

2021 年山东省青岛市中考数学真题

第 I 卷 (共 24 分)

一、选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

1. 剪纸是我国古老的民间艺术, 下列四个剪纸图案为轴对称图形的是 ()



【1 题答案】

【答案】C

【解析】

【分析】过一个图形的一条直线,把这个图形分成可以完全重合的两个部分, 这个图形就叫做轴对称图形; 根据轴对称图形的概念求解即可.

【详解】解: A、不是轴对称图形, 本选项不符合题意;
B、不是轴对称图形, 本选项不符合题意;
C、是轴对称图形, 本选项符合题意;
D、不是轴对称图形, 本选项不符合题意.

故选: C.

【点睛】本题考查了轴对称图形的概念. 轴对称图形的关键是寻找对称轴, 图形两部分折叠后可重合.

2. 下列各数为负分数的是 ()

A. -1

B. $-\frac{1}{2}$

C. 0

D. $\sqrt{3}$

【2 题答案】

【答案】B

【解析】

【分析】根据负分数的定义, 在正分数前面加负号的数叫做负分数, 即可判断.

【详解】解: A、 -1 是负整数, 故本选项不符合题意;
B、 $-\frac{1}{2}$ 是负分数, 故本选项符合题意;

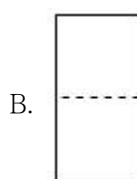
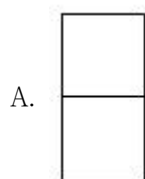
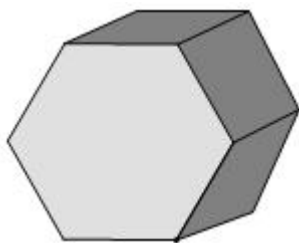
C、0 是整数，故本选项不符合题意；

D、 $\sqrt{3}$ 是无理数，故本选项不符合题意；

故选：B.

【点睛】 本题主要考查了负分数的概念，解题的关键是要熟练掌握负分数的定义.

3. 如图所示的几何体，其左视图是 ()



【3 题答案】

【答案】 A

【解析】

【分析】 左视图：从左边看几何体，看到的平面图形即是左视图，能看到的棱用实线表示，不能看到的用虚线，根据左视图的含义可得答案.

【详解】 解：从左边看过去，可以看到这个几何体的两个面，两个面都是长方形，两个长方形是上下两个长方形，中间的棱可以看到，所以左视图是：



故选：A

【点睛】 本题考查的是简单几何体的三视图，掌握“从左边看几何体，画左视图”是解题的关键.

4. 2021 年 3 月 5 日, 李克强总理在政府工作报告中指出, 我国脱贫攻坚成果举世瞩目, 5575 万农村贫困人口实现脱贫. $5575 \text{ 万} = 55750000$, 用科学记数法将 55750000 表示为 ()

- A. 5575×10^4 B. 55.75×10^5 C. 5.575×10^7 D. 0.5575×10^8

【4 题答案】

【答案】C

【解析】

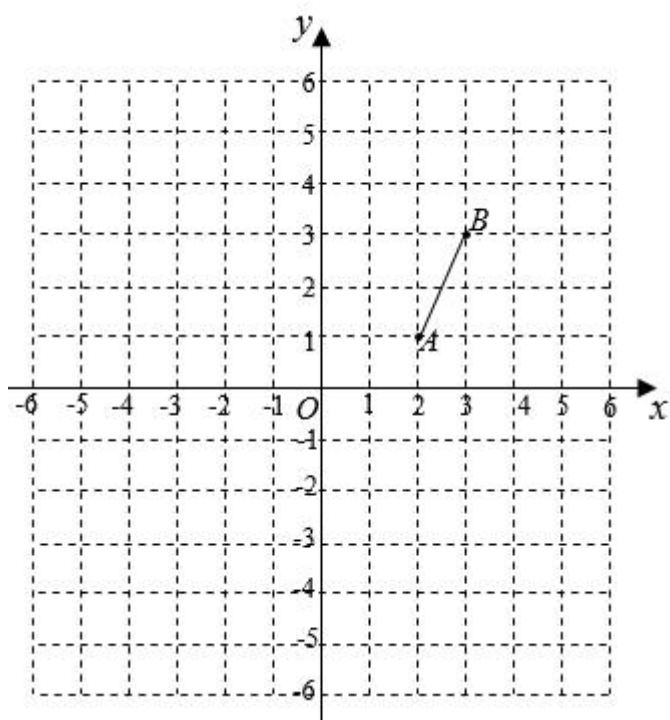
【分析】根据科学记数法的定义“把一个大于 10 的数表示成 $a \times 10^n$ 的形式 (其中 a 是整数位只有一位的数, 即 a 大于或等于 1 且小于 10, n 是正整数), 这样的记数方法叫做科学记数法”进行解答即可得.

【详解】解: $55750000 = 5.575 \times 10^7$,

故选 C.

【点睛】本题考查了科学记数法, 解题的关键是熟记科学记数法的定义.

5. 如图, 将线段 AB 先绕原点 O 按逆时针方向旋转 90° , 再向下平移 4 个单位, 得到线段 $A'B'$, 则点 A 的对应点 A' 的坐标是 ()



- A. $(1, -6)$ B. $(-1, 6)$ C. $(1, -2)$ D. $(-1, -2)$

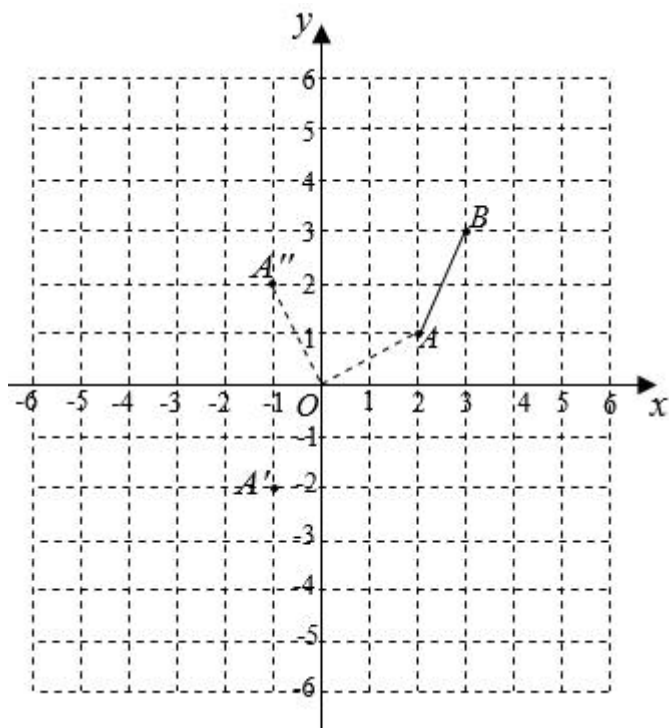
【5 题答案】

【答案】D

【解析】

【分析】先求出 A 点绕 O 点逆时针旋转 90° 后的坐标为 $(-1, 2)$, 再求向下平移 4 个单位后的点的坐标即可.

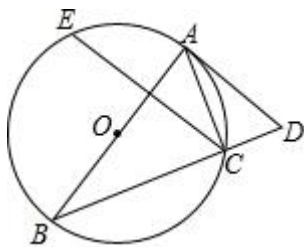
【详解】解：如图连接 OA ，将 OA 点绕 O 点逆时针旋转 90° ，得到点 $A''(-1, 2)$ ， A'' 向下平移 4 个单位，得到 $A'(-1, -2)$ ；



故选：D.

【点睛】本题考查坐标与图形变化，能够根据题意得出旋转、平移后的点坐标是解题的关键.

6. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 E, C 在 $\odot O$ 上，点 A 是 $\widehat{EC}$ 的中点，过点 A 画 $\odot O$ 的切线，交 BC 的延长线于点 D ，连接 EC 。若 $\angle ADB = 58.5^\circ$ ，则 $\angle ACE$ 的度数为（ ）



A. 29.5°

B. 31.5°

C. 58.5°

D. 63°

【6 题答案】

【答案】B

【解析】

【分析】根据切线的性质得到 $BA \perp AD$ ，根据直角三角形的性质求出 $\angle B$ ，根据圆周角定理得到 $\angle ACB = 90^\circ$ ，进而求出 $\angle BAC$ ，根据垂径定理得到 $BA \perp EC$ ，进而得出答案.

【详解】解： $\because AD$ 是 $\odot O$ 的切线，

$$\therefore BA \perp AD,$$

$$\therefore \angle ADB = 58.5^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle ADB = 31.5^\circ,$$

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ - \angle B = 58.5^\circ,$$

$\therefore$ 点 A 是弧 EC 的中点,

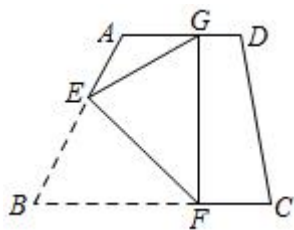
$$\therefore BA \perp EC,$$

$$\therefore \angle ACE = 90^\circ - \angle BAC = 31.5^\circ,$$

故选: B.

【点睛】 本题考查的是切线的性质、圆周角定理、垂径定理, 掌握圆的切线垂直于经过切点的半径是解题的关键.

7. 如图, 在四边形纸片 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = 10$, $\angle B = 60^\circ$. 将纸片折叠, 使点 B 落在 AD 边上的点 G 处, 折痕为 EF . 若 $\angle BFE = 45^\circ$, 则 BF 的长为 ()



A. 5

B. $3\sqrt{5}$

C. $5\sqrt{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{5}$

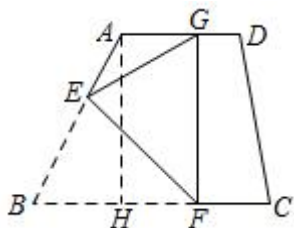
【7 题答案】

【答案】 C

【解析】

【分析】 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于 H , 由折叠知识得: $\angle BFG = 90^\circ$, 再由锐角三角函数可得 $AH = 5\sqrt{3}$, 然后根据 $AD \parallel BC$, 可证得四边形 $AHFG$ 是矩形, 即可求解.

【详解】 解: 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ,



由折叠知: $BF=GF$, $\angle BFE=\angle GFE$,

$$\therefore \angle BFE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BFG = 90^\circ,$$

在 $Rt\triangle ABH$ 中, $AB=10$, $\angle B=60^\circ$,

$$AH = \sin B \times AB = \sin 60^\circ \times 10 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 = 5\sqrt{3},$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle GAH = \angle AHB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GAH = \angle AHB = \angle BFG = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $AHFG$ 是矩形,

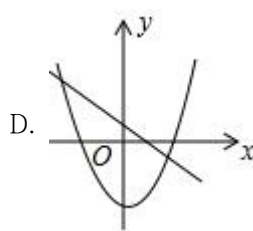
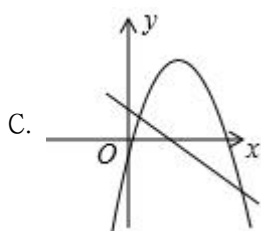
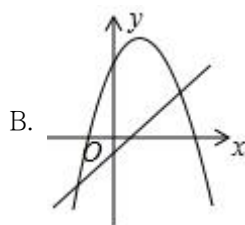
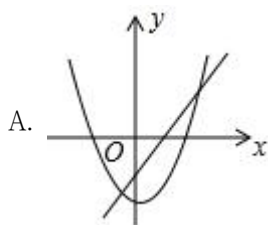
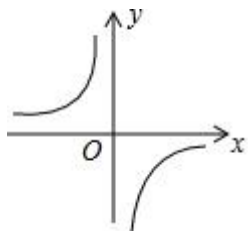
$$\therefore FG = AH = 5\sqrt{3},$$

$$\therefore BF = GF = 5\sqrt{3}.$$

故选: C.

【点睛】 本题主要考查了折叠变换, 解直角三角形, 矩形的判定和性质, 熟练掌握相关知识点是解题的关键.

8. 已知反比例函数 $y = \frac{b}{x}$ 的图象如图所示, 则一次函数 $y = cx + a$ 和二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 在同一直角坐标系中的图象可能是 ()



【8 题答案】

【答案】D

【解析】

【分析】根据反比例函数的图象得出 $b < 0$ ，逐一分析四个选项，根据二次函数图象的开口以及对称轴与 y 轴的关系，抛物线与 y 轴的交点，即可得出 a 、 b 、 c 的正负，由此即可得出一次函数图象经过的象限，再与函数图象进行对比即可得出结论.

【详解】解：∵反比例函数的图象在二、四象限，

∴ $b < 0$,

A、∵二次函数图象开口向上，对称轴在 y 轴右侧，交 y 轴的负半轴，

∴ $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$,

∴一次函数图象应该过第一、二、四象限，A 错误；

B、∵二次函数图象开口向下，对称轴在 y 轴右侧，

∴ $a < 0$, $b > 0$,

∴与 $b < 0$ 矛盾，B 错误；

C、∵二次函数图象开口向下，对称轴在 y 轴右侧，

∴ $a < 0$, $b > 0$,

∴与 $b < 0$ 矛盾，C 错误；

D、∵二次函数图象开口向上，对称轴在 y 轴右侧，交 y 轴的负半轴，

∴ $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$,

∴一次函数图象应该过第一、二、四象限，D 正确.

故选：D.

【点睛】本题主要考查了一次函数、反比例函数、二次函数的图象与性质，根据函数图象与系数的关系进行判断是解题的关键，同时考查了数形结合的思想.

第Ⅱ卷 (共 96 分)

二、填空题 (本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分)

9. 计算: $\left(\sqrt{8} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \times \sqrt{2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【9 题答案】

【答案】5

【解析】

【分析】先运用乘法分配律展开，再利用二次根式的乘法法则计算即可，

【详解】解: $\left(\sqrt{8} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \times \sqrt{2} = \sqrt{8 \times 2} + \sqrt{\frac{1}{2} \times 2} = 4 + 1 = 5,$

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算, 掌握运算法则是关键.

10. 在一个不透明的袋中装有若干个红球和 4 个黑球, 每个球除颜色外完全相同. 摇匀后从中摸出一个球, 记下颜色后再放回袋中. 不断重复这一过程, 共摸球 100 次. 其中有 40 次摸到黑球, 估计袋中红球的个数是_____.

【10 题答案】

【答案】6

【解析】

【分析】估计利用频率估计概率可估计摸到黑球的概率为 $\frac{40}{100}$, 然后根据概率公式构建方程求解即可.

【详解】解: 设袋中红球的个数是 x 个, 根据题意得:

$$\frac{4}{4+x} = \frac{40}{100},$$

解得: $x=6$,

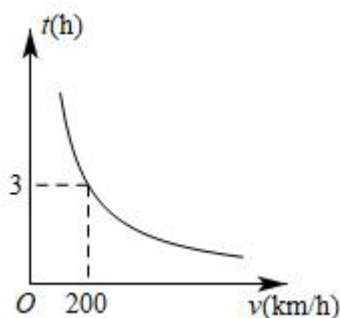
经检验: $x=6$ 是分式方程的解,

即估计袋中红球的个数是 6 个.

故答案为: 6.

【点睛】本题考查了利用频率估计概率, 解题的关键是熟练掌握大量重复试验时, 事件发生的频率在某个固定位置左右摆动, 并且摆动的幅度越来越小, 根据这个频率稳定性定理, 可以用频率的集中趋势来估计概率, 这个固定的近似值就是这个事件的概率用频率估计概率得到的是近似值, 随试验次数的增多, 值越来越精确.

11. 列车从甲地驶往乙地. 行完全程所需的时间 t (h) 与行驶的平均速度 v (km/h) 之间的反比例函数关系如图所示. 若列车要在 2.5h 内到达, 则速度至少需要提高到_____ km/h.



【11 题答案】

【答案】 240

【解析】

【分析】由设 $t = \frac{k}{v}$, 再利用待定系数法求解反比例函数解析式, 把 $t = 2.5$ h 代入函数解析式求解 v 的值, 结合图象上点的坐标含义可得答案.

【详解】解: 由题意设 $t = \frac{k}{v}$,

把 $(200, 3)$ 代入得: $k = tv = 200 \times 3 = 600$,

$$\therefore t = \frac{600}{v},$$

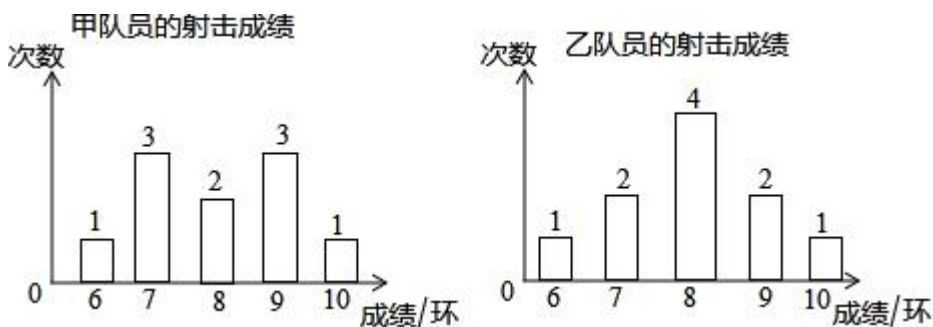
当 $t = 2.5$ h 时, $v = \frac{600}{2.5} = 240$ km/h,

所以列车要在 2.5h 内到达, 则速度至少需要提高到 240 km/h,

故答案为: 240 km/h.

【点睛】本题考查的是反比例函数的应用, 掌握利用待定系数法求解反比例函数的解析式是解题的关键.

12. 已知甲、乙两队员射击的成绩如图, 设甲、乙两队员射击成绩的方差分别为 $S_{\text{甲}}^2$ 、 $S_{\text{乙}}^2$, 则 $S_{\text{甲}}^2$ ____ $S_{\text{乙}}^2$. (填 “>”、“=”、“<”)



【12 题答案】

【答案】 >

【解析】

【分析】先计算两组数据的平均数, 再计算它们的方差, 即可得出答案.

【详解】解: 甲射击的成绩为: 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 10,

乙射击的成绩为: 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 10,

$$\text{则 } \bar{x}_{\text{甲}} = \frac{1}{10} \times (6 + 7 \times 3 + 8 \times 2 + 9 \times 3 + 10) = 8,$$

$$\bar{x}_{\text{乙}} = \frac{1}{10} \times (6 + 7 \times 2 + 8 \times 4 + 9 \times 2 + 10) = 8,$$

$$\begin{aligned}\therefore S_{\text{甲}}^2 &= \frac{1}{10} \times [(6-8)^2 + 3 \times (7-8)^2 + 2 \times (8-8)^2 + 3 \times (9-8)^2 + (10-8)^2] \\ &= \frac{1}{10} \times [4 + 3 + 3 + 4] \\ &= 1.4;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{\text{乙}}^2 &= \frac{1}{10} \times [(6-8)^2 + 2 \times (7-8)^2 + 4 \times (8-8)^2 + 2 \times (9-8)^2 + (10-8)^2] \\ &= \frac{1}{10} \times [4 + 2 + 2 + 4] \\ &= 1.2;\end{aligned}$$

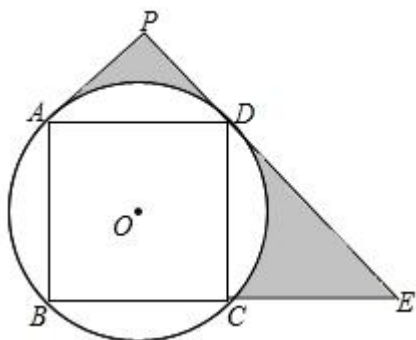
$$\therefore 1.4 > 1.2,$$

$$\therefore S_{\text{甲}}^2 > S_{\text{乙}}^2,$$

故答案为: $>$.

【点睛】题主要考查了平均数及方差的知识. 方差的定义: 一般地设 n 个数据, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$, 则方差 $S^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$, 它反映了一组数据的波动大小, 方差越大, 波动性越大, 反之也成立.

13. 如图, 正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, PA, PD 分别与 $\odot O$ 相切于点 A 和点 D , PD 的延长线与 BC 的延长线交于点 E . 已知 $AB = 2$, 则图中阴影部分的面积为_____.



【13 题答案】

【答案】 $5 - \pi$

【解析】

【分析】连接 AC, OD , 根据已知条件得到 AC 是 $\odot O$ 的直径, $\angle AOD = 90^\circ$, 根据切线的性质得到 $\angle PAO = \angle PDO = 90^\circ$, 得到 $\triangle CDE$ 是等腰直角三角形, 根据等腰直角三角形的性质得到 $PE = 3\sqrt{2}$, 根据梯形和圆的面积公式即可得到答案.

【详解】解: 连接 AC, OD ,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle B = 90^\circ,$$

$\therefore AC$ 是 $\odot O$ 的直径, $\angle AOD=90^\circ$,

$\therefore PA, PD$ 分别与 $\odot O$ 相切于点 A 和点 D ,

$\therefore \angle PAO = \angle PDO = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $AODP$ 是矩形,

$\therefore OA = OD$,

$\therefore$ 矩形 $AODP$ 是正方形,

$\therefore \angle P = 90^\circ, AP = AO, AC \parallel PE$,

$\therefore \angle E = \angle ACB = 45^\circ$,

$\therefore \triangle CDE$ 是等腰直角三角形,

$\therefore AB = 2$,

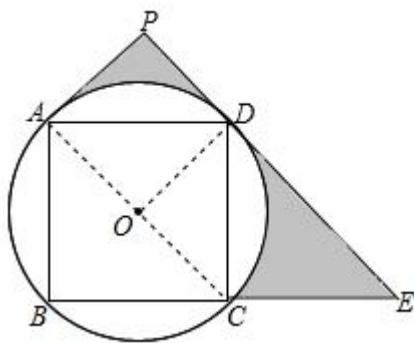
$\therefore AC = 2AO = 2\sqrt{2}, DE = \sqrt{2} CD = 2\sqrt{2}$,

$\therefore AP = PD = AO = \sqrt{2}$,

$\therefore PE = 3\sqrt{2}$,

$\therefore$ 图中阴影部分的面积 $= \frac{1}{2}(AC + PE) \cdot AP - \frac{1}{2}AO^2 \cdot \pi = \frac{1}{2}(2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) \times \sqrt{2} - \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \cdot \pi = 5 - \pi$

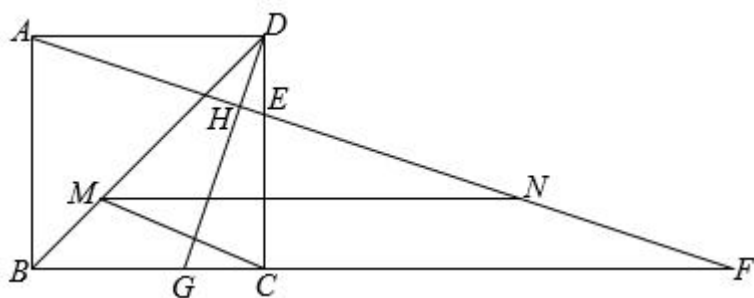
故答案为: $5 - \pi$.



【点睛】 本题考查了正多边形与圆, 正方形的性质, 切线的性质, 等腰直角三角形的判定和性质, 正确的作出辅助线是解题的关键.

14. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 3, E 为 CD 上一点, 连接 AE 并延长, 交 BC 的延长线于点 F , 过点 D 作 $DG \perp AF$, 交 AF 于点 H , 交 BF 于点 G , N 为 EF 的中点, M 为 BD 上一动点, 分别连接 MC ,

MN . 若 $\frac{S_{\triangle DCG}}{S_{\triangle FCE}} = \frac{1}{4}$, 则 $MN + MC$ 的最小值为_____.



【14 题答案】

【答案】 $2\sqrt{10}$

【解析】

【分析】由正方形的性质，可得 A 点与 C 点关于 BD 对称，则有 $MN+CM=MN+AM \geq AN$ ，所以当 A 、 M 、 N 三点共线时， $MN+CM$ 的值最小为 AN ，先证明 $\triangle DCG \sim \triangle FCE$ ，再由 $\frac{S_{\triangle DCG}}{S_{\triangle FCE}} = \frac{1}{4}$ ，可得 $\frac{CD}{CF} = \frac{1}{2}$ ，分别求出 $DE=1$ ， $CE=2$ ， $CF=6$ ，即可求出 AN 。

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
 ∴ A 点与 C 点关于 BD 对称，
 ∴ $CM=AM$ ，
 ∴ $MN+CM=MN+AM \geq AN$ ，
 ∴ 当 A 、 M 、 N 三点共线时， $MN+CM$ 的值最小，
 ∵ $AD \parallel CF$ ，
 ∴ $\angle DAE = \angle F$ ，
 ∵ $\angle DAE + \angle DEH = 90^\circ$ ，
 ∵ $DG \perp AF$ ，
 ∴ $\angle CDG + \angle DEH = 90^\circ$ ，
 ∴ $\angle DAE = \angle CDG$ ，
 ∴ $\angle CDG = \angle F$ ，
 ∴ $\triangle DCG \sim \triangle FCE$ ，
 ∴ $\frac{S_{\triangle DCG}}{S_{\triangle FCE}} = \frac{1}{4}$ ，
 ∴ $\frac{CD}{CF} = \frac{1}{2}$ ，
 ∵ 正方形边长为 3，
 ∴ $CF=6$ ，

$\because AD \parallel CF$,

$$\frac{AD}{CF} = \frac{DE}{CE} = \frac{1}{2},$$

$\therefore DE=1, CE=2$,

在 $Rt\triangle CEF$ 中, $EF^2 = CE^2 + CF^2$,

$$\therefore EF = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10},$$

$\because N$ 是 EF 的中点,

$$EN = \sqrt{10},$$

在 $Rt\triangle ADE$ 中, $EA^2 = AD^2 + DE^2$,

$$\therefore AE = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore AN = 2\sqrt{10},$$

$\therefore MN+MC$ 的最小值为 $2\sqrt{10}$.

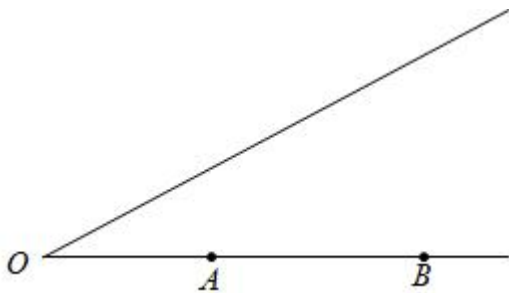
故答案为: $2\sqrt{10}$.

【点睛】本题考查轴对称求最短距离, 熟练掌握正方形的性质, 用轴对称求最短距离的方法, 灵活应用三角形相似、勾股定理是解题的关键.

三、作图题 (本大题满分 4 分)

15. 已知: $\angle O$ 及其一边上的两点 A, B .

求作: $Rt\triangle ABC$, 使 $\angle C = 90^\circ$, 且点 C 在 $\angle O$ 内部, $\angle BAC = \angle O$.



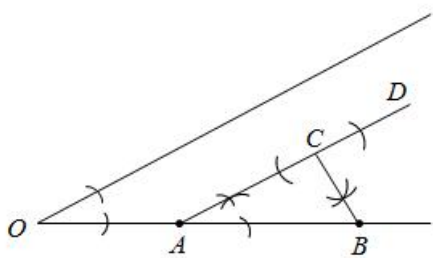
【15 题答案】

【答案】见解析

【解析】

【分析】先在 $\angle O$ 的内部作 $\angle DAB = \angle O$, 再过 B 点作 AD 的垂线, 垂足为 C 点.

【详解】解: 如图, $Rt\triangle ABC$ 为所作.



【点睛】本题考查了作图-复杂作图：解决此类题目的关键是熟悉基本几何图形的性质，结合几何图形的基本性质把复杂作图拆解成基本作图，逐步操作.

四、解答题（本大题共 9 小题，共 74 分）

16. (1) 计算: $\left(x + \frac{2x+1}{x}\right) \div \frac{x^2-1}{x}$;

(2) 解不等式组: $\begin{cases} 1-2x \leq 3 \\ \frac{3x-2}{4} < 1 \end{cases}$, 并写出它的整数解.

【16 题答案】

【答案】(1) $\frac{x+1}{x-1}$; (2) $-1 \leq x < 2$, 整数解为 -1, 0, 1

【解析】

【分析】(1)根据分式的混合运算顺序和运算法则化简原式即可;

(2)首先分别求出两个不等式的解集, 注意不等式②要改变不等号方向, 再利用不等式取解集的方法, 即可求出解集.

【详解】(1) 解: 原式 $= \frac{x^2 + 2x + 1}{x} \div \frac{x^2 - 1}{x}$

$$= \frac{(x+1)^2}{x} \cdot \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{x+1}{x-1}.$$

(2) 解: 解不等式①得: $x \geq -1$,

解不等式②得: $x < 2$,

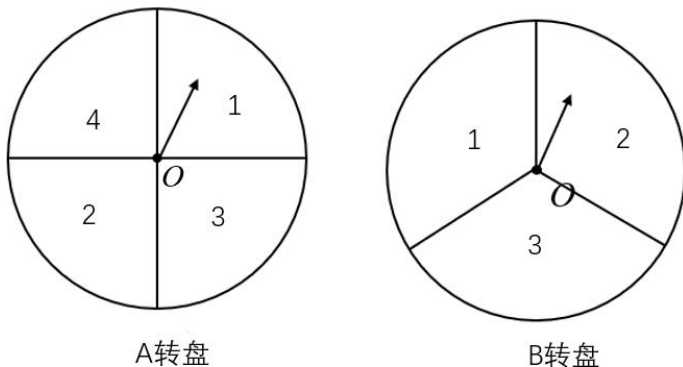
$\therefore$ 不等式组的解集为 $-1 \leq x < 2$.

$\therefore$ 不等式组的整数解为 -1, 0, 1.

【点睛】本题考查的主要知识点是分式的混合运算顺序、运算法则化以及一元一次不等式组的解法, 解题的关键是掌握分式混合运算顺序、运算法则和一元一次不等式组的解法.

17. 为践行青岛市中小学生“十个一”行动, 某校举行文艺表演, 小静和小丽想合唱一首歌. 小静想唱《红

旗飘飘》，而小丽想唱《大海啊，故乡》。她们想通过做游戏的方式来决定合唱哪一首歌，于是一起设计了一个游戏：下面是两个可以自由转动的转盘，每个转盘被分成面积相等的几个扇形。同时转动两个转盘，若两个指针指向的数字之积小于4，则合唱《大海啊，故乡》，否则合唱《红旗飘飘》；若指针刚好落在分割线上，则需要重新转动转盘。请用列表或画树状图的方法说明这个游戏是否公平。



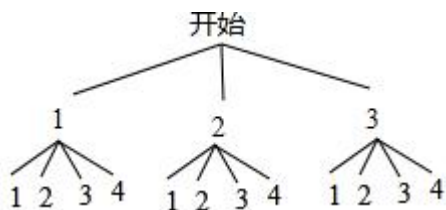
【17 题答案】

【答案】不公平，见解析

【解析】

【分析】首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与数字之积小于4的情况，再利用概率公式求出合唱《大海啊，故乡》和合唱《红旗飘飘》的概率，然后进行比较，即可得出答案。

【详解】解：根据题意画树状图如下：



∴共有12种等可能的结果，其中数字之积小于4的有5种结果，

∴合唱《大海啊，故乡》的概率是 $\frac{5}{12}$ ，

∴合唱《红旗飘飘》的概率是 $\frac{7}{12}$ ，

∴ $\frac{5}{12} < \frac{7}{12}$ ，

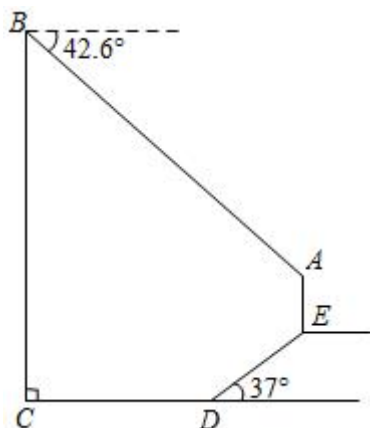
∴游戏不公平。

【点睛】本题考查的是游戏公平性的判断。判断游戏公平性就要计算每个事件的概率，概率相等就公平，否则就不公平。

18. 某校数学社团开展“探索生活中的数学”研学活动，准备测量一栋大楼BC的高度。如图所示，其中观景平台斜坡DE的长是20米，坡角为 37° ，斜坡DE底部D与大楼底端C的距离CD为74米，与地面CD

垂直的路灯 AE 的高度是 3 米, 从楼顶 B 测得路灯 AE 顶端 A 处的俯角是 42.6° . 试求大楼 BC 的高度.

(参考数据: $\sin 37^\circ \approx \frac{3}{5}$, $\cos 37^\circ \approx \frac{4}{5}$, $\tan 37^\circ \approx \frac{3}{4}$, $\sin 42.6^\circ \approx \frac{17}{25}$, $\cos 42.6^\circ \approx \frac{34}{45}$, $\tan 42.6^\circ \approx \frac{9}{10}$)



【18 题答案】

【答案】96 米

【解析】

【分析】延长 AE 交 CD 延长线于 M , 过 A 作 $AN \perp BC$ 于 N , 则四边形 $AMCN$ 是矩形, 得 $NC=AM$, $AN=MC$, 由锐角三角函数定义求出 EM 、 DM 的长, 得出 AN 的长, 然后由锐角三角函数求出 BN 的长, 即可求解.

【详解】延长 AE 交 CD 于点 M ,

过点 A 作 $AN \perp BC$, 交 BC 于点 N ,

由题意得, $\angle AMC = \angle NCM = \angle ANC = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $AMCN$ 为矩形,

$\therefore NC = AM$, $NA = CM$.

在 $Rt\triangle EMD$ 中, $\angle EMD = 90^\circ$,

$$\therefore \sin \angle EDM = \frac{EM}{ED}, \quad \cos \angle EDM = \frac{DM}{ED},$$

$$\therefore \sin 37^\circ = \frac{EM}{20}, \quad \cos 37^\circ = \frac{DM}{20},$$

$$\therefore EM = 20 \cdot \sin 37^\circ \approx 20 \times \frac{3}{5} = 12,$$

$$\therefore DM = 20 \cdot \cos 37^\circ \approx 20 \times \frac{4}{5} = 16.$$

在 $Rt\triangle BNA$ 中, $\angle BNA = 90^\circ$,

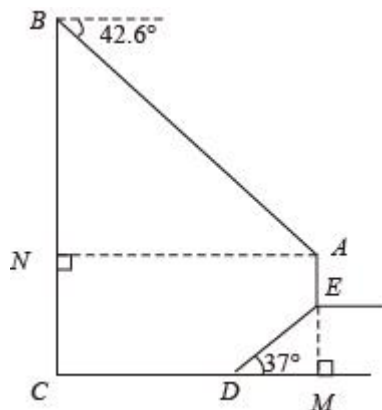
$$\therefore \tan \angle BAN = \frac{BN}{AN},$$

$$\therefore \tan 42.6^\circ = \frac{BN}{74+16},$$

$$\therefore BN = 90 \tan 42.6^\circ \approx 90 \times \frac{9}{10} = 81,$$

$$\therefore BC = BN + AE + EM = 81 + 3 + 12 = 96.$$

答: 大楼 BC 的高度约为 96 米.



【点睛】 本题考查的是解直角三角形的应用-仰角俯角问题，坡度坡角问题，根据题意作出辅助线，构造出直角三角形是解答此题的关键.

19. 在中国共产党成立一百周年之际，某校举行了以“童心向党”为主题的知识竞赛活动. 发现该校全体学生的竞赛成绩（百分制）均不低于 60 分，现从中随机抽取 n 名学生的竞赛成绩进行整理和分析（成绩得分用 x 表示，共分成四组），并绘制成如下的竞赛成绩分组统计表和扇形统计图. 其中“ $90 \leq x \leq 100$ ”这组的数据如下：

90, 92, 93, 95, 95, 96, 96, 96, 97, 100.

竞赛成绩分组统计表

组别	竞赛成绩分组	频数	平均分
1	$60 \leq x < 70$	8	65
2	$70 \leq x < 80$	a	75
3	$80 \leq x < 90$	b	88
4	$90 \leq x \leq 100$	10	95

竞赛成绩扇形统计图



请根据以上信息，解答下列问题：

- (1) $a =$ _____;
- (2) “ $90 \leq x \leq 100$ ”这组数据的众数是_____分;
- (3) 随机抽取的这 n 名学生竞赛成绩的平均分是_____分;
- (4) 若学生竞赛成绩达到 96 分以上 (含 96 分) 获奖, 请你估计全校 1200 名学生中获奖的人数.

【19 题答案】

【答案】(1) 12; (2) 96; (3) 82.6; (4) 120 人

【解析】

【分析】(1) 先由 1 组的信息求解总人数, 再利用总人数乘以 24%, 可得 a 的值;(2) 由 $90 \leq x \leq 100$ 这一组出现次数最多的是: 96 分, 从而可得答案;(3) 先求解 b 的值, 再求解 50 人的总得分, 再除以总人数即可得到答案;

(4) 由 1200 乘以 96 分及 96 分以上的学生的占比即可得到答案.

【详解】解: (1) 由扇形图可得: 1 组频数为 8 人, 占比 16%,

所以总人数为: $8 \div 16\% = 50$ 人,

由 2 组占 24%,

所以: $a = 50 \times 24\% = 12$,

故答案为: 12

(2) 由 $90 \leq x \leq 100$ 这一组的数据为: 90, 92, 93, 95, 95, 96, 96, 96, 97, 100.

出现次数最多的是: 96 分,

所以这一组的众数为: 96 分,

故答案为: 96

(3) 由扇形图可得: 3 组占: $1 - 20\% - 16\% - 24\% = 40\%$,所以 $b = 50 \times 40\% = 20$ 人,所以随机抽取的这 50 名学生竞赛成绩的平均分: $\frac{1}{50}(8 \times 65 + 12 \times 75 + 20 \times 88 + 10 \times 95) = 82.6$ 分,

故答案为: 82.6

(4) 由 4 组成绩可得 96 分及 96 分以上的学生有 5 人,

所以全校 1200 名学生中获奖的人数为: $1200 \times \frac{5}{50} = 120$ 人.

【点睛】本题考查的是从扇形图与频数分布表中获取信息, 频数与频率, 利用样本估计总体, 众数的含义, 加权平均数的计算, 熟悉扇形图与频数分布表之间的关联关系是解题的关键.

20. 某超市经销甲、乙两种品牌的洗衣液, 进货时发现, 甲品牌洗衣液每瓶的进价比乙品牌高 6 元, 用 1800

元购进甲品牌洗衣液的数量是用 1800 元购进乙品牌洗衣液数量的 $\frac{4}{5}$. 销售时, 甲品牌洗衣液的售价为 36 元/瓶, 乙品牌洗衣液的售价为 28 元/瓶.

(1) 求两种品牌洗衣液的进价;

(2) 若超市需要购进甲、乙两种品牌的洗衣液共 120 瓶, 且购进两种洗衣液的总成本不超过 3120 元, 超市应购进甲、乙两种品牌洗衣液各多少瓶, 才能在两种洗衣液完全售出后所获利润最大? 最大利润是多少元?

【20 题答案】

【答案】(1) 甲品牌洗衣液进价为 30 元/瓶, 乙品牌洗衣液进价为 24 元/瓶; (2) 购进甲品牌洗衣液 40 瓶, 乙品牌洗衣液 80 瓶时所获利润最大, 最大利润是 560 元

【解析】

【分析】(1) 设甲品牌洗衣液每瓶的进价是 x 元, 则乙品牌洗衣液每瓶的进价是 $(x-6)$ 元, 根据数量=总价 $\div$ 单价, 结合用 1800 元购进乙品牌洗衣液数量的 $\frac{4}{5}$, 即可得出关于 x 的分式方程, 解之经检验后即可得出结论;

(2) 设可以购买 m 瓶乙品牌洗手液, 则可以购买 $(100-m)$ 瓶甲品牌洗手液, 根据总价=单价 $\times$ 数量, 结合总费用不超过 1645 元, 即可得出关于 m 的一元一次不等式, 解之即可得出 m 的取值范围, 再取其中的最大整数即可得出结论.

【详解】解: (1) 设甲品牌洗衣液进价为 x 元/瓶, 则乙品牌洗衣液进价为 $(x-6)$ 元/瓶,

由题意可得, $\frac{1800}{x} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1800}{x-6}$,

解得 $x = 30$,

经检验 $x = 30$ 是原方程的解.

答: 甲品牌洗衣液进价为 30 元/瓶, 乙品牌洗衣液进价为 24 元/瓶.

(2) 设利润为 y 元, 购进甲品牌洗衣液 m 瓶,

则购进乙品牌洗衣液 $(120-m)$ 瓶,

由题意可得, $30m + 24(120-m) \leq 3120$,

解得 $m \leq 40$,

由题意可得, $y = (36-30)m + (28-24)(120-m) = 2m + 480$,

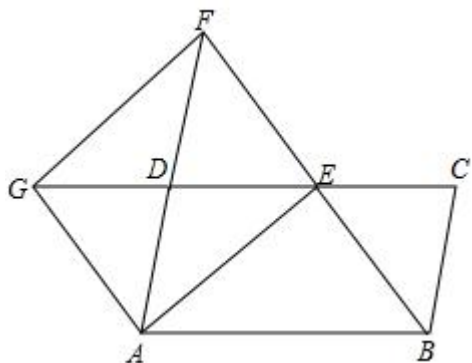
$\because k = 2 > 0$, $\therefore y$ 随 m 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $m = 40$ 时, y 取最大值, $y_{\text{最大值}} = 2 \times 40 + 480 = 560$.

答: 购进甲品牌洗衣液 40 瓶, 乙品牌洗衣液 80 瓶时所获利润最大, 最大利润是 560 元.

【点睛】本题考查分式方程的应用, 一次函数的应用, 一元一次不等式的应用, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题.

21. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, E 为 CD 边的中点, 连接 BE 并延长, 交 AD 的延长线于点 F , 延长 ED 至点 G , 使 $DG = DE$, 分别连接 AE , AG , FG .



(1) 求证: $\triangle BCE \cong \triangle FDE$;

(2) 当 BF 平分 $\angle ABC$ 时, 四边形 $AEFG$ 是什么特殊四边形? 请说明理由.

【21 题答案】

【答案】(1) 见解析; (2) 矩形, 见解析

【解析】

【分析】(1) 利用平行四边形的性质证明 $\angle DFE = \angle CBE$, 利用中点的性质证明 $DE = CE$, 结合对顶角相等, 从而可得结论;

(2) 先证明 $AD = DF$, 结合 $GD = DE$, 证明四边形 $AEFG$ 是平行四边形, 再利用等腰三角形的性质证明 $AE \perp BF$, 从而可得结论.

【详解】(1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, $\therefore \angle DFE = \angle CBE$

又 $\because E$ 为 CD 边的中点,

$\therefore DE = CE$

$\therefore \angle FED = \angle BEC$, $\angle DFE = \angle CBE$, $DE = CE$,

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle FDE$

(2) 答: 四边形 $AEFG$ 是矩形, 理由如下:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD = BC$,

$$\because \triangle FDE \cong \triangle BCE,$$

$$\therefore BC = FD, FE = EB,$$

$$\therefore FD = AD,$$

$$\therefore GD = DE,$$

$\therefore$ 四边形 $AEFG$ 是平行四边形.

$$\therefore BF \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle CBF = \angle ABF.$$

$$\text{又} \because \angle AFB = \angle FBC,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle AFB,$$

$$\therefore AB = AF$$

$$\text{又} \because FE = EB,$$

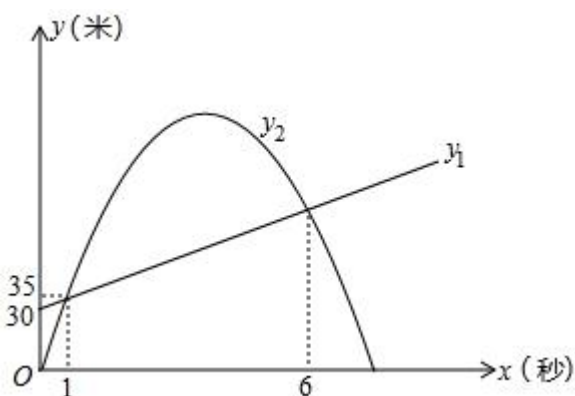
$$\therefore AE \perp FE,$$

$$\therefore \angle AEF = 90^\circ,$$

$\therefore AEEFG$ 是矩形

【点睛】 本题考查的是三角形全等的判定与性质，平行四边形的性质与判定，矩形的判定，等腰三角形的判定与性质，掌握“有一个角是直角的平行四边形是矩形”是证题的关键.

22. 科研人员为了研究弹射器的某项性能，利用无人机测量小钢球竖直向上运动的相关数据. 无人机上升到离地面 30 米处开始保持匀速竖直上升，此时，在地面用弹射器（高度不计）竖直向上弹射一个小钢球（忽略空气阻力），在 1 秒时，它们距离地面都是 35 米，在 6 秒时，它们距离地面的高度也相同. 其中无人机离地面高度 y_1 （米）与小钢球运动时间 x （秒）之间的函数关系如图所示；小钢球离地面高度 y_2 （米）与它的运动时间 x （秒）之间的函数关系如图中抛物线所示.



(1) 直接写出 y_1 与 x 之间的函数关系式;

(2) 求出 y_2 与 x 之间的函数关系式;

(3) 小钢球弹射 1 秒后直至落地时, 小钢球和无人机的高度差最大是多少米?

【22 题答案】

【答案】(1) $y_1 = 5x + 30$; (2) $y_2 = -5x^2 + 40x$; (3) 70 米

【解析】

【分析】(1) 先设出一次函数的解析式, 再用待定系数法求函数解析式即可;

(2) 用待定系数法求函数解析式即可;

(3) 当 $1 < x \leq 6$ 时小钢球在无人机上方, 因此求 $y_2 - y_1$, 当 $6 < x \leq 8$ 时, 无人机在小钢球的上方, 因此求 $y_1 - y_2$, 然后进行比较判断即可.

【详解】解: (1) 设 y_1 与 x 之间的函数关系式为 $y_1 = kx + b'$,

$\therefore$ 函数图象过点 $(0, 30)$ 和 $(1, 35)$,

$$\text{则} \begin{cases} k + b' = 35 \\ b' = 30 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 5 \\ b' = 30 \end{cases},$$

$\therefore y_1$ 与 x 之间的函数关系式为 $y_1 = 5x + 30$.

(2) $\therefore x = 6$ 时, $y_1 = 5 \times 6 + 30 = 60$,

$\therefore y_2$ 的图象是过原点的抛物线,

$\therefore$ 设 $y_2 = ax^2 + bx$,

$\therefore$ 点 $(1, 35)$, $(6, 60)$ 在抛物线 $y_2 = ax^2 + bx$ 上.

$$\therefore \begin{cases} a + b = 35 \\ 36a + 6b = 60 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a + b = 35 \\ 6a + b = 10 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -5 \\ b = 40 \end{cases},$$

$\therefore y_2 = -5x^2 + 40x$.

答: y_2 与 x 的函数关系式为 $y_2 = -5x^2 + 40x$.

(3) 设小钢球和无人机的高度差为 y 米,

由 $-5x^2 + 40x = 0$ 得 $x_1 = 0$ 或 $x_2 = 8$.

① $1 < x \leq 6$ 时,

$$y = y_2 - y_1$$

$$= -5x^2 + 40x - 5x - 30$$

$$= -5x^2 + 35x - 30$$

$$= -5\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{125}{4},$$

$\because a = -5 < 0$, $\therefore$ 抛物线开口向下,

又 $\because 1 < x \leq 6$,

$\therefore$ 当 $x = \frac{7}{2}$ 时, y 的最大值为 $\frac{125}{4}$;

② $6 < x \leq 8$ 时,

$$y = y_1 - y_2$$

$$= 5x + 30 + 5x^2 - 40x$$

$$= 5x^2 - 35x + 30$$

$$= 5\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{125}{4},$$

$\because a = 5 > 0$, $\therefore$ 抛物线开口向上,

又 $\because$ 对称轴是直线 $x = \frac{7}{2}$,

$\therefore$ 当 $x > \frac{7}{2}$ 时, y 随 x 的增大而增大,

$\because 6 < x \leq 8$,

$\therefore$ 当 $x = 8$ 时, y 的最大值为 70.

$\because \frac{125}{4} < 70$,

$\therefore$ 高度差的最大值为 70 米.

答: 高度差的最大值为 70 米.

【点睛】 本题考查了二次函数以及一次函数的应用, 关键是根据实际情况判断无人机和小钢球的高度差.

23. 问题提出:

最长边长为 128 的整数边三角形有多少个? (整数边三角形是指三边长度都是整数的三角形.)

问题探究:

为了探究规律, 我们先从最简单的情形入手, 从中找到解决问题的方法, 最后得出一般性的结论.

(1) 如表①, 最长边长为 1 的整数边三角形, 显然, 最短边长是 1, 第三边长也是 1. 按照 (最长边长, 最短边长, 第三边长) 的形式记为 $(1,1,1)$, 有 1 个, 所以总共有 $1 \times 1 = 1$ 个整数边三角形.

表①

最长边长	最短边长	(最长边长, 最短边长, 第三边长)	整数边三角形个数	计算方法	算式
1	1	$(1,1,1)$	1	1 个 1	1×1

(2) 如表②, 最长边长为 2 的整数边三角形, 最短边长是 1 或 2. 根据三角形任意两边之和大于第三边, 当最短边长为 1 时, 第三边长只能是 2, 记为 $(2,1,2)$, 有 1 个; 当最短边长为 2 时, 显然第三边长也是 2, 记为 $(2,2,2)$, 有 1 个, 所以总共有 $1+1=1 \times 2 = 2$ 个整数边三角形.

表②

最长边长	最短边长	(最长边长, 最短边长, 第三边长)	整数边三角形个数	计算方法	算式
2	1	$(2,1,2)$	1	2 个 1	1×2
	2	$(2,2,2)$	1		

(3) 下面在表③中总结最长边长为 3 的整数边三角形个数情况:

表③

最长边长	最短边长	(最长边长, 最短边长, 第三边长)	整数边三角形个数	计算方法	算式
3	1	$(3,1,3)$	1	2 个 2	2×2
	2	$(3,2,2), (3,2,3)$	2		
	3	$(3,3,3)$	1		

(4) 下面在表④中总结最长边长为 4 的整数边三角形个数情况:

表④

最长边长	最短边长	(最长边长, 最短边长, 第三边长)	整数边三角形个数	计算方法	算式
4	1	$(4,1,4)$	1	3 个 2	2×3

	2	$(4,2,3), (4,2,4)$	2		
	3	$(4,3,3), (4,3,4)$	2		
	4	$(4,4,4)$	1		

(5) 请在表⑤中总结最长边长为 5 的整数边三角形个数情况并填空:

表⑤

最长边长	最短边长	(最长边长, 最短边长, 第三边长)	整数边三角形个数	计算方法	算式
5	1	$(5,1,5)$	1	---	---
	2	$(5,2,4), (5,2,5)$	2		
	3	-----	-----		
	4	$(5,4,4), (5,4,5)$	2		
	5	$(5,5,5)$	1		

问题解决:

(1) 最长边长为 6 的整数边三角形有_____个.

(2) 在整数边三角形中, 设最长边长为 n , 总结上述探究过程, 当 n 为奇数或 n 为偶数时, 整数边三角形个数的规律一样吗? 请写出最长边长为 n 的整数边三角形的个数.

(3) 最长边长为 128 的整数边三角形有_____个.

拓展延伸:

在直三棱柱中, 若所有棱长均为整数, 则最长棱长为 9 的直三棱柱有_____个.

【23 题答案】

【答案】问题探究: 见解析; 问题解决: (1) 12; (2) 当 n 为奇数时, 整数边三角形个数为 $\frac{(n+1)^2}{4}$; 当 n 为偶数时, 整数边三角形个数为 $\frac{n(n+2)}{4}$; (3) 4160; 拓展延伸: 295

【解析】

【分析】问题探究:

根据 (1) (2) (3) (4) 的具体推算, 总结出相同的规律, 按规律填好表格即可;

问题解决:

(1) 由最长边长分别为 1, 2, 3, 4, 5 总结出能反应规律的算式, 再根据规律直接写出最长边长为 6 时的三角形的个数;

(2) 分两种情况讨论: 当 n 为奇数, 当 n 为偶数, 再从具体到一般进行推导即可;

(3) 当最长边长 $n=128$ 时, n 为偶数, 再代入 $\frac{n(n+2)}{4}$ 进行计算, 即可得到答案;

拓展延伸:

分两种情况讨论: 当 9 是底边的棱长时, 由最长边长为 9 的三角形个数有: $\frac{(n+1)^2}{4} = \frac{100}{4} = 25$ 个, 当 9

是侧棱长时, 底边三角形的最长边可以为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 底边三角形共有:

$1+2+4+6+9+12+16+20=70$ 个, 从而可得答案.

【详解】解: 问题探究:

最长边 长	最短边 长	(最长边长, 最短边长, 第三边 长)	整数边三角形 个数	计算方 法	算式
5	3	(5,3,3), (5,3,4), (5,3,5)	3	3 个 3	3×3

问题解决:

(1) 最长边长为 1 的三角形有: 1×1 个,

最长边长为 2 的三角形有: 1×2 个,

最长边长为 3 的三角形有: 2×2 个,

最长边长为 4 的三角形有: 2×3 个,

最长边长为 5 的三角形有: 3×3 个,

所以最长边长为 6 的三角形有: $3 \times 4 = 12$ 个,

故答案为: 12

(2) 由 (1) 得:

最长边长为 1 的三角形有: $1 \times 1 = 1^2 = \left(\frac{1+1}{2}\right)^2$ 个,

最长边长为 3 的三角形有: $2 \times 2 = 2^2 = \left(\frac{3+1}{2}\right)^2$ 个,

最长边长为 5 的三角形有: $3 \times 3 = 3^2 = \left(\frac{5+1}{2}\right)^2$ 个,

•••

所以当 n 为奇数时, 整数边三角形个数为 $\frac{(n+1)^2}{4}$;

最长边长为 2 的三角形有: $1 \times 2 = \frac{2}{2} \times \frac{2+2}{2}$ 个,

最长边长为 4 的三角形有: $2 \times 3 = \frac{4}{2} \times \frac{4+2}{2}$ 个,

最长边长为 6 的三角形有: $3 \times 4 = \frac{6}{2} \times \frac{6+2}{2}$ 个,

•••

所以当 n 为偶数时, 整数边三角形个数为 $\frac{n(n+2)}{4}$.

(3) 当最长边长 $n=128$ 时, n 为偶数,

可得此时的三角形个数为: $\frac{n(n+2)}{4} = \frac{128(128+2)}{2} = 64 \times 130 = 4160$.

故答案为: 4160

拓展延伸:

当 9 是底边的棱长时,

最长边长为 9 的三角形个数有: $\frac{(n+1)^2}{4} = \frac{100}{4} = 25$ 个,

而直三棱柱的高分别为: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

所以这样的直三棱柱共有: $25 \times 9 = 225$ 个,

当 9 是侧棱长时, 底边三角形的最长边可以为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

底边三角形共有: $1+2+4+6+9+12+16+20 = 70$ 个,

所以这样的直三棱柱共有: 70 个,

综上, 满足条件的直三棱柱共有 $225 + 70 = 295$ 个.

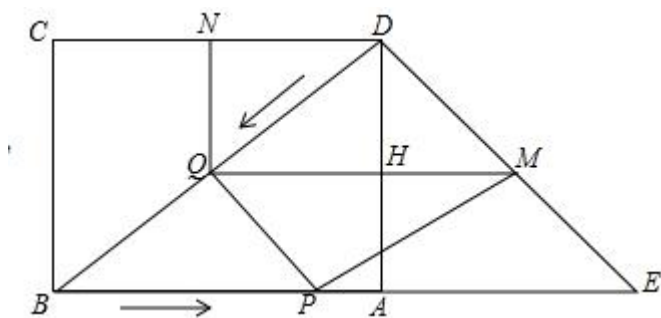
故答案为: 295.

【点睛】 本题考查的是学生的阅读理解能力, 探究规律的方法, 并运用规律解决问题, 同时考查了立体图形的含义, 三角形的三边关系, 看懂题意, 掌握探究方法, 运用规律的能力都是解题的关键.

24. 已知: 如图, 在矩形 $ABCD$ 和等腰 $Rt\triangle ADE$ 中, $AB = 8\text{cm}$, $AD = AE = 6\text{cm}$, $\angle DAE = 90^\circ$. 点 P 从点 B 出发, 沿 BA 方向匀速运动. 速度为 1cm/s ; 同时, 点 Q 从点 D 出发, 沿 DB 方向匀速运动, 速

度为 1cm/s . 过点 Q 作 $QM \parallel BE$, 交 AD 于点 H , 交 DE 于点 M , 过点 Q 作 $QN \parallel BC$, 交 CD 于点 N . 分别连接 PQ , PM , 设运动时间为 $t(\text{s}) (0 < t < 8)$.

解答下列问题:



- (1) 当 $PQ \perp BD$ 时, 求 t 的值;
- (2) 设五边形 $PMDNQ$ 的面积为 $S(\text{cm}^2)$, 求 S 与 t 之间的函数关系式;
- (3) 当 $PQ = PM$ 时, 求 t 的值;
- (4) 若 PM 与 AD 相交于点 W , 分别连接 QW 和 EW . 在运动过程中, 是否存在某一时刻 t , 使 $\angle AWE = \angle QWD$? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

【24 题答案】

【答案】(1) $\frac{50}{9}\text{s}$; (2) $S = \frac{6}{25}t^2 + \frac{21}{5}t$; (3) $t = \frac{80}{11}$; (4) 存在, $t = \frac{7}{2}\text{s}$

【解析】

【分析】(1) 先证 $\triangle BPQ \sim \triangle BDA$, 得 $\frac{BP}{BD} = \frac{BQ}{BA}$ 代数计算即可;

(2) 如图 2 中, 过点 P 作 $PO \perp QM$ 于点 O . 证明 $S = S_{\text{四边形} DQPM} + S_{\triangle DNQ} = \frac{1}{2} (PQ + DH) \cdot QM + \frac{1}{2} QN \cdot ND = \frac{1}{2} (HA + DH) \cdot QM + \frac{1}{2} QN \cdot ND = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot QM + \frac{1}{2} QN \cdot ND$, 可得结论.

(3) 如图 3 中, 延长 NQ 交 BE 于点 G . 根据 $PQ = PM$, 构建方程求解即可.

(4) 存在. 证明 $\triangle HQW \sim \triangle AEW$, $\triangle MHW \sim \triangle PAW$, 推出 $\frac{QH}{AE} = \frac{HW}{WA}$, $\frac{HM}{PA} = \frac{HW}{WA}$, 推出 $\frac{QH}{AE} = \frac{HM}{PA}$, 由此构建方程求解即可

【详解】(1) 由题意可得, $BP = t$, $DQ = t$,

在矩形 $ABCD$ 中,

$$\therefore AB = 8, \quad BC = AD = 6,$$

$$\angle CBA = \angle BCD = \angle BAD = 90^\circ,$$

在 $Rt\triangle BCD$ 中, $\angle BCD = 90^\circ$,

$$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$$\therefore BQ = 10 - t,$$

$$\therefore PQ \perp BD,$$

$$\therefore \angle BQP = \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle DBE = \angle DBE,$$

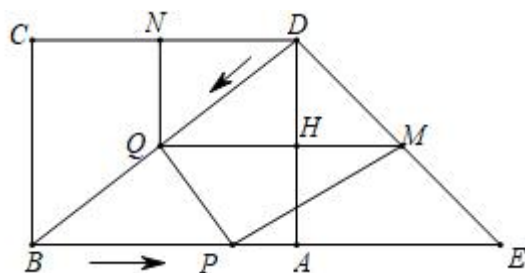
$$\therefore \triangle BPQ \sim \triangle BDA,$$

$$\therefore \frac{BP}{BD} = \frac{BQ}{BA},$$

$$\therefore \frac{t}{10} = \frac{10-t}{8},$$

$$\therefore t = \frac{50}{9}.$$

答: t 为 $\frac{50}{9}$ s 时, $PQ \perp BD$.



(2) 过点 P 作 $PO \perp QM$, 交 QM 于点 O ,

在等腰 $Rt\triangle ADE$ 中,

$$AD = AE = 6, \quad \angle EAD = 90^\circ,$$

$$\text{则 } BE = BA + AE = 14.$$

$$\therefore QM \parallel BE,$$

$$\therefore \angle POH = \angle PAH = \angle OHA = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $OPAH$ 是矩形,

$$\therefore PO = AH.$$

$$\therefore QM \parallel EB,$$

$$\therefore \angle DQM = \angle DBE,$$

$\therefore NQHD$ 为矩形,

$\therefore QH = DN = \frac{4}{5}t$, 且 $\angle QHD = 90^\circ$.

$\therefore \angle QHA = \angle DAE = 90^\circ$,

$\therefore \angle AWE = \angle QWD$,

$\therefore \triangle HQW \sim \triangle AEW$,

同理可证 $\triangle MHW \sim \triangle PAW$,

$$\therefore \frac{QH}{AE} = \frac{HW}{WA}, \quad \frac{HM}{PA} = \frac{HW}{WA},$$

$$\therefore \frac{QH}{AE} = \frac{HM}{PA},$$

$$\therefore \frac{\frac{4}{5}t}{6} = \frac{\frac{7}{5}t - \frac{4}{5}t}{8-t},$$

$$\therefore t = \frac{7}{2}.$$

答: 在运动的过程中, 存在时刻 $t = \frac{7}{2}\text{s}$, 使 $\angle AWE = \angle QWD$.

【点睛】 本题属于四边形综合题, 考查了矩形的判定和性质, 相似三角形的判定和性质, 解直角三角形等知识, 解题的关键是学会利用参数构建方程解决问题.

