的内角和等于 180° ”, 结合图形说明: 五边形 $ABCDE$ 的内角和为 540° .



【答案】 答案见解析

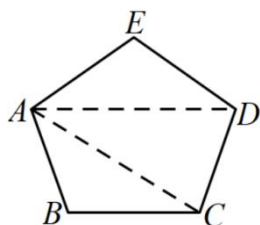
【解析】

【分析】 如下图, 连接 AD , AC , 将五边形分成三个三角形, 然后利用三角形的内角和定理求解即可.

【详解】 解: 连接 AD , AC ,

∴ 五边形 $ABCDE$ 的内角和等于 $\triangle AED$, $\triangle ADC$, $\triangle ABC$ 的内角和的和,

∴ 五边形 $ABCDE$ 的内角和 $= 180^\circ \times 3 = 540^\circ$.



【点睛】此题考查了三角形的内角和定理，熟练运用三角形内角和定理，并将五边形转化为三个三角形是解答此题的关键.

19. 为提高学生阅读兴趣，培养良好阅读习惯，2021年3月31日，教育部印发了《中小学生课外读物进校园管理办法》的通知. 某学校根据通知精神，积极优化校园阅读环境，推动书香校园建设，开展了“爱读书、读好书、善读书”主题活动，随机抽取部分学生同时进行“你最喜欢的课外读物”（只能选一项）和“你每周课外阅读的时间”两项问卷调查，并绘制成如图1，图2的统计图. 图1中A代表“喜欢人文类”的人数，B代表“喜欢社会类”的人数，C代表“喜欢科学类”的人数，D代表“喜欢艺术类”的人数. 已知A为56人，且对应扇形圆心角的度数为 126° . 请你根据以上信息解答下列问题:

你最喜欢的课外读物

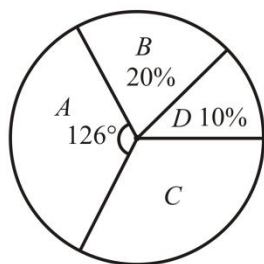


图1

你每周课外阅读的时间

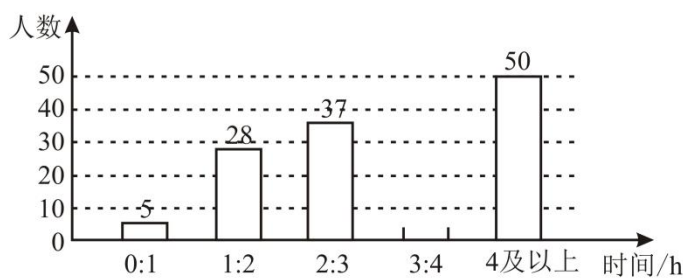


图2 (n:m 表示大于等于n且小于m)

- (1) 在扇形统计图中，求出“喜欢科学类”的人数；
- (2) 补全条形统计图；
- (3) 该校共有学生 3200 人，估计每周课外阅读时间不低于 3 小时的人数.

【答案】(1) 56 人 (2) 见解析

(3) 1800 人

【解析】

【分析】(1) 根据 A 的人数和所占的百分比，求出调查的总人数，再乘以“喜欢科学类”的人数所占的百分比即可；

(2) 先求出每周课外阅读 3: 4 小时的人数，再补全统计图即可；

(3) 用总人数乘以每周课外阅读时间不低于 3 小时的人数所占的百分比即可.

【小问 1 详解】

解: 调查的总人数有: $56 \div \frac{126^\circ}{360^\circ} = 160$ (人),

则“喜欢科学类”的人数有: $160 \times \left(1 - \frac{126^\circ}{360^\circ} - 20\% - 10\%\right) = 56$ (人);

【小问 2 详解】

每周课外阅读 3: 4 小时的人数有: $160 - (5 + 28 + 37 + 50) = 40$ (人),

补全统计图如下:

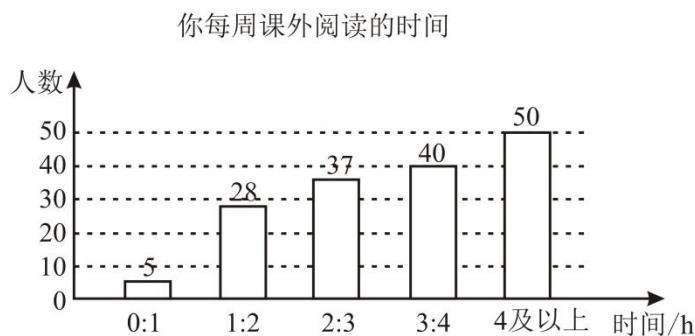


图2 (n:m 表示大于等于n且小于m)

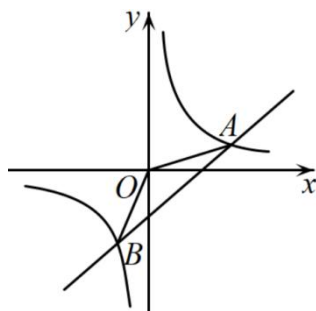
【小问 3 详解】

根据题意得: $3200 \times \frac{40+50}{160} = 1800$ (人),

答: 估计每周课外阅读时间不低于 3 小时的人数有 1800 人.

【点睛】 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用. 读懂统计图, 从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键.

20. 如图, 一次函数 $y = x - 2$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象交于 A 、 B 两点, 求 $\triangle OAB$ 的面积.



【答案】 4

【解析】

【分析】 解析式联立成方程组, 解方程组即可得到 A 、 B 两点的坐标, 由一次函数解析式求得直线与 y 轴的交点 C , 然后根据 $S_{\triangle OAB} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC}$ 求得即可.

【详解】解：解方程组 $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = \frac{3}{x} \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$,

所以 A 点坐标为 $(3, 1)$, B 点坐标为 $(-1, -3)$,

设一次函数 $y = x - 2$ 的图象交 y 轴与点 C , 则 $C(0, -2)$,

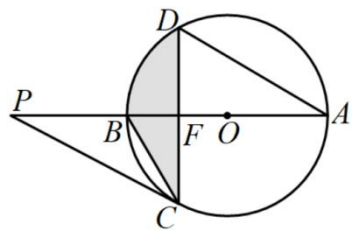
$\therefore OC = 2$,

$\therefore S_{\triangle OAB} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 4$.

故 $\triangle OAB$ 的面积为 4.

【点睛】本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题：求反比例函数与一次函数的交点坐标，把两个函数关系式联立成方程组求解，若方程组有解则两者有交点，若方程组无解则两者无交点.

21. 如图, $\odot O$ 的直径 AB 垂直于弦 DC 于点 F , 点 P 在 AB 的延长线上, CP 与 $\odot O$ 相切于点 C .



(1) 求证: $\angle PCB = \angle PAD$;

(2) 若 $\odot O$ 的直径为 4, 弦 DC 平分半径 OB , 求: 图中阴影部分的面积.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{2}{3}\pi$

【解析】

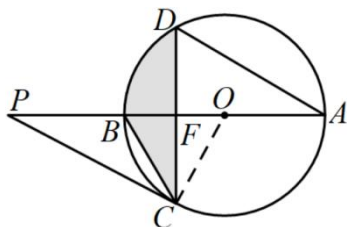
【分析】(1) 首先可证得 $\angle OBC = \angle OCB$, 由圆周角定理得: $\angle ADF = \angle OBC$, 可得 $\angle OCB = \angle ADF$, 再根据切线的性质, 可得 $\angle PCB + \angle OCB = 90^\circ$, 根据垂直的定义可得 $\angle PAD + \angle ADF = 90^\circ$, 据此即可证得;

(2) 首先由弦 DC 平分半径 OB , $OB = OC$, 可得 $OF = \frac{1}{2}OD$, $\angle ODF = 30^\circ$, $\angle DOF = 60^\circ$, 再根据

$\because AB \perp DC$, 可得 $DF = FC$, 即可证得 $S_{\triangle CFB} = S_{\triangle CFO} = S_{\triangle DFO}$, 最后由 $S_{\text{阴影部分}} = S_{\text{扇形BOD}}$ 即可求得.

【小问 1 详解】

证明: 如图, 连接 OC ,



$$\because OB = OC,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB,$$

由圆周角定理得: $\angle ADF = \angle OBC$,

$$\therefore \angle OCB = \angle ADF,$$

$\because CP$ 与 $\odot O$ 相切,

$$\therefore OC \perp PC,$$

$$\therefore \angle PCB + \angle OCB = 90^\circ,$$

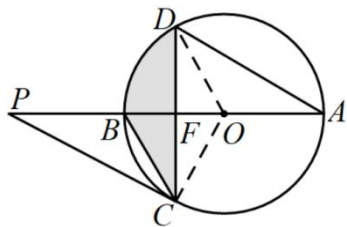
$\because AB \perp DC$,

$$\therefore \angle PAD + \angle ADF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PCB = \angle PAD;$$

【小问 2 详解】

解: 如图: 连接 OD ,



$\because$ 弦 DC 平分半径 OB , $OB = OC$,

$$\therefore BF = OF, \text{ 在 Rt}\triangle ODF \text{ 中, } OF = \frac{1}{2}OD,$$

$$\therefore \angle ODF = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DOF = 60^\circ,$$

$\because AB \perp DC$,

$$\therefore DF = FC,$$

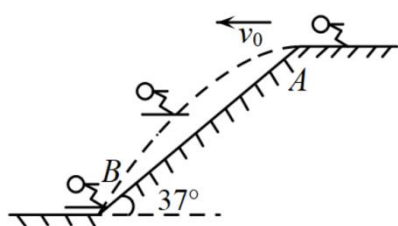
$$\because BF = OF, \quad AB \perp DC,$$

$$\therefore S_{\triangle CFB} = S_{\triangle CFO} = S_{\triangle DFO},$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = S_{\text{扇形}BOD} = \frac{60\pi \times 2^2}{360} = \frac{2}{3}\pi.$$

【点睛】 本题考查了垂径定理，圆周角定理，直角三角形的性质，扇形的面积公式，作出辅助线是解决本题的关键.

22. 第 24 届冬奥会（也称 2022 年北京冬奥会）于 2022 年 2 月 4 日至 2 月 20 日在中国北京举行，北京成为了历史上第一座既举办过夏奥运会又举办过冬奥会的城市. 冬奥会上跳台滑雪是一项极为壮观的运动. 运动员经过助滑、起跳、空中飞行和着陆，整个动作连贯一致，一气呵成，如图，某运动员穿着滑雪板，经过助滑后，从倾斜角 $\theta = 37^\circ$ 的跳台 A 点以速度 v_0 沿水平方向跳出，若忽略空气阻力影响，水平方向速度将保持不变. 同时，由于受重力作用，运动员沿竖直方向会加速下落，因此，运动员在空中飞行的路线是抛物线的一部分，已知该运动员在 B 点着陆， $AB = 150\text{m}$ ，且 $\sin 37^\circ = 0.6$. 忽略空气阻力，请回答下列问题：



- (1) 求该运动员从跳出到着陆垂直下降了多少 m？
- (2) 以 A 为坐标原点建立直角坐标系，求该抛物线表达式；
- (3) 若该运动员在空中共飞行了 4s ，求他飞行 2s 后，垂直下降了多少 m？

【答案】 (1) 该运动员从跳出到着陆垂直下降了 90m

(2) $y = -\frac{1}{160}x^2$

(3) 他飞行 2s 后，垂直下降了 22.5m

【解析】

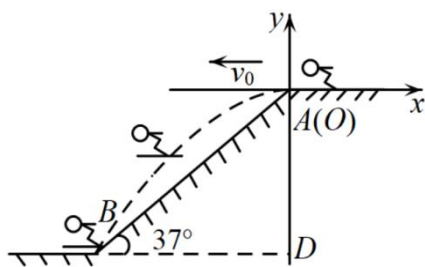
【分析】 (1) 以 A 为原点，建立平面直角坐标系. 过点 B 作 $BD \perp y$ 轴于点 D . 在 $\text{Rt}\triangle OBD$ 中，利用 $\sin 37^\circ$ 求出 OD 即可；

(2) 利用勾股定理求出 BD ，得到点 B 坐标，即可求出抛物线的解析式；

(3) 将 $x = -60$ 代入 (2) 的解析式求出 y 值即可.

【小问 1 详解】

解：如图，以 A 为原点，建立平面直角坐标系.



过点 B 作 $BD \perp y$ 轴于点 D .

在 $\text{Rt}\triangle OBD$ 中, $OD = AB \cdot \sin 37^\circ = 150 \times 0.6 = 90(\text{m})$,

答: 该运动员从跳出到着陆垂直下降了 90m ;

【小问 2 详解】

解: 在 $\text{Rt}\triangle OBD$ 中, $BD = \sqrt{AB^2 - OD^2} = \sqrt{150^2 - 90^2} = 120(\text{m})$,

$\therefore B(-120, -90)$,

由题意抛物线顶点为 $(0, 0)$, 经过 $(-120, -90)$.

设抛物线的解析式为 $y = ax^2$,

则有 $-90 = a \times (-120)^2$,

$$\therefore a = -\frac{1}{160},$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{160}x^2$.

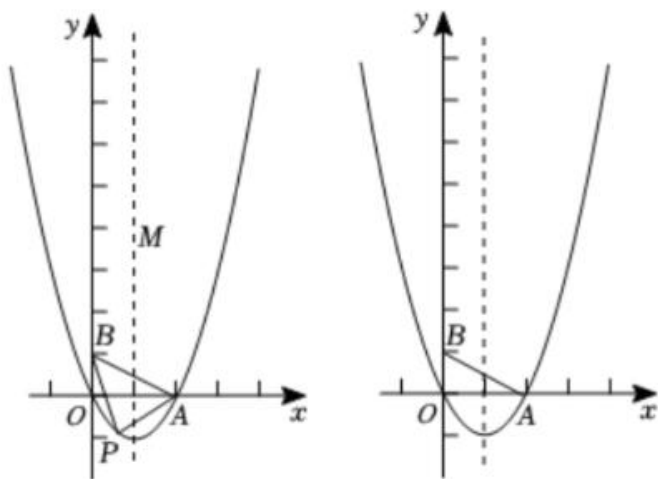
【小问 3 详解】

解: 当 $x = -60$ 时, $y = -22.5$,

$\therefore$ 他飞行 2s 后, 垂直下降了 22.5m .

【点睛】此题考查了抛物线的实际应用, 待定系数法求抛物线的解析式, 锐角三角函数的应用, 已知自变量求函数值, 正确理解题意得到对应的数量关系是解题的关键.

23. 如图, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 O (O 为坐标原点), A 两点, 且二次函数的最小值为 -1 , 点 $M(1, m)$ 是其对称轴上一点, y 轴上一点 $B(0, 1)$.



- (1) 求二次函数的表达式;
- (2) 二次函数在第四象限的图象上有一点 P , 连结 PA , PB , 设点 P 的横坐标为 t , $\triangle PAB$ 的面积为 S , 求 S 与 t 的函数关系式;
- (3) 在二次函数图象上是否存在点 N , 使得以 A 、 B 、 M 、 N 为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 直接写出所有符合条件的点 N 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $y = x^2 - 2x$

(2) $S = -t^2 + \frac{3}{2}t + 1$

(3) 存在, $N(1, -1)$ 或 $(3, 3)$ 或 $(-1, 3)$

【解析】

【分析】(1) 由二次函数的最小值为 -1 , 点 $M(1, m)$ 是其对称轴上一点, 得二次函数顶点为 $(1, -1)$, 设顶点式 $y = a(x-1)^2 - 1$, 将点 $O(0, 0)$ 代入即可求出函数解析式;

(2) 连接 OP , 根据 $S = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle OAP} - S_{\triangle OBP}$ 求出 S 与 t 的函数关系式;

(3) 设 $N(n, n^2 - 2n)$, 分三种情况: 当 AB 为对角线时, 当 AM 为对角线时, 当 AN 为对角线时, 由中点坐标公式求出 n 即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 二次函数的最小值为 -1 , 点 $M(1, m)$ 是其对称轴上一点,

$\therefore$ 二次函数顶点为 $(1, -1)$,

设二次函数解析式为 $y = a(x-1)^2 - 1$,

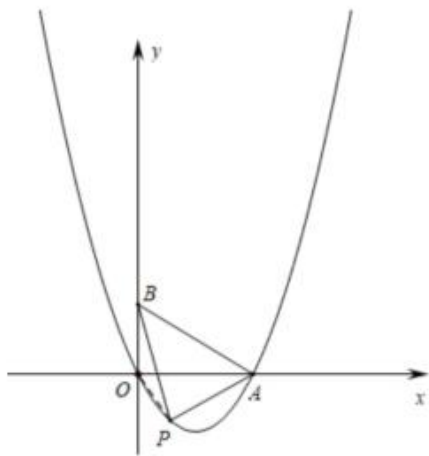
将点 $O(0, 0)$ 代入得, $a - 1 = 0$,

$\therefore a = 1$,

$$\therefore y = (x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x;$$

【小问 2 详解】

如图，连接 OP ，



当 $y = 0$ 时， $x^2 - 2x = 0$ ，

$\therefore x = 0$ 或 2 ， $\therefore A(2, 0)$ ，

$\because$ 点 P 在抛物线 $y = x^2 - 2x$ 上，

$\therefore$ 点 P 的纵坐标为 $t^2 - 2t$ ，

$$\therefore S = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle OAP} - S_{\triangle OBP}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \left(-t^2 + 2t \right) - \frac{1}{2} t$$

$$= -t^2 + \frac{3}{2}t + 1;$$

【小问 3 详解】

设 $N(n, n^2 - 2n)$ ，

当 AB 为对角线时，由中点坐标公式得， $2 + 0 = 1 + n$ ， $\therefore n = 1$ ， $\therefore N(1, -1)$ ，

当 AM 为对角线时，由中点坐标公式得， $2 + 1 = n + 0$ ， $\therefore n = 3$ ， $\therefore N(3, 3)$ ，

当 AN 为对角线时，由中点坐标公式得， $2 + n = 0 + 1$ ， $\therefore n = -1$ ， $\therefore N(-1, 3)$ ，

综上： $N(1, -1)$ 或 $(3, 3)$ 或 $(-1, 3)$ 。

【点睛】此题考查了待定系数法求抛物线的解析式，抛物线与图形面积，平行四边形的性质，熟练掌握待

定系数法及平行四边形性质是解题的关键.

24. 如图, 直线 $y = \frac{3}{4}x + 6$ 分别与 x 轴、 y 轴交于点 A 、 B , 点 C 为线段 AB 上一动点 (不与 A 、 B 重合), 以 C 为顶点作 $\angle OCD = \angle OAB$, 射线 CD 交线段 OB 于点 D , 将射线 OC 绕点 O 顺时针旋转 90° 交射线 CD 于点 E , 连接 BE .

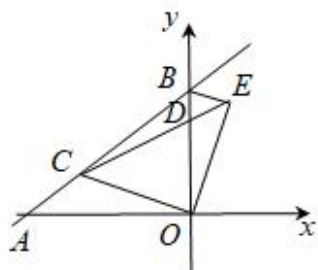


图1

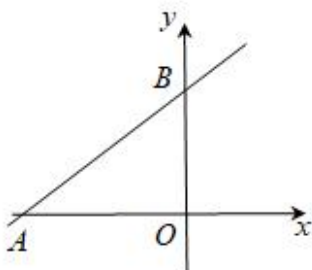


图2

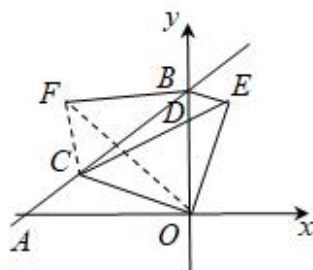


图3

- (1) 证明: $\frac{CD}{DB} = \frac{OD}{DE}$; (用图 1)

- (2) 当 $\triangle BDE$ 为直角三角形时, 求 DE 的长度; (用图 2)

- (3) 点 A 关于射线 OC 的对称点为 F , 求 BF 的最小值. (用图 3)

【答案】(1) 见解析 (2) $DE = \frac{9}{4}$

- (3) 2

【解析】

【分析】(1) 由条件可证得 $\triangle BDC \sim \triangle EDO$, 根据相似三角形对应边成比例得 $\frac{CD}{OD} = \frac{DB}{DE}$, 即 $\frac{CD}{DB} = \frac{OD}{DE}$;

(2) 先根据函数关系式求出 AO 、 BO 的长度, 然后作出对应的图 2, 可证明 $\tan \angle OCD = \tan \angle OAB$, 从而得到 $\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{CD} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, 设 $OD = 3m$, $CD = 4m$, 结合 $\triangle CDB \sim \triangle AOB$ 对应边成比例, 得到 $BD = 3m$, 则 $OB = BD + OD = 3m + 3m = 6$, 解方程得到 $m = 1$, 所以 $OD = BD = 3$, $CD = 4$, 再由 (1) 的结论

$$\frac{CD}{DB} = \frac{OD}{DE}, \text{ 可计算出 } DE = \frac{9}{4}.$$

【小问 1 详解】

证明: 已知射线 OC 绕点 O 顺时针旋转 90° 交射线 CD 于点 E ,

$$\therefore \angle COE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle COE = 90^\circ,$$

$$\because \angle OCD = \angle OAB,$$

$$\angle ABO = 90^\circ - \angle OAB, \angle CEO = 90^\circ - \angle OCD$$

$$\therefore \angle ABO = \angle CEO,$$

又 $\because \angle BDC = \angle EDO$,

$$\therefore \triangle BDC \sim \triangle EDO,$$

$$\therefore \frac{CD}{OD} = \frac{DB}{DE}$$

$$\therefore \frac{CD}{DB} = \frac{OD}{DE};$$

【小问 2 详解】

解: 直线 $y = \frac{3}{4}x + 6$, 当 $x = 0$ 时, $y = 6$,

$$\therefore B(0, 6) ,$$

$$\therefore OB = 6,$$

当 $y=0$ 时, $\frac{3}{4}x+6=0$,

$$\therefore x = -8,$$

$$\therefore A(-8, 0),$$

$$\therefore OA = 8,$$

如图 2, $\angle BDE = 90^\circ$,

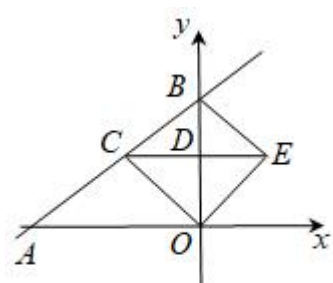


图2

$$\therefore \angle ODC = \angle BDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OCD = \angle OAB,$$

$$\therefore \tan \angle OCD = \tan \angle OAB,$$

$$\therefore \frac{OB}{OA} = \frac{OD}{CD} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$

$\therefore$ 设 $OD = 3m$, $CD = 4m$,

$$\therefore \angle CDB = \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore CD \parallel OA,$$

$$\therefore \triangle CDB \sim \triangle AOB,$$

$$\therefore \frac{CD}{OA} = \frac{BD}{OB}, \text{ 即 } \frac{4m}{8} = \frac{BD}{6},$$

$$\therefore BD = 3m,$$

$$\therefore OB = BD + OD = 3m + 3m = 6,$$

$$\therefore m = 1,$$

$$\therefore BD = 3, \quad CD = 4,$$

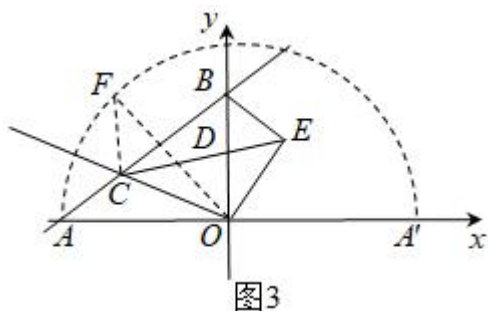
由 (1) 知: $\frac{CD}{DB} = \frac{OD}{DE}$,

$$\therefore \frac{4}{3} = \frac{3}{DE},$$

$$\therefore DE = \frac{9}{4}$$

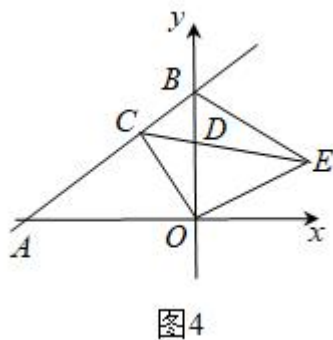
【小问 3 详解】

解: 如图 3, 由对称得: $OA=OF$,



则动点 F 在以 O 为圆心, 以 OA 为半径的半圆 $\widehat{AFA'}$ 上运动,

∴当 F 在 y 轴上, 此时在 B 的正上方, BF 的值最小, 如图 4,



此时 $BF = OF - OB = 8 - 6 = 2$, 即 BF 的最小值是 2.

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定与性质、直角三角形、一次函数与坐标轴交点问题、轴对称图形特征、圆的性质、动点中的最短距离问题，熟练掌握相似三角形的性质与判定，采用数形结合，利用相似比列方程求线段长是解题关键.

