

西宁市城区 2022 年初中学业水平暨高中招生考试

数学试卷

考生注意:

1. 本试卷满分 120 分, 考试时间 120 分钟.
2. 本试卷为试题卷, 不允许作为答题卷使用, 答题部分请在答题卡上作答, 否则无效.
3. 答题前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考点、考场、座位号写在答题卡上, 同时填写在试卷上.
4. 选择题用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑 (如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号). 非选择题用 0.5 毫米的黑色签字笔答在答题卡相应位置, 字体工整, 笔迹清楚. 作图必须用 2B 铅笔作答, 并请加黑加粗, 描写清楚.

第 I 卷 (选择题 共 24 分)

一、选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 在每小题给出的四个选项中, 恰有一项是符合题目要求的, 请将正确选项的序号填涂在答题卡上)

1. 下列各数是负数的是 ()

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $-(-5)$ D. $-\sqrt{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据小于 0 的数是负数即可得出答案.

【详解】解: $\because -(-5) = 5$,

$$\therefore -\sqrt{5} < 0 < \frac{1}{2} < -(-5),$$

$\therefore -\sqrt{5}$ 是负数,

故选: D.

【点睛】本题主要考查了负数的定义. 解题的关键是掌握负数的定义, 要注意 0 既不是正数, 也不是负数.

2. 若长度是 4, 6, a 的三条线段能组成一个三角形, 则 a 的值可以是 ()

- A. 2 B. 5 C. 10 D. 11

【答案】B

【解析】

【分析】根据三角形三边关系定理得出 $6-4 < a < 6+4$, 求出 a 的取值范围, 即可求解.

【详解】解: 由三角形三边关系定理得: $6-4 < a < 6+4$,

即 $2 < a < 10$,

即符合的整数 a 的值是 5,

故选: B.

【点睛】本题考查了三角形三边关系, 能根据三角形三边关系定理得出 $4-3 < a < 4+3$ 是解此题的关键, 注意: 三角形的两边之和大于第三边, 三角形的两边之差小于第三边.

3. 下列运算正确的是 ()

A. $a^2 + a^4 = a^6$ B. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ C. $(a^2b)^3 = a^6b^3$ D. $a^6 \div a^6 = a$

【答案】C

【解析】

【分析】由合并同类项可判断 A, 利用完全平方公式的应用可判断 B, 由积的乘方与幂的乘方运算可判断 C, 由同底数幂的除法运算可判断 D, 从而可得答案.

【详解】解: a^2, a^4 不是同类项, 故 A 不符合题意;

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, 故 B 不符合题意;

$(a^2b)^3 = a^6b^3$, 运算正确, 故 C 符合题意;

$a^6 \div a^6 = 1$, 故 D 不符合题意;

故选: C.

【点睛】本题考查的是合并同类项, 完全平方公式的应用, 积的乘方运算, 幂的乘方运算, 同底数幂的除法运算, 掌握以上基础运算是解本题的关键.

4. 关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + x - k = 0$ 没有实数根, 则 k 的取值范围是 ()

A. $k < -\frac{1}{8}$ B. $k \leq -\frac{1}{8}$ C. $k > -\frac{1}{8}$ D. $k \geq -\frac{1}{8}$

【答案】A

【解析】

【分析】由方程没有实数根结合根的判别式, 即可得出关于 k 的一元一次不等式, 解之即可得出结论.

【详解】解: $\because$ 一元二次方程 $2x^2 + x - k = 0$ 没有实数根,

$$\therefore \Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-k) < 0,$$

$$\text{解得 } k < -\frac{1}{8}.$$

故选: A.

【点睛】本题考查了根的判别式，注意记住一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系：(1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

5. 家务劳动是劳动教育的一个重要方面，教育部基础教育司发布通知要求家长引导孩子力所能及地做一些家务劳动. 某校为了解七年级学生平均每周在家的劳动时间，随机抽取了部分七年级学生进行调查，根据调查结果，绘制了如下频数分布表：

组别	一	二	三	四
劳动时间 x/h	$0 \leq x < 1$	$1 \leq x < 2$	$2 \leq x < 3$	$x \geq 3$
频数	10	20	12	8

根据表中的信息，下列说法正确的是 ()

- A. 本次调查的样本容量是 50 人
- B. 本次调查七年级学生平均每周在家劳动时间的中位数落在二组
- C. 本次调查七年级学生平均每周在家劳动时间的众数落在四组
- D. 若七年级共有 500 名学生，估计平均每周在家劳动时间在四组的学生大约有 100 人

【答案】B

【解析】

【分析】依据样本容量、众数、中位数及样本估计总体的意义分别判断后即可确定正确的选项.

【详解】解：A. 本次调查的样本容量是 50，原说法错误，故本选项不合题意；

B. 本次调查七年级学生平均每周在家劳动时间的中位数落在二组，说法正确，故本选项符合题意；

C. 无法判断本次调查七年级学生平均每周在家劳动时间的众数落在哪一组，原说法错误，故本选项不合题意；

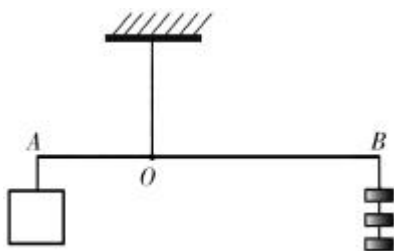
D. 若七年级共有 500 名学生，估计平均每周在家劳动时间在四组的学生大约有 $500 \times \frac{8}{50} = 80$ (人)，原说法错误，故本选项不合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查了样本容量、众数、中位数及用样本估计总体，样本容量是指取样的总数；众数是指一组数据中出现次数最多的那个数，注意可以没有也可以只有一个或多个；中位数是指一组数据按从小到大（或从大到小）排列后，处于中间位置的数（或两个数的平均数）；理解这些概念的含义是正确做出判断的关键.

6. 在数学活动课上，兴趣小组的同学用一根质地均匀的轻质木杆和若干个钩码做实验. 如图所示，在轻质木杆 O 处用一根细线悬挂，左端 A 处挂一重物，右端 B 处挂钩码，每个钩码质量是 50g. 若 $OA=20\text{cm}$, $OB=40\text{cm}$,

挂 3 个钩码可使轻质木杆水平位置平衡. 设重物的质量为 xg , 根据题意列方程得 ()



A. $20x = 40 \times 50 \times 3$

B. $40x = 20 \times 50 \times 3$

C. $3 \times 20x = 40 \times 50$

D. $3 \times 40x = 20 \times 50$

【答案】A

【解析】

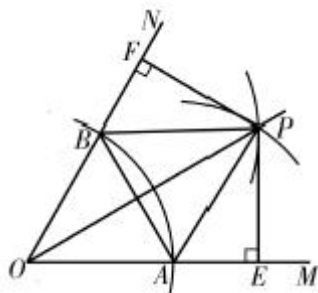
【分析】直接利用杠杆的平衡条件: 动力 $\times$ 动力臂=阻力 $\times$ 阻力臂即可求解.

【详解】解: 根据题意得: $20x = 40 \times 50 \times 3$.

故选: A.

【点睛】本题考查了列一元一次方程, 杠杆的平衡条件有关内容, 熟知杠杆的平衡条件: 动力 $\times$ 动力臂=阻力 $\times$ 阻力臂是解题的关键.

7. 如图, $\angle MON=60^\circ$, 以点 O 为圆心, 适当长为半径画弧, 交 OM 于点 A , 交 ON 于点 B ; 分别以点 A, B 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧, 两弧在 $\angle MON$ 的内部相交于点 P , 画射线 OP ; 连接 AB, AP, BP , 过点 P 作 $PE \perp OM$ 于点 E , $PF \perp ON$ 于点 F . 则以下结论错误的是 ()



A. $\triangle AOB$ 是等边三角形

B. $PE=PF$

C. $\triangle PAE \cong \triangle PBF$

D. 四边形 $OAPB$ 是菱形

【答案】D

【解析】

【分析】利用等边三角形的判定定理可判定选项 A; 根据角平分线的性质可判定选项 B; 利用 HL 可证明 $\triangle PAE \cong \triangle PBF$; 利用菱形的判定定理可判定选项 D.

【详解】解: $\because \angle MON=60^\circ$, $OA=OB$, $\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形, 故选项 A 成立, 不符合题意;
由作图知: 射线 OP 是 $\angle MON$ 的平分线, 且 $PE \perp OM$, $PF \perp ON$, $\therefore PE=PF$, 故选项 B 成立, 不符合题意;

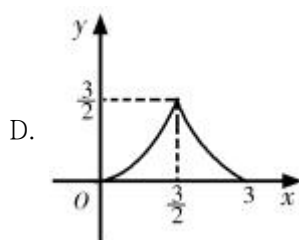
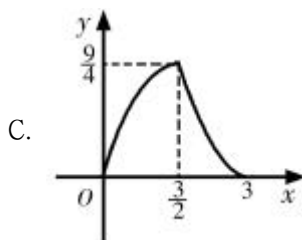
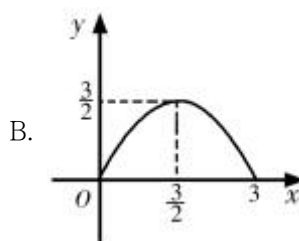
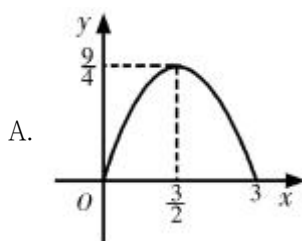
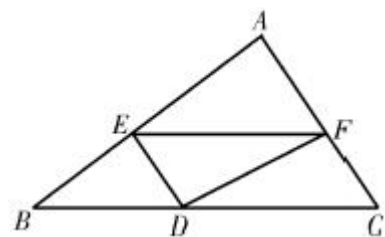
由作图知: $AP=BP$, 又 $PE=PF$, $\therefore \triangle PAE \cong \triangle PBF$ (HL), 故选项 C 成立, 不符合题意;

$\because OA$ 与 AP 不一定相等, $\therefore$ 四边形 $OAPB$ 不一定是菱形, 故选项 D 不成立, 符合题意;

故选: D.

【点睛】本题考查了作图-复杂作图: 解决此类题目的关键是熟悉基本几何图形的性质, 结合几何图形的基本性质把复杂作图拆解成基本作图, 逐步操作. 也考查了全等三角形的判定、菱形的判定.

8. 如图, $\triangle ABC$ 中, $BC=6$, BC 边上的高为 3, 点 D, E, F 分别在边 BC, AB, AC 上, 且 $EF \parallel BC$. 设点 E 到 BC 的距离为 x , $\triangle DEF$ 的面积为 y , 则 y 关于 x 的函数图象大致是 ()

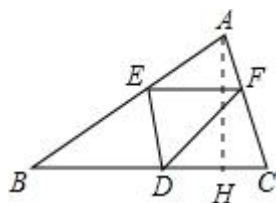


【答案】A

【解析】

【分析】过点 A 向 BC 作 $AH \perp BC$ 于点 H , 所以根据相似三角形的性质可求出 EF , 进而求出函数关系式, 由此即可求出答案.

【详解】解: 过点 A 向 BC 作 $AH \perp BC$ 于点 H ,



根据相似比可知: $\frac{EF}{BC} = \frac{3-x}{3}$,

即 $\frac{EF}{6} = \frac{3-x}{3}$,

解得: $EF=2(3-x)$,

则 $\triangle DEF$ 的面积 $y = \frac{1}{2} \times 2(3-x) \cdot x = -x^2 + 3x = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{4}$,

故 y 关于 x 的函数图象是一个开口向下、顶点坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ 的抛物线.

故选: A.

【点睛】 本题考查了二次函数图象, 主要利用了相似三角形的性质, 求出 S 与 x 的函数关系式是解题的关键.

第 II 卷 (非选择题 共 96 分)

二、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分. 不需写出解答过程, 请把最后结果填在答题卡对应的位置上)

9. $-\sqrt{6}$ 的绝对值是_____.

【答案】 $\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 根据绝对值的意义, 实数的绝对值永远是非负数, 负数的绝对值是它的相反数, 即可得解.

【详解】 解: 根据负数的绝对值是它的相反数, 得

$$|-\sqrt{6}| = \sqrt{6}.$$

故答案为: $\sqrt{6}$.

【点睛】 本题考查了绝对值, 掌握负数的绝对值等于它的相反数是解题的关键.

10. $3x^2 \cdot (-2xy^3) =$ _____

【答案】 $-6x^3y^3$

【解析】

【分析】 根据积的乘方法则计算即可.

【详解】 解: $3x^2 \cdot (-2xy^3) = -6x^3y^3$,

故答案为: $-6x^3y^3$.

【点睛】 本题考查了积的乘方, 解题的关键是掌握运算法则.

11. 一个正 n 边形的一个外角等于 36° , 则 $n =$ _____.

【答案】 10

【解析】

【分析】 利用多边形的外角和即可解决问题.

【详解】解: $n=360^{\circ}\div 36^{\circ}=10$.

故答案为 10.

【点睛】本题主要考查了正 n 边形的外角特点. 因为外角和是 360 度, 所以当多边形是正多边形时, 每个外角都相等. 直接利用外角求多边形的边数是常用的方法.

12. 某校围绕习近平总书记在庆祝中国共产主义青年团成立 100 周年大会上的重要讲话精神, 开展了主题为“我叫中国青年”的线上演讲活动. 九年级 (1) 班共有 50 人, 其中男生有 26 人, 现从中随机抽取 1 人参加该活动, 恰好抽中男生的概率是_____.

【答案】 $\frac{13}{25}$

【解析】

【分析】直接利用概率公式求解即可.

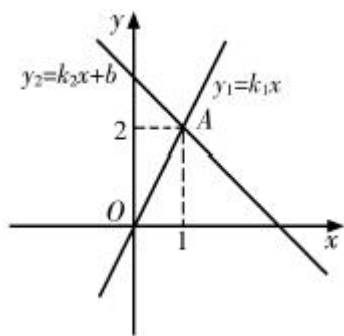
【详解】解: 全班共有 50 人, 男生有 26 人,

从中随机抽取 1 人参加该活动, 恰好抽中男生的概率是 $=\frac{26}{50}=\frac{13}{25}$,

故答案为: $\frac{13}{25}$.

【点睛】本题考查用概率公式求事件概率, 所有可能发生的结果数是 m , 其中发生事件 A 的结果数为 n , 则 $P(A)=\frac{n}{m}$.

13. 如图, 直线 $y_1=k_1x$ 与直线 $y_2=k_2x+b$ 交于点 $A(1, 2)$. 当 $y_1<y_2$ 时, x 的取值范围是_____.



【答案】 $x < 1$

【解析】

【分析】据函数图象, 写出直线 $y_1=k_1x$ 在直线 $y_2=k_2x+b_2$ 的下方所对应的自变量的范围即可.

【详解】解: 如图, 已知直线 $y_1=k_1x$ 与直线 $y_2=k_2x+b_2$ 相交于点 $A(1, 2)$, 则当 $y_1<y_2$ 时, x 的取值范围为 $x < 1$.

故答案是: $x < 1$.

【点睛】本题考查了一次函数与一元一次不等式: 从函数的角度看, 就是寻求使一次函数 $y=kx+b$ 的值大于 (或小于) 0 的自变量 x 的取值范围; 从函数图象的角度看, 就是确定直线 $y=kx+b$ 在 x 轴上 (或下) 方部

分所有的点的横坐标所构成的集合.

14. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=1$, $BC=\sqrt{2}$, 则 $\cos A=$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ## $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据勾股定理求出斜边 AB 的值, 在利用余弦的定义直接计算即可.

【详解】 解: 在 $Rt\triangle ACB$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=1$, $BC=\sqrt{2}$,

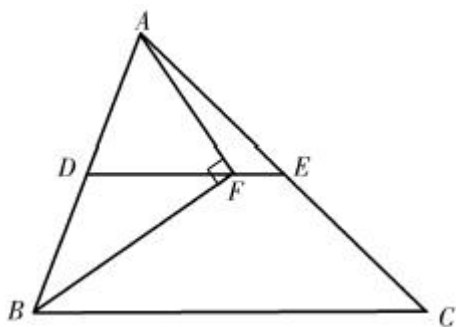
$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】 本题主要考查锐角三角函数的定义, 解决此类题时, 要注意前提条件是在直角三角形中, 此外还有熟记三角函数的定义.

15. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=6$, $BC=8$, 点 D , F 分别是 AB , AC 的中点, 点 F 在 DE 上, 且 $\angle AFB=90^\circ$, 则 $EF=$ _____.



【答案】 1

【解析】

【分析】 首先根据三角形中位线的定理, 得出 DE 的长, 再根据直角三角形斜边的中线等于斜边的一半, 得出 DF 的长, 最后根据 $EF = DE - DF$, 即可算出答案.

【详解】 $\because$ 点 D , F 分别是 AB , AC 的中点

$\therefore DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BC$$

又 $\because BC=8$

$$\therefore DE = 4$$

$$\text{又} \because \angle AFB = 90^\circ$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle ABF$$

点 D 是 AB 的中点

$$\therefore DF = \frac{1}{2} AB$$

$$\text{又} \because AB = 6$$

$$\therefore DF = 3$$

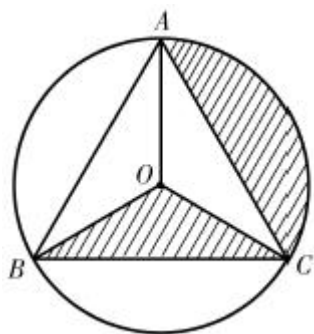
$$\text{又} \because EF = DE - DF$$

$$\therefore EF = 4 - 3 = 1$$

故答案为: 1.

【点睛】 本题考查三角形中位线定理即应用, 直角三角形的性质, 本题解题的关键在熟练掌握直角三角形斜边的中线等于斜边的一半.

16. 如图, 等边三角形 ABC 内接于 $\odot O$, $BC = 2\sqrt{3}$, 则图中阴影部分的面积是_____.

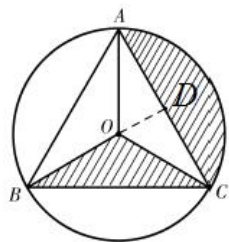


【答案】 $\frac{4\pi}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 根据等边三角形的性质可得 $S_{\triangle COB} = S_{\triangle AOC}$, $\angle AOC = 120^\circ$, 将阴影部分的面积转化为扇形 AOC 的面积, 利用扇形面积的公式计算可求解.

【详解】 解: 过点 O 作 $OD \perp AC$ 于点 D ,



$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle AOC = 120^\circ, AD = CD = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle OAC = 30^\circ,$$

$$\therefore OA = AD \div \cos 30^\circ = 2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形,

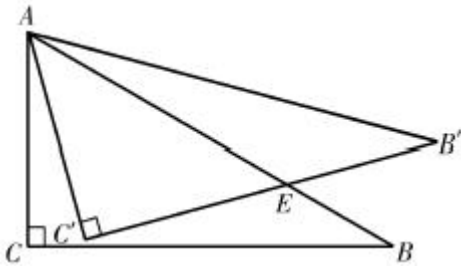
$$\therefore S_{\triangle COB} = S_{\triangle AOC}, \quad \angle AOC = 120^\circ,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形} AOC} = \frac{120\pi \cdot 2^2}{360} = \frac{4\pi}{3},$$

故答案为: $\frac{4\pi}{3}$.

【点睛】 本题主要考查扇形面积的计算, 等边三角形的性质, 掌握扇形面积公式是解题的关键.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $AB = 6$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针方向旋转 15° 得到 $\triangle AB'C'$, $B'C'$ 交 AB 于点 E , 则 $B'E =$ _____.



【答案】 $3\sqrt{3} - 3$

【解析】

【分析】 根据已知可以得出 $\angle BAC = 60^\circ$, 而将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按逆时针方向旋转 15° , 可知 $\angle C'AE = 45^\circ$, 可以求出 $AC = AC' = EC' = 3$, 据此即可求解.

【详解】 解: 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $AB = 6$,

$$\text{则 } \angle BAC = 60^\circ, AC = 3, BC = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按逆时针方向旋转 15° 后,

$$\text{则 } \angle C'AC = 15^\circ, AC = AC' = 3, B'C' = BC = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \angle C'AE = 45^\circ,$$

而 $\angle AC'E = 90^\circ$, 故 $\triangle AC'E$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AC = AC' = EC' = 3$$

$$\therefore B'E = B'C' - EC' = 3\sqrt{3} - 3.$$

故答案为: $3\sqrt{3} - 3$.

【点睛】本题考查旋转变换、直角三角形 30 度角的性质、等腰直角三角形的判定和性质、勾股定理等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识。

18. 矩形 $ABCD$ 中， $AB=8$ ， $AD=7$ ，点 E 在 AB 边上， $AE=5$ 。若点 P 是矩形 $ABCD$ 边上一点，且与点 A ， E 构成以 AE 为腰的等腰三角形，则等腰三角形 AEP 的底边长是_____。

【答案】 $5\sqrt{2}$ 或 $4\sqrt{5}$

【解析】

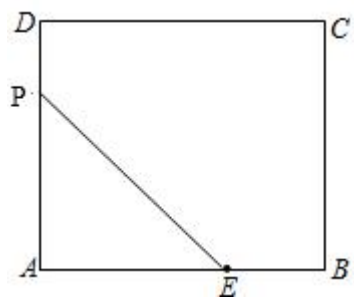
【分析】分情况讨论：①当 $AP=AE=5$ ，点 P 在边 AD 上时，由勾股定理可求得底边 PE 的长；②当 $PE=AE=5$ ，点 P 在边 BC 上时，求出 BE ，由勾股定理求出 PB ，再由勾股定理求出底边 AP 即可。

【详解】解：∵ 矩形 $ABCD$

$$\therefore \angle A = \angle B = 90^\circ,$$

分两种情况：

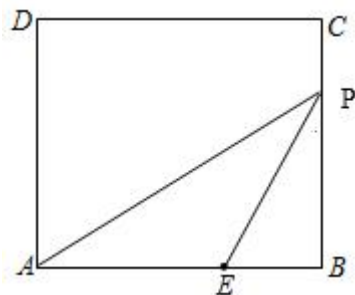
当 $AP=AE=5$ ，点 P 在边 AD 上时，如图所示：



$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore PE = \sqrt{AP^2 + AE^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2};$$

当 $PE=AE=5$ ，点 P 在边 BC 上时，如图所示：



$$\therefore BE = AB - AE = 8 - 5 = 3, \quad \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore PB = \sqrt{PE^2 - BE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore \text{底边 } AP = \sqrt{AB^2 + PB^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5};$$

综上, 等腰三角形 AEP 的底边长是 $5\sqrt{2}$ 或 $4\sqrt{5}$

【点睛】 本题考查了矩形的性质, 勾股定理, 熟练掌握矩形的性质和等腰三角形的判定, 进行分类讨论是解决问题的关键.

三、解答题 (本大题共 9 小题, 第 19、20、21、22 题每小题 7 分, 第 23、24 题每小题 8 分, 第 25、26 题每小题 10 分, 第 27 题 12 分, 共 76 分. 解答时将必要的文字说明、证明过程或演算步骤写在答题卡相应的位置上)

19. 计算: $(-2)^3 + \sqrt{12} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

【答案】 $2\sqrt{3} - 5$

【解析】

【分析】 根据立方运算、算术平方根运算、负整数指数幂运算分别计算后利用实数的加减运算法则求解即可.

【详解】 解: $(-2)^3 + \sqrt{12} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$$= -8 + 2\sqrt{3} + 3$$

$$= 2\sqrt{3} - 5.$$

【点睛】 本题考查实数的加减运算, 涉及到立方运算、算术平方根运算、负整数指数幂运算、以及利用二次根式的性质化简, 熟练掌握相关运算法则是解决问题的关键.

20. 解不等式组: $\begin{cases} x - 3(x - 2) \geq 4 \\ 2x + 1 < x - 1 \end{cases}$ 并写出该不等式组的最大整数解.

【答案】 $x < -2$, -3

【解析】

【分析】 先求出每个不等式的解集, 再求出不等式组的解集, 最后求出不等式组的整数解即可.

【详解】 解: $\begin{cases} x - 3(x - 2) \geq 4 \text{ ①} \\ 2x + 1 < x - 1 \text{ ②} \end{cases}$,

解不等式①得 $x \leq 1$,

解不等式②得 $x < -2$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $x < -2$,

$\therefore$ 不等式组的最大整数解是 -3 .

【点睛】本题考查了解一元一次不等式组，一元一次不等式组的整数解等知识点，能求出不等式组的解集是解题的关键.

21. 解方程: $\frac{4}{x^2+x} - \frac{3}{x^2-x} = 0$.

【答案】 $x = 7$

【解析】

【分析】分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

【详解】解：方程两边同乘 $x(x+1)(x-1)$ ，得 $4(x-1) - 3(x+1) = 0$ ，

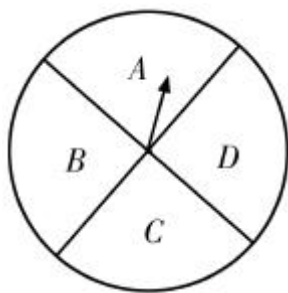
解得 $x = 7$ ，

检验：当 $x = 7$ 时， $x(x+1)(x-1) \neq 0$ ，

所以，原分式方程的解为 $x = 7$ 。

【点睛】本题主要考查了解分式方程，掌握求解的方法是解题的关键，注意解分式方程一定要验根.

22. “青绣”是我省非遗项目，其中土族盘绣、湟中堆绣、贵南藏绣、河湟刺绣等先后列入国家级、省级非物质文化遗产代表作名录.



(1) 省文旅厅为调查我省青少年对“青绣”文化的了解情况，应选择的调查方式是_____（填“全面调查”或“抽样调查”）；

(2) 为了增进我省青少年对“青绣”文化的了解，在一次社会实践活动中设置了转盘游戏. 如图所示，一个可以自由转动的转盘，指针固定不动，转盘被分成了大小相同的 4 个扇形，并在每个扇形区域分别标上 A , B , C , D (A 代表土族盘绣、 B 代表湟中堆绣、 C 代表贵南藏绣、 D 代表河湟刺绣). 游戏规则：每人转动转盘一次，当转盘停止时，指针落在哪个区域就获得相应的绣品（若指针落在分界线上，重转一次，直到指针指向某一区域内为止）. 请用画树状图或列表的方法求出甲、乙两名同学获得同一种绣品的概率，并列出所有等可能的结果.

【答案】 (1) 抽样调查

(2) $\frac{1}{4}$ ，见解析

【解析】

【分析】(1) 选择普查还是抽样调查要根据所要考查的对象的特征灵活选用，一般来说，对于具有破坏性的调查、无法进行普查、普查的意义或价值不大，应选择抽样调查，对于精确度要求高的调查，事关重大的调查往往选用普查，据此判定即可.

(2) 利用列表法求解即可.

【小问 1 详解】

解：省文旅厅为调查我省青少年对“青绣”文化的了解情况，应选择的调查方式是抽样调查，

故答案为：抽样调查；

【小问 2 详解】

解：列表如下：

甲 乙	A	B	C	D
A	AA	BA	CA	DA
B	AB	BB	CB	DB
C	AC	BC	CC	DC
D	AD	BD	CD	DD

由表格可知，共有 16 种等可能结果，

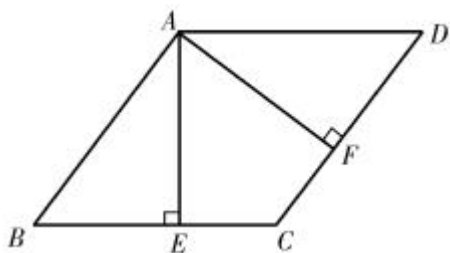
其中甲、乙两名同学获得同一种绣品的结果共有 4 种，

即 AA , BB , CC , DD

$$\therefore P_{\text{(两名同学获得同一种绣品)}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

【点睛】本题考查抽样调查与全面调查的判定，列表法求概率，熟练掌握调查方式的选择与用列表法可画树状图法求概率是解题的关键.

23. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形， $AE \perp BC$ 于点 E ， $AF \perp CD$ 于点 F .



(1) 求证： $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ ；

(2) 若 $AE=4$ ， $CF=2$ ，求菱形的边长.

【答案】(1) 见解析 (2) 5

【解析】

【分析】(1) 利用 AAS 即可证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$;

(2) 设菱形的边长为 x , 利用全等三角形的性质得到 $BE=DF=x-2$, 在 $Rt\triangle ABE$ 中, 利用勾股定理列方程求解即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AB=BC=CD=AD$ (菱形的四条边相等), $\angle B=\angle D$ (菱形的对角相等),

$\because AE \perp BC \quad AF \perp CD$,

$\therefore \angle AEB=\angle AFD=90^\circ$ (垂直的定义),

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEB = \angle AFD \\ \angle B = \angle D \\ AB = AD \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF$ (AAS);

【小问 2 详解】

解: 设菱形的边长为 x ,

$\therefore AB=CD=x, CF=2$,

$\therefore DF=x-2$,

$\because \triangle ABE \cong \triangle ADF$,

$\therefore BE=DF=x-2$ (全等三角形的对应边相等),

在 $Rt\triangle ABE$ 中, $\angle AEB=90^\circ$,

$\therefore AE^2+BE^2=AB^2$ (勾股定理),

$\therefore 4^2+(x-2)^2=x^2$,

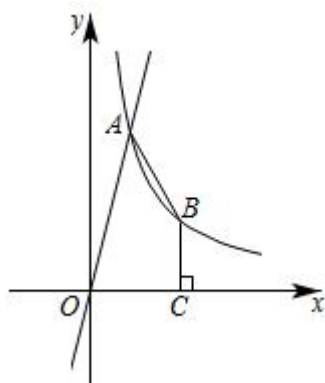
解得 $x=5$,

$\therefore$ 菱形的边长是 5.

【点睛】 本题主要考查菱形的性质、勾股定理, 解题的关键是学会利用参数构建方程解决问题.

24. 如图, 正比例函数 $y=4x$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象交于点 $A(a,4)$, 点 B 在反比例函数图象上,

连接 AB , 过点 B 作 $BC \perp x$ 轴于点 $C(2,0)$.



- (1) 求反比例函数解析式;
- (2) 点 D 在第一象限, 且以 A, B, C, D 为顶点的四边形是平行四边形, 请直接写出点 D 的坐标.

【答案】(1) $y = \frac{4}{x}$

(2) $(1, 2)$ 或 $(1, 6)$

【解析】

【分析】(1) 先将 $A(a, 4)$ 代入 $y = 4x$ 求出 $A(1, 4)$, 再将 $A(1, 4)$ 代入反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 即可求出 k ;

(2) 以 A, B, C, D 为顶点的四边形是平行四边形, 需分类讨论: 当 AB 为一条对角线时, 当 AC 为一条对角线时, 当 AD 为一条对角线时, 根据中点坐标公式分别求出 D 点坐标, 另还需考虑 D 在第一象限.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 正比例函数 $y = 4x$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 A

把 $A(a, 4)$ 代入 $y = 4x$ 得 $4a = 4$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore A(1, 4)$$

把 $A(1, 4)$ 代入反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 得 $4 = \frac{k}{1}$

$$\therefore k = 4$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式是 } y = \frac{4}{x};$$

【小问 2 详解】

由 (1) 知 $A(1, 4)$, $C(2, 0)$, 反比例函数解析式为 $y = \frac{4}{x}$,

$\because BC \perp x$, B 在反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 图象上,

$\therefore B(2, 2)$,

令 $D(m, n)$,

以 A, B, C, D 为顶点的四边形是平行四边形,

当 AB 为一条对角线时, 则 $\frac{m+2}{2} = \frac{1+2}{2}$, $\frac{n+0}{2} = \frac{4+2}{2}$

解得 $m=1, n=6$,

$\therefore D(1, 6)$

当 AC 为一条对角线时, 则 $\frac{m+2}{2} = \frac{1+2}{2}$, $\frac{n+2}{2} = \frac{4+0}{2}$

解得 $m=1, n=2$,

$\therefore D(1, 2)$

当 AD 为一条对角线时, 则 $\frac{m+1}{2} = \frac{2+2}{2}$, $\frac{n+4}{2} = \frac{2+0}{2}$

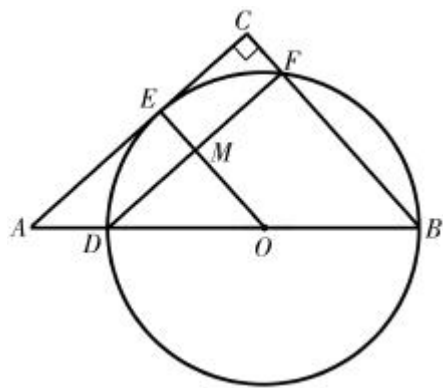
解得 $m=3, n=-2$,

$\therefore D(3, -2)$ (舍去)

综上所述, 点 D 的坐标是 $(1, 2)$ 或 $(1, 6)$.

【点睛】 本题考查反比例函数与一次函数相交问题以及平行四边形存在性问题, 解题关键是由题中的条件分别求出 A, B, C 的坐标, 再分类讨论求出平行四边形的第四个顶点坐标.

25. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 D 在 AB 上, 以 BD 为直径的 $\odot O$ 与 AC 相切于点 E , 交 BC 于点 F , 连接 DF , OE 交于点 M .



(1) 求证: 四边形 $EMFC$ 是矩形;

(2) 若 $AE = \sqrt{5}$, $\odot O$ 的半径为 2, 求 FM 的长.

【答案】 (1) 详见解析

$$(2) \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

【解析】

【分析】(1) 利用直径所对的圆周角是直角及邻补角互补, 可求出 $\angle CFD = 90^\circ$, 由 $\odot O$ 与 AC 相切于点 E , 利用圆的切线垂直于过切点的半径可得出 $OE \perp AC$, 进而可得出 $\angle OEC = \angle AEO = 90^\circ$, 结合再利用三个角都是直角的四边形是矩形, 即可证出四边形 $EMFC$ 是矩形.

(2) 在 $Rt\triangle AOE$ 中, 利用勾股定理可求出 OA 的长, 进而可得出 AB 的长, 由 $\angle AEO = \angle C = 90^\circ$, 利用“同位角相等, 两直线平行”可得出 $OE \parallel BC$, 进而可得出 $\triangle AEO \sim \triangle ACB$ 利用相似三角形的性质可求出 AC 的长, 结合 $CE = AC - AE$, 可求出 CE 的长, 再利用矩形的对边相等, 即可求出 FM 的长.

【小问 1 详解】

$\because BD$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle BFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CFD = 90^\circ,$$

$\therefore \odot O$ 与 AC 相切于点 E ,

$$\therefore OE \perp AC,$$

$$\therefore \angle OEC = \angle AEO = 90^\circ,$$

$$\text{又} \therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle CFD = \angle OEC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EMFC$ 是矩形.

【小问 2 详解】

解: 在 $Rt\triangle AOE$ 中 $\angle AEO = 90^\circ$ $AE = \sqrt{5}$ $OE = OB = 2$,

$$\therefore OA^2 = AE^2 + OE^2,$$

$$\therefore OA = \sqrt{AE^2 + OE^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = 3,$$

$$\therefore AB = OA + OB = 3 + 2 = 5,$$

$$\therefore \angle AEO = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore OE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle AEO \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AO}{AB}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{5}}{AC} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore AC = \frac{5\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore CE = AC - AE = \frac{5\sqrt{5}}{3} - \sqrt{5} = \frac{2\sqrt{5}}{3},$$

$\therefore$ 四边形 $EMFC$ 是矩形,

$$\therefore FM = CE = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

【点睛】 本题考查了矩形的判定, 相切, 勾股定理, 平行线的判定与性质以及相似三角形的判定与性质, 解题的关键是: (1) 根据各角之间的关系, 找出四边形 $EMFC$ 的三个角均为直角. (2) 利用勾股定理及相似三角形的性质, 求出 AC 的长度.

26. 八年级课外兴趣小组活动时, 老师提出了如下问题:

将 $2a - 3ab - 4 + 6b$ 因式分解.

【观察】 经过小组合作交流, 小明得到了如下的解决方法:

$$\text{解法一: 原式} = (2a - 3ab) - (4 - 6b) = a(2 - 3b) - 2(2 - 3b) = (2 - 3b)(a - 2)$$

$$\text{解法二: 原式} = (2a - 4) - (3ab - 6b) = 2(a - 2) - 3b(a - 2) = (a - 2)(2 - 3b)$$

【感悟】 对项数较多的多项式无法直接进行因式分解时, 我们可以将多项式分为若干组, 再利用提公因式法、公式法达到因式分解的目的, 这就是因式分解的分组分解法. 分组分解法在代数式的化简、求值及方程、函数等学习中起着重要的作用. (温馨提示: 因式分解一定要分解到不能再分解为止)

【类比】

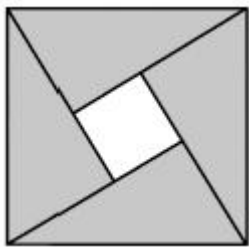
(1) 请用分组分解法将 $x^2 - a^2 + x + a$ 因式分解;

【挑战】

(2) 请用分组分解法将 $ax + a^2 - 2ab - bx + b^2$ 因式分解;

【应用】

(3) “赵爽弦图”是我国古代数学的骄傲, 我们利用它验证了勾股定理. 如图, “赵爽弦图”是由四个全等的直角三角形围成的一个大正方形, 中间是一个小正方形. 若直角三角形的两条直角边长分别是 a 和 b ($a > b$), 斜边长是 3, 小正方形的面积是 1. 根据以上信息, 先将 $a^4 - 2a^3b + 2a^2b^2 - 2ab^3 + b^4$ 因式分解, 再求值.



【答案】(1) $(x+a)(x-a+1)$

(2) $(a-b)(a-b+x)$

(3) $(a^2+b^2)(a-b)^2$, 9

【解析】

【分析】(1) 直接将前两项和后两项组合, 利用平方差公式再提取公因式, 进而分解因式即可;

(2) 先分组, 利用完全平方公式再提取公因式, 进而分解因式即可;

(3) 分组, 先提取公因式, 利用完全平方公式分解因式, 再由勾股定理以及面积得到 $a^2+b^2=9$, $(a-b)^2=1$, 整体代入得出答案即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}
 \text{解: } & x^2 - a^2 + x + a \\
 &= (x^2 - a^2) + (x + a) \\
 &= (x+a)(x-a) + (x+a) \\
 &= (x+a)(x-a+1);
 \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}
 \text{解: } & ax + a^2 - 2ab - bx + b^2 \\
 &= (a^2 - 2ab + b^2) + (ax - bx) \\
 &= (a-b)^2 + x(a-b) \\
 &= (a-b)(a-b+x);
 \end{aligned}$$

【小问 3 详解】

$$\begin{aligned}
 \text{解: } & a^4 - 2a^3b + 2a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 \\
 &= (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - (2a^3b + 2ab^3)
 \end{aligned}$$

$$= (a^2 + b^2)^2 - 2ab(a^2 + b^2)$$

$$= (a^2 + b^2)(a^2 - 2ab + b^2)$$

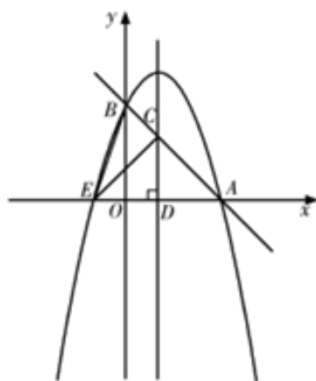
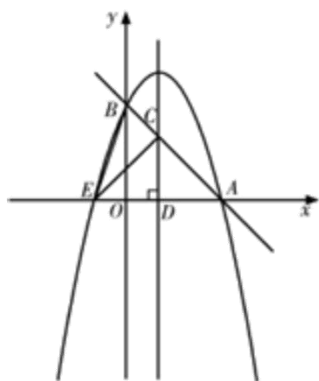
$$= (a^2 + b^2)(a - b)^2,$$

∴ 根据题意得 $a^2 + b^2 = 9$, $(a - b)^2 = 1$,

∴ 原式 = 9.

【点睛】此题主要考查了分组分解法以及、提取公因式法、公式法分解因式以及勾股定理的应用，正确分组再运用公式法分解因式是解题关键.

27. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 x 轴交于点 $A(3, 0)$ ，与 y 轴交于点 B ，点 C 在直线 AB 上，过点 C 作 $CD \perp x$ 轴于点 $D(1, 0)$ ，将 $\triangle ACD$ 沿 CD 所在直线翻折，使点 A 恰好落在抛物线上的点 E 处.



备用图

- (1) 求抛物线解析式；
- (2) 连接 BE ，求 $\triangle BCE$ 的面积；
- (3) 抛物线上是否存在一点 P ，使 $\angle PEA = \angle BAE$ ？若存在，求出 P 点坐标；若不存在，请说明理由.

【答案】(1) $y = -x^2 + 2x + 3$

(2) 2 (3) 存在， $(2, 3)$ 或 $(4, -5)$

【解析】

【分析】(1) 先根据翻折得到 E 点坐标，然后结合 $A(3, 0)$ $D(1, 0)$ 运用待定系数法求解即可；

(2) 先确定点 B 的坐标，然后确定直线 AB 的解析式，进而确定 $AE = 4$ 、 $OB = 3$ 、 $CD = 2$ ，最后根据 $S_{\triangle BCE} = S_{\triangle ABE} - S_{\triangle ACE}$ 结合三角形的面积公式即可解答；

(3) 先说明 $Rt\triangle AOB$ 是等腰直角三角形，设点 P 的坐标为 $(m, -m^2 + 2m + 3)$ ，然后分点 P 在 x 轴上方和下方两种情况分别解答即可.

【小问 1 详解】

解: $\because \triangle ACD$ 沿 CD 所在直线翻折, 点 A 落在点 E 处 $A(3,0)$ $D(1,0)$

$$\therefore E(-1,0)$$

把 A, E 两点坐标代入 $y = ax^2 + bx + 3$ 得 $\begin{cases} 9a + 3b + 3 = 0 \\ a - b + 3 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$.

【小问 2 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$ 与 y 轴交于点 B

$\therefore$ 令 $x = 0$ 时, $y = 3$

$$\therefore B(0,3)$$

设直线 AB 的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$

把 A, B 两点坐标代入得 $\begin{cases} 3k + b = 0 \\ b = 3 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = -1 \\ b = 3 \end{cases}$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y = -x + 3$;

$\therefore$ 点 C 在直线 AB 上 $CD \perp x$ 轴于点 $D(1,0)$

当 $x = 1$ 时 $y = -1 + 3 = 2$

$$\therefore C(1,2)$$

$$\therefore A(3,0) B(0,3) C(1,2) E(-1,0)$$

$$\therefore AE = 4, OB = 3, CD = 2$$

$$\therefore S_{\triangle BCE} = S_{\triangle ABE} - S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 - \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 2$$

$\therefore \triangle BCE$ 的面积是 2.

【小问 3 详解】

解: 存在, 理由如下:

$$\therefore A(3,0), B(0,3)$$

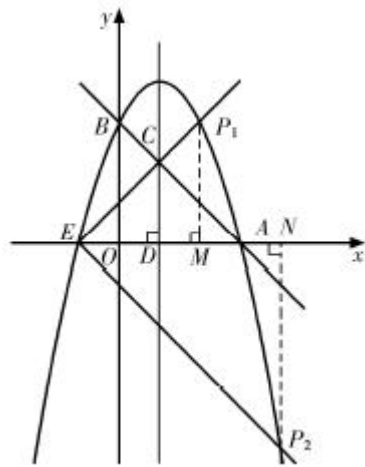
$$\therefore OA = OB = 3$$

在 $Rt\triangle AOB$ 中 $OA = OB$

$\therefore Rt\triangle AOB$ 是等腰直角三角形

$\therefore$ 点 P 在抛物线上

$\therefore$ 设点 P 的坐标为 $(m, -m^2 + 2m + 3)$



①当点 P 在 x 轴上方时记为 P_1 , 过 P_1 作 $P_1M \perp x$ 轴于点 M

在 $Rt\triangle EMP_1$ 中 $\because \angle P_1EA = 45^\circ \therefore EM = P_1M$

即 $m+1 = -m^2 + 2m + 3$ 解得 $m_1 = 2$ $m_2 = -1$ (舍去)

当 $m = 2$ 时 $-m^2 + 2m + 3 = 3$

$\therefore P_1(2, 3)$

②当点 P 在 x 轴下方时记为 P_2 , 过 P_2 作 $P_2N \perp x$ 轴于点 N

在 $Rt\triangle ENP_2$ 中

$\therefore \angle P_2EN = 45^\circ$

$\therefore EN = P_2N$

$\therefore m+1 = -(-m^2 + 2m + 3)$ 解得 $m_1 = 4$ $m_2 = -1$ (舍去)

当 $m = 4$ 时 $-m^2 + 2m + 3 = -5$

$\therefore P_2(4, -5)$

综上, 符合条件的 P 点坐标是 $(2, 3)$ 或 $(4, -5)$.

【点睛】 本题属于二次函数综合题, 涉及求二次函数的性质、二次函数解析式、二次函数与几何图形综合等知识点, 灵活运用二次函数的性质以及其与几何知识的联系是解答本题的关键.

