

2024 年湖北省中考数学试卷

一、选择题 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. 在生产生活中, 正数和负数都有现实意义. 例如收入 20 元记作 $+20$ 元, 则支出 10 元记作 ()

- A. $+10$ 元 B. -10 元 C. $+20$ 元 D. -20 元

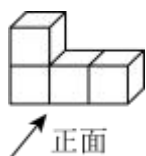
【答案】B

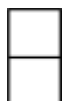
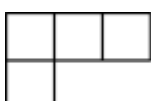
【解析】

【分析】本题主要考查了正负数的意义, 解题关键是理解“正”和“负”的相对性, 明确什么是一对具有相反意义的量. 在一对具有相反意义的量中, 先规定其中一个为正, 则另一个就用负表示. 首先审清题意, 明确“正”和“负”所表示的意义; 再根据题意作答.

【详解】解: 如果收入 20 元记作 $+20$ 元, 那么支出 10 元记作 -10 元,
故选: B.

2. 如图, 是由 4 个相同的正方体组成的立方体图形, 其主视图是 ()



- A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了简单组合体的三视图. 根据主视图的意义, 从正面看该组合体所得到的图形对每一项判断即可.

【详解】解: 从正面看该组合体, 所看到的主视图与选项 A 相同,
故选: A.

3. $2x \cdot 3x^2$ 的值是 ()

- A. $5x^3$ B. $5x^2$ C. $6x^2$ D. $6x^3$

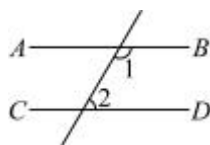
【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查单项式与单项式的乘法. 运用单项式乘单项式运算法则求出结果即可判断.

【详解】解: $2x \cdot 3x^2 = 6x^3$,
故选: D.

4. 如图, 直线 $AB \parallel CD$, 已知 $\angle 1 = 120^\circ$, 则 $\angle 2 =$ ()



【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

- A. 50° B. 60° C. 70° D. 80°

【答案】B

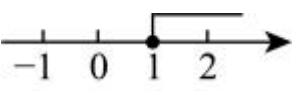
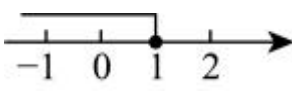
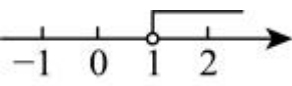
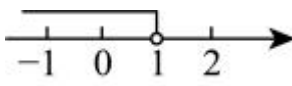
【解析】

【分析】本题主要考查了平行线的性质，解题的关键是熟练掌握平行线的性质，两直线平行，同位角相等；两直线平行，内错角相等；两直线平行，同旁内角互补．根据同旁内角互补， $\angle 1 = 120^\circ$ ，求出结果即可．

【详解】解： $\because AB \parallel CD$ ，
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ，
 $\therefore \angle 1 = 120^\circ$ ，
 $\therefore \angle 2 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ，

故选：B.

5. 不等式 $x+1 \geq 2$ 的解集在数轴上表示为 ()

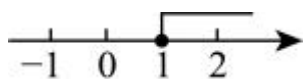
- A.  B. 
C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一元一次不等式的解法即在数轴上表示不等式的解集．根据一元一次不等式的性质解出未知数的取值范围，在数轴上表示即可求出答案．

【详解】解： $\because x+1 \geq 2$ ，
 $\therefore x \geq 1$ ．
 $\therefore$ 在数轴上表示如图所示：



故选：A.

6. 下列各事件是，是必然事件的是 ()

- A. 掷一枚正方体骰子，正面朝上恰好是 3 B. 某同学投篮球，一定投不中
C. 经过红绿灯路口时，一定是红灯 D. 画一个三角形，其内角和为 180°

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了随机事件和必然事件，解题的关键是掌握一定会发生的是必然事件，有可能发生，也有可能不发生的是随机事件，据此逐个判断即可．

【详解】解：A、掷一枚正方体骰子，正面朝上恰好是 3，是随机事件，不符合题意；
B、某同学投篮球，一定投不中，是随机事件，不符合题意；

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

C、经过红绿灯路口时，一定是红灯，是随机事件，不符合题意；

D、画一个三角形，其内角和为 180° ，是必然事件，符合题意；

故选：D.

7.《九章算术》中记载这样一个题：牛 5 头和羊 2 只共值 10 金，牛 2 头和羊 5 只共值 8 金，问牛和羊各值多少金？设每头牛值 x 金，每只羊值 y 金，可列方程为（ ）

A.
$$\begin{cases} 5x+2y=10 \\ 2x+5y=8 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} 2x+5y=10 \\ 5x+2y=8 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} 5x+5y=10 \\ 2x+5y=8 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} 5x+2y=10 \\ 2x+2y=8 \end{cases}$$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了二元一次方程组的应用. 根据未知数，将今有牛 5 头，羊 2 头，共值 10 金；牛 2 头，羊 5 头，共值 8 金，两个等量关系具体化，联立即可.

【详解】解：设每头牛值 x 金，每头羊值 y 金，

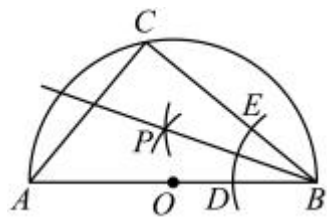
$\therefore$ 牛 5 头，羊 2 头，共值 10 金；牛 2 头，羊 5 头，共值 8 金，

$$\therefore \begin{cases} 5x+2y=10 \\ 2x+5y=8 \end{cases},$$

故选：A.

8. AB 为半圆 O 的直径，点 C 为半圆上一点，且 $\angle CAB = 50^\circ$. ①以点 B 为圆心，适当长为半径作弧，

交 AB, BC 于 D, E ；②分别以 DE 为圆心，大于 $\frac{1}{2}DE$ 为半径作弧，两弧交于点 P ；③作射线 BP ，则 $\angle ABP =$ （ ）



A. 40°

B. 25°

C. 20°

D. 15°

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查圆周角定理以及角平分线定义，根据直径所对的圆周角是直角可求出

$\angle ABC = 40^\circ$ ，根据作图可得 $\angle ABP = \frac{1}{2} \angle ABC = 20^\circ$ ，故可得答案

【详解】解： $\because AB$ 为半圆 O 的直径，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ，

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore \angle CAB = 50^\circ,$$

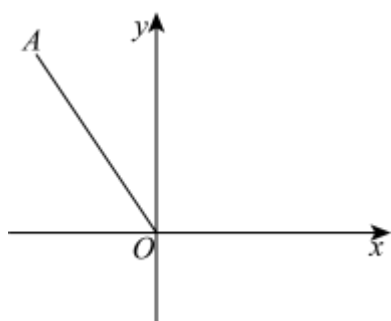
$$\therefore \angle ABC = 40^\circ,$$

由作图知， AP 是 $\angle ABC$ 的角平分线，

$$\therefore \angle ABP = \frac{1}{2} \angle ABC = 20^\circ,$$

故选：C

9. 平面坐标系 xOy 中，点 A 的坐标为 $(-4, 6)$ ，将线段 OA 绕点 O 顺时针旋转 90° ，则点 A 的对应点 A' 的坐标为 ()



A. $(4, 6)$

B. $(6, 4)$

C. $(-4, -6)$

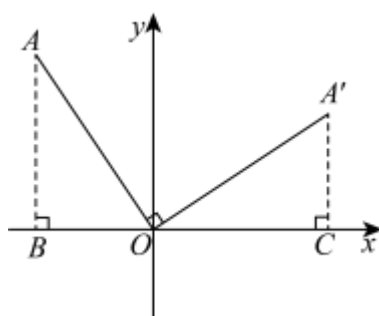
D. $(-6, -4)$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查坐标系下的旋转. 过点 A 和点 A' 分别作 x 轴的垂线，证明 $\triangle AOB \cong \triangle OA'C$ (AAS)，得到 $A'C = OB = 4$ ， $OC = AB = 6$ ，据此求解即可.

【详解】解：过点 A 和点 A' 分别作 x 轴的垂线，垂足分别为 B ， C ，



$$\therefore \text{点 } A \text{ 的坐标为 } (-4, 6),$$

$$\therefore OB = 4, \quad AB = 6,$$

$$\therefore \text{将线段 } OA \text{ 绕点 } O \text{ 顺时针旋转 } 90^\circ \text{ 得到 } OA',$$

$$\therefore OA = OA', \quad \angle AOA' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ - \angle A'OC = \angle OA'C,$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle OA'C \text{ (AAS)},$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore A'C = OB = 4, \quad OC = AB = 6,$$

$\therefore$ 点 A' 的坐标为 $(6, 4)$,

故选：B.

10. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点为 $(-1, -2)$ ，抛物线与 y 轴的交点位于 x 轴上方. 以下结论正确的是 ()

A. $a < 0$

B. $c < 0$

C. $a - b + c = -2$

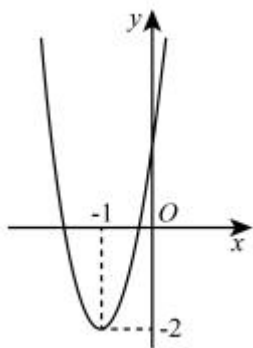
D. $b^2 - 4ac = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的性质以及二次函数图像与系数的关系. 根据二次函数的解析式结合二次函数的性质，画出草图，逐一分析即可得出结论.

【详解】解：根据题意画出函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像，如图所示：



$\therefore$ 开口向上，与 y 轴的交点位于 x 轴上方，

$$\therefore a > 0, \quad c > 0,$$

$\therefore$ 抛物线与 x 轴有两个交点，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac > 0,$$

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点为 $(-1, -2)$,

$$\therefore a - b + c = -2,$$

观察四个选项，选项 C 符合题意，

故选：C.

二、填空题 (每小题 3 分，共 15 分)

11. 写一个比 -1 大的数_____.

【答案】0

【解析】

【分析】本题考查了有理数比较大小. 根据有理数比较大小的方法即可求解.

【详解】解： $-1 < 0$.

故答案为：0 (答案不唯一) .

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

12. 中国古代杰出的数学家祖冲之、刘徽、赵爽、秦九韶、杨辉，从中任选一个，恰好是赵爽是概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查运用概率公式求概率，根据概率公式即可得出答案.

【详解】 解：共有 5 位数学家，赵爽是其中一位，

所以，从中任选一个，恰好是赵爽是概率是 $\frac{1}{5}$ ，

故答案为： $\frac{1}{5}$

13. 计算： $\frac{m}{m+1} + \frac{1}{m+1} =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式的加减运算，直接按同分母分式加减运算法则计算即可.

【详解】 解： $\frac{m}{m+1} + \frac{1}{m+1} = \frac{m+1}{m+1} = 1$

故选： 1.

14. 铁的密度约为 7.9 kg/m^3 ，铁的质量 $m(\text{kg})$ 与体积 $V(\text{m}^3)$ 成正比例. 一个体积为 10 m^3 的铁块，它的质量为_____ kg .

【答案】 79

【解析】

【分析】 本题考查了正比例函数的应用. 根据铁的质量 $m(\text{kg})$ 与体积 $V(\text{m}^3)$ 成正比例，列式计算即可求解.

【详解】 解： $\because$ 铁的质量 $m(\text{kg})$ 与体积 $V(\text{m}^3)$ 成正比例，

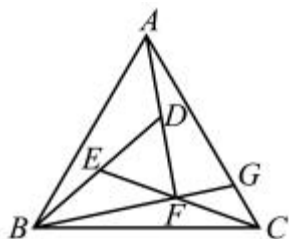
$\therefore m$ 关于 V 的函数解析式为 $m = 7.9V$ ，

当 $V = 10$ 时， $m = 7.9 \times 10 = 79(\text{kg})$ ，

故答案为： 79.

15. $\triangle DEF$ 为等边三角形，分别延长 FD ， DE ， EF ， 到点 A ， B ， C ， 使 $DA = EB = FC$ ， 连接 AB ， AC ， BC ， 连接 BF 并延长交 AC 于点 G . 若 $AD = DF = 2$ ， 则 $\angle DBF =$ _____，
 $FG =$ _____.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

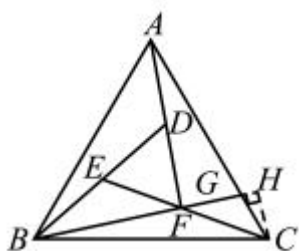


【答案】 ①. 30° ②. $\frac{4}{5}\sqrt{3}$ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定和性质，等边三角形的判定和性质，勾股定理．利用三角形的外角性质结合 $EB = EF$ 可求得 $\angle DBF = 30^\circ$ ；作 $CH \perp BG$ 交 BG 的延长线于点 H ，利用直角三角形的性质求得 $CH = 1$ ， $FH = \sqrt{3}$ ，证明 $\triangle AGF \sim \triangle CGH$ ，利用相似三角形的性质列式计算即可求解．

【详解】 解： $\because \triangle DEF$ 为等边三角形， $DA = EB = FC$ ，
 $\therefore AD = DF = EB = EF = 2$ ， $\angle DEF = \angle DFE = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle DBF = \angle EFB = \frac{1}{2} \angle DEF = 30^\circ$ ， $\angle AFB = \angle EFB + \angle DFE = 90^\circ$ ， $\angle EFB = \angle HFC = 30^\circ$ ，
 作 $CH \perp BG$ 交 BG 的延长线于点 H ，



$\therefore CH = \frac{1}{2} CF = 1$ ， $FH = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ，

$\therefore \angle AFB = \angle H = 90^\circ$ ，

$\therefore AF \parallel CH$ ，

$\therefore \triangle AGF \sim \triangle CGH$ ，

$\therefore \frac{AF}{CH} = \frac{FG}{GH}$ ， 即 $\frac{4}{1} = \frac{FG}{\sqrt{3} - FG}$ ，

解得 $FG = \frac{4}{5}\sqrt{3}$ ，

故答案为： 30° ， $\frac{4}{5}\sqrt{3}$ ．

三、解答题 (75分)

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

16. 计算： $(-1) \times 3 + \sqrt{9} + 2^2 - 2024^0$

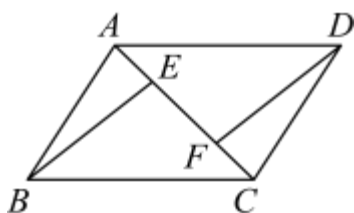
【答案】3

【解析】

【分析】本题主要考查了实数混合运算，根据零指数幂运算法则，算术平方根定义，进行计算即可.

【详解】解： $(-1) \times 3 + \sqrt{9} + 2^2 - 2024^0$
 $= -3 + 3 + 4 - 1$
 $= 3$.

17. 已知：如图， E, F 为 $\square ABCD$ 对角线 AC 上的两点，且 $AE=CF$ ，连接 BE, DF ，求证： $BE=DF$.



【答案】证明见解析.

【解析】

【分析】利用 SAS 证明 $\triangle AEB \cong \triangle CFD$ ，再根据全等三角形的对应边相等即可得.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB \parallel DC, AB=DC,$

$\therefore \angle BAE = \angle DCF,$

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle CFD$ 中，

$$\begin{cases} AB = CD \\ \angle BAE = \angle DCF \\ AE = CF \end{cases},$$

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle CFD$ (SAS) ,

$\therefore BE=DF$.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质以及全等三角形的判定与性质，熟练掌握相关的性质是解题的关键.

18. 小明为了测量树 AB 的高度，经过实地测量，得到两个解决方案：

方案一：如图（1），测得 C 地与树 AB 相距 10 米，眼睛 D 处观测树 AB 的顶端 A 的仰角为 32° ：

方案二：如图（2），测得 C 地与树 AB 相距 10 米，在 C 处放一面镜子，后退 2 米到达点 E ，眼睛 D 在镜子 C 中恰好看到树 AB 的顶端 A .

已知小明身高 1.6 米，试选择一个方案求出树 AB 的高度. （结果保留整数， $\tan 32^\circ \approx 0.64$ ）

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

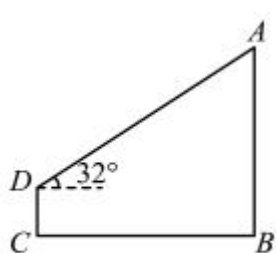


图 (1)

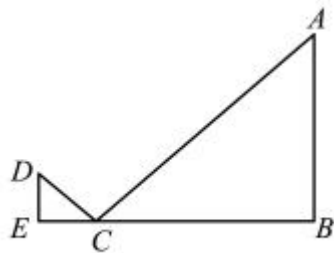


图 (2)

【答案】树 AB 的高度为 8 米

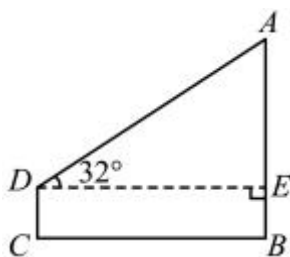
【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的实际应用题，解直角三角形的实际应用题.

方案一：作 $DE \perp AB$ ，在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中，解直角三角形即可求解；

方案二：由光的反射规律知入射角等于反射角得到相似三角形后列出比例式求解即可.

【详解】解：方案一：作 $DE \perp AB$ ，垂足为 E ，



则四边形 $BCDE$ 是矩形，

$\therefore DE = BC = 10$ 米，

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中， $\angle ADE = 32^\circ$ ，

$\therefore AE = DE \cdot \tan 32^\circ \approx 10 \times 0.64 = 6.4$ (米)，

树 AB 的高度为 $6.4 + 1.6 = 8$ 米.

方案二：根据题意可得 $\angle ACB = \angle DCE$ ，

$\therefore \angle B = \angle E = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ACB \sim \triangle DCE$

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CE}$ ，即 $\frac{AB}{1.6} = \frac{10}{2}$

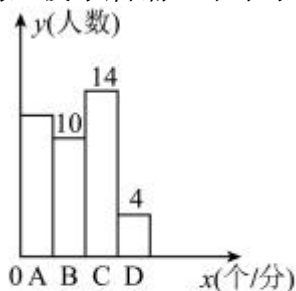
解得： $AB = 8$ 米，

答：树 AB 的高度为 8 米.

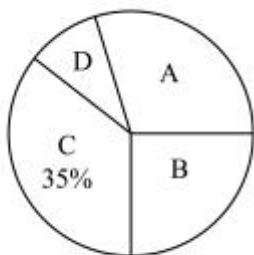
19. 为促进学生全面发展，学校开展了丰富多彩的体育活动. 为了解学生引体向上的训练成果，调查了七

年级部分学生，根据成绩，分成了 $ABCD$ 四组，制成了不完整的统计图. 分组： $0 \leq A < 5$ ，

$5 \leq B < 10$ ， $10 \leq C < 15$ ， $15 \leq D < 20$.



每分钟引体向上个数条形统计图



每分钟引体向上个数扇形统计图

- (1) A 组的人数为_____；
- (2) 七年级 400 人中，估计引体向上每分钟不低于 10 个的有多少人？
- (3) 从众数、中位数、平均数中任选一个，说明其意义。

【答案】 (1) 12 (2) 180

(3) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键。条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小。

- (1) 先根据 C 组人数除以所占百分比求出总人数，再减去 B，C，D 组人数即可得 A 的人数；
- (2) 求出 C，D 组人数在样本中所占百分比，再乘以 400 即可得答案；
- (3) 根据众数、中位数、平均数的意义进行解答即可。

【小问 1 详解】

解： $14 \div 35\% = 40$ (人)，

A 组人数为： $40 - 10 - 14 - 4 = 12$ (人)，

故答案为：12；

【小问 2 详解】

解： $400 \times \frac{14 + 4}{40} = 180$ (人)，

答：估计引体向上每分钟不低于 10 个的有 180 人；

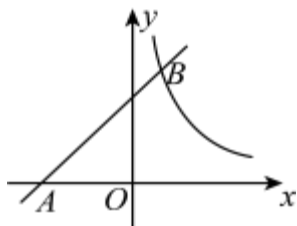
【小问 3 详解】

解：从 A，B，C，D 组人数来看，最中间的两个数据是第 20，21 个，中位数落在 B 组，

说明 B 组靠后的成绩处于中等水平；

由于统计图中没有具体体现学生引体向上的训练成绩，只给出训练成绩的范围，无法计算出训练成绩的众数和平均数。

20. 一次函数 $y = x + m$ 经过点 $A(-3, 0)$ ，交反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 于点 $B(n, 4)$ 。



(1) 求 m , n , k ;

(2) 点 C 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 第一象限的图象上, 若 $S_{\triangle AOC} < S_{\triangle AOB}$, 直接写出 C 的横坐标 a 的取值范围.

【答案】 (1) $m = 3$, $n = 1$, $k = 4$;

(2) $a > 1$.

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数和反比例函数的综合, 求反比例函数解析式, 解题的关键是熟练掌握数形结合的思想.

(1) 利用一次函数 $y = x + m$ 经过点 $A(-3, 0)$, 点 $B(n, 4)$, 列式计算求得 $m = 3$, $n = 1$, 得到点 $B(1, 4)$, 再利用待定系数法求解即可;

(2) 利用三角形面积公式求得 $S_{\triangle AOB} = 6$, 得到 $\frac{3}{2}y_C < 6$, 据此求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 一次函数 $y = x + m$ 经过点 $A(-3, 0)$, 点 $B(n, 4)$,

$$\therefore \begin{cases} -3 + m = 0 \\ n + m = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} m = 3 \\ n = 1 \end{cases},$$

$\therefore$ 点 $B(1, 4)$,

$\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 经过点 $B(1, 4)$,

$$\therefore k = 1 \times 4 = 4;$$

【小问 2 详解】

解: $\because$ 点 $A(-3, 0)$, 点 $B(1, 4)$,

$$\therefore AO = 3,$$

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}AO \times |y_B| = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6 \quad S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}AO \times |y_C| = \frac{3}{2}y_C$$

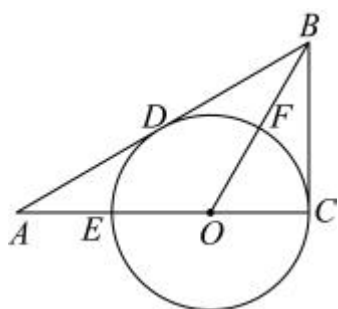
由题意得 $\frac{3}{2}y_C < 6$,

$$\therefore y_C < 4,$$

$$\therefore x_C > 1,$$

$\therefore C$ 的横坐标 a 的取值范围为 $a > 1$.

21. $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 O 在 AC 上, 以 OC 为半径的圆交 AB 于点 D , 交 AC 于点 E . 且 $BD = BC$.



(1) 求证: AB 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 连接 OB 交 $\odot O$ 于点 F , 若 $AD = \sqrt{3}$, $AE = 1$, 求弧 CF 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) 弧 CF 的长为 $\frac{\pi}{3}$.

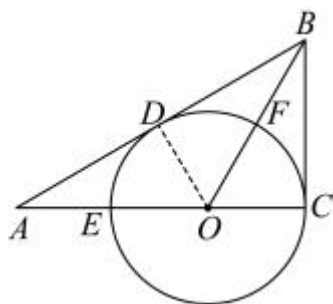
【解析】

【分析】 (1) 利用 SSS 证明 $\triangle OBD \cong \triangle OBC$, 推出 $\angle ODB = \angle OCB = 90^\circ$, 据此即可证明结论成立;

(2) 设 $\odot O$ 的半径为 x , 在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中, 利用勾股定理列式计算求得 $x = 1$, 求得 $\angle AOD = 60^\circ$, 再求得 $\angle COF = 60^\circ$, 利用弧长公式求解即可.

【小问 1 详解】

证明: 连接 OD ,



【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

在 $\triangle OBD$ 和 $\triangle OBC$ 中,
$$\begin{cases} BD = BC \\ OB = OB \\ OD = OC \end{cases},$$

$\therefore \triangle OBD \cong \triangle OBC (SSS),$

$\therefore \angle ODB = \angle OCB = 90^\circ,$

$\therefore OD$ 为 $\odot O$ 的半径,

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

解: $\therefore \angle ODB = 90^\circ,$

$\therefore \angle ODA = 90^\circ,$

设 $\odot O$ 的半径为 x ,

在 $Rt\triangle AOD$ 中, $AO^2 = OD^2 + AD^2$, 即 $(x+1)^2 = x^2 + (\sqrt{3})^2,$

解得 $x = 1,$

$\therefore OD = OC = 1, OA = 2, \cos \angle AOD = \frac{OD}{OA} = \frac{1}{2},$

$\therefore \angle AOD = 60^\circ,$

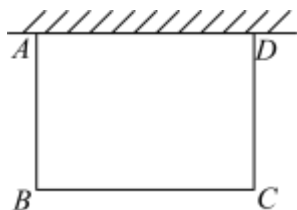
$\therefore \triangle OBD \cong \triangle OBC,$

$\therefore \angle BOD = \angle COF = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ,$

$\therefore$ 弧 CF 的长为 $\frac{60\pi \times 1}{180} = \frac{\pi}{3}.$

【点睛】本题考查了切线的判定, 勾股定理, 三角函数的定义, 弧长公式. 正确引出辅助线解决问题是解题的关键.

22. 学校要建一个矩形花圃, 其中一边靠墙, 另外三边用篱笆围成. 已知墙长 42m, 篱笆长 80m. 设垂直于墙的边 AB 长为 x 米, 平行于墙的边 BC 为 y 米, 围成的矩形面积为 $S \text{ cm}^2$.



(1) 求 y 与 x , S 与 x 的关系式.

(2) 围成的矩形花圃面积能否为 750 cm^2 , 若能, 求出 x 的值.

(3) 围成的矩形花圃面积是否存在最大值? 若存在, 求出这个最大值, 并求出此时 x 的值.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

【答案】 (1) $y = 80 - 2x (19 \leq x < 40)$; $s = -2x^2 + 80x$

(2) 能, $x = 25$

(3) s 的最大值为 800, 此时 $x = 20$

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程的应用和二次函数的实际应用:

(1) 根据 $AB + BC + CD = 80$ 可求出 y 与 x 之间的关系, 根据墙的长度可确定 x 的范围; 根据面积公式可确立二次函数关系式;

(2) 令 $s = 750$, 得一元二次方程, 判断此方程有解, 再解方程即可;

(3) 根据自变量的取值范围和二次函数的性质确定函数的最大值即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 篱笆长 80m,

$$\therefore AB + BC + CD = 80,$$

$$\therefore AB = CD = x, BC = y,$$

$$\therefore x + y + x = 80,$$

$$\therefore y = 80 - 2x$$

$\because$ 墙长 42m,

$$\therefore 0 < 80 - 2x \leq 42,$$

解得, $19 \leq x < 40$,

$$\therefore y = 80 - 2x (19 \leq x < 40);$$

又矩形面积 $s = BC \cdot AB$

$$= y \cdot x$$

$$= (80 - 2x)x$$

$$= -2x^2 + 80x;$$

【小问 2 详解】

解: 令 $s = 750$, 则 $-2x^2 + 80x = 750$,

整理得: $x^2 - 40x + 375 = 0$,

此时, $\Delta = b^2 - 4ac = (-40)^2 - 4 \times 375 = 1600 - 1500 = 100 > 0$,

所以, 一元二次方程 $x^2 - 40x + 375 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$\therefore$ 围成的矩形花圃面积能为 750cm^2 ;

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$x = \frac{-(-40) \pm \sqrt{100}}{2},$$

$$\therefore x_1 = 25, x_2 = 15,$$

$$\therefore 19 \leq x < 40,$$

$$\therefore x = 25;$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } s = -2x^2 + 80x = -2(x-20)^2 + 800$$

$$\therefore -2 < 0,$$

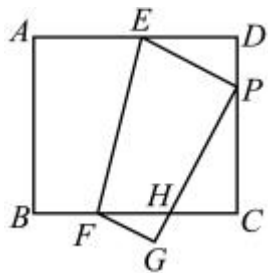
$\therefore s$ 有最大值,

$$\text{又 } 19 \leq x < 40,$$

$\therefore$ 当 $x = 20$ 时, s 取得最大值, 此时 $s = 800$,

即当 $x = 20$ 时, s 的最大值为 800

23. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, E, F 分别在 AD, BC 上, 将四边形 $ABFE$ 沿 EF 翻折, 使 A 的对称点 P 落在 AB 上, B 的对称点为 G , PG 交 BC 于 H .



(1) 求证: $\triangle EDP \sim \triangle PCH$.

(2) 若 P 为 CD 中点, 且 $AB = 2, BC = 3$, 求 GH 长.

(3) 连接 BG , 若 P 为 CD 中点, H 为 BC 中点, 探究 BG 与 AB 大小关系并说明理由.

$$\text{【答案】 (1) 见详解 (2) } GH = \frac{3}{4}$$

$$(3) AB = \sqrt{6}BG$$

【解析】

【分析】 (1) 根据矩形的性质得 $\angle A = \angle D = \angle C = 90^\circ$, 由折叠得出 $\angle EPH = \angle A = 90^\circ$, 得出 $\angle 3 = \angle 2$, 证明 $\triangle EDP \sim \triangle PCH$;

(2) 根据矩形的性质以及线段中点, 得出 $DP = CP = 1$, 根据 $EP^2 = ED^2 + DP^2$ 代入数值得

$x^2 = (3-x)^2 + 1$, 进行计算 $x = \frac{5}{3}$, 再结合 $\triangle EDP \sim \triangle PCH$, 则 $\frac{ED}{PC} = \frac{EP}{PH}$, 代入数值, 得

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$PH = \frac{5}{4}, \quad GH = PG - PH = \frac{3}{4};$$

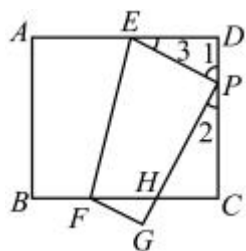
(3) 由折叠性质, 得 $AP \perp EF$, $BG \perp$ 直线 EF , $BG \parallel AP$, $\angle BAP = \angle GPA$, $\triangle MAP$ 是等腰三角形, 则 $MA = MP$, 因为 P 为 CD 中点, H 为 BC 中点, 所以 $DP = CP = y$, $BH = CH$, 所以

$$\triangle MBH \cong \triangle PCH (\text{ASA}), \quad \text{则 } CH = \sqrt{PH^2 - PC^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}y, \quad \text{所以 } CH = \sqrt{PH^2 - PC^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}y, \quad \text{证明}$$

$$\triangle BMG \sim \triangle MAP, \quad \text{则 } BG = \frac{\sqrt{6}}{3}y, \quad \text{即可作答.}$$

【小问 1 详解】

解: 如图:



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle A = \angle D = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$\because E, F$ 分别在 AD, BC 上, 将四边形 $ABFE$ 沿 EF 翻折, 使 A 的对称点 P 落在 DC 上,

$$\therefore \angle EPH = \angle A = 90^\circ,$$

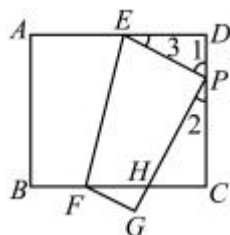
$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 2,$$

$$\therefore \triangle EDP \sim \triangle PCH;$$

【小问 2 详解】

解: 如图:



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore CD = AB = 2, \quad AD = BC = 3, \quad \angle A = \angle D = \angle C = 90^\circ,$$

$\because P$ 为 CD 中点,

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore DP = CP = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

设 $EP = AP = x$,

$$\therefore ED = AD - x = 3 - x,$$

在 $\text{Rt}\triangle EDP$ 中, $EP^2 = ED^2 + DP^2$,

即 $x^2 = (3 - x)^2 + 1$,

解得 $x = \frac{5}{3}$,

$$\therefore EP = AP = x = \frac{5}{3},$$

$$\therefore ED = AD - AE = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \triangle EDP \sim \triangle PCH,$$

$$\therefore \frac{ED}{PC} = \frac{EP}{PH},$$

$$\therefore \frac{\frac{4}{3}}{1} = \frac{\frac{5}{3}}{PH},$$

解得 $PH = \frac{5}{4}$,

$$\therefore PG = AB = 2,$$

$$\therefore GH = PG - PH = \frac{3}{4};$$

【小问 3 详解】

解：如图：延长 AB , PG 交于一点 M , 连接 AP

$\therefore E, F$ 分别在 AD, BC 上, 将四边形 $ABFE$ 沿 EF 翻折, 使 A 的对称点 P 落在 CD 上,

$\therefore AP \perp EF$, $BG \perp$ 直线 EF

$\therefore BG \parallel AP$,

$\therefore AE = EP$

$\therefore \angle EAP = \angle EPA$,

$\therefore \angle BAP = \angle GPA$,

$\therefore \triangle MAP$ 是等腰三角形,

$\therefore MA = MP$,

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$\therefore P$ 为 CD 中点,

$\therefore$ 设 $DP = CP = y$,

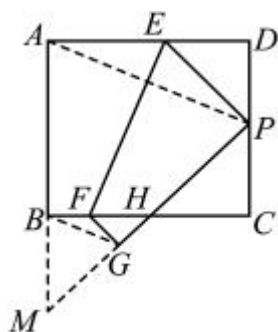
$\therefore AB = PG = CD = 2y$,

$\therefore H$ 为 BC 中点,

$\therefore BH = CH$,

$\therefore \angle BHM = \angle CHP$, $\angle CBM = \angle PCH$,

$\therefore \triangle MBH \cong \triangle PCH$ (ASA),



$\therefore BM = CP = y$, $HM = HP$,

$\therefore MP = MA = MB + AB = 3y$

$\therefore HP = \frac{1}{2}PM = \frac{3}{2}y$,

在 $\text{Rt}\triangle PCH$ 中, $CH = \sqrt{PH^2 - PC^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}y$,

$\therefore BC = 2CH = \sqrt{5}y$,

$\therefore AD = BC = \sqrt{5}y$,

在 $\text{Rt}\triangle APD$ 中, $AP = \sqrt{AD^2 + PD^2} = \sqrt{6}y$,

$\therefore BG \parallel AP$,

$\therefore \triangle BMG \sim \triangle MAP$,

$\therefore \frac{BG}{AP} = \frac{BM}{AM} = \frac{1}{3}$,

$\therefore BG = \frac{\sqrt{6}}{3}y$,

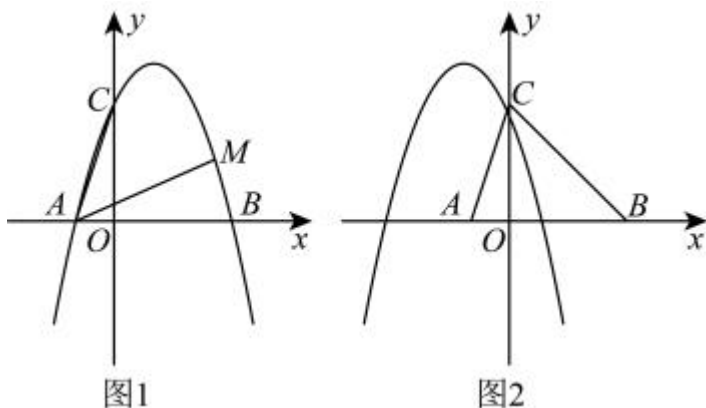
$\therefore \frac{AB}{BG} = \frac{2y}{\frac{\sqrt{6}}{3}y} = \sqrt{6}$,

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$$\therefore AB = \sqrt{6}BG,$$

【点睛】本题考查了矩形与折叠，相似三角形的判定与性质，勾股定理，全等三角形的判定与性质，正确掌握相关性质内容是解题的关键.

24. 如图 1，二次函数 $y = -x^2 + bx + 3$ 交 x 轴于 $A(-1, 0)$ 和 B ，交 y 轴于 C .



(1) 求 b 的值.

(2) M 为函数图象上一点，满足 $\angle MAB = \angle ACO$ ，求 M 点的横坐标.

(3) 如图 2，将二次函数沿水平方向平移，新的图象记为 L ， L 与 y 轴交于点 D ，记 $DC = d$ ，记 L 顶点横坐标为 n .

①求 d 与 n 的函数解析式.

②记 L 与 x 轴围成的图象为 U ， U 与 $\triangle ABC$ 重合部分（不计边界）记为 W ，若 d 随 n 增加而增加，且 W 内恰有 2 个横坐标与纵坐标均为整数的点，直接写出 n 的取值范围.

【答案】 (1) $b = 2$;

$$(2) \quad m = \frac{10}{3} \quad \text{或} \quad m = \frac{8}{3};$$

(3) n 的取值范围为 $\sqrt{2} \leq n < \sqrt{3}$ 或 $-1 \leq n \leq 1 - \sqrt{3}$.

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法求解即可;

(2) 先求得 $B(3, 0)$ ， $C(0, 3)$ ，作 $MN \perp x$ 轴于点 N ，设 $M(m, -m^2 + 2m + 3)$ ，分当 M 点在 x 轴上方和 M 点在 x 轴下方时，两种情况讨论，利用相似三角形的判定和性质，列式求解即可;

(3) ①利用平移的性质得图象 L 的解析式为 $y = -(x - n)^2 + 4$ ，得到图象 L 与 y 轴交于点 D 的坐标 $(0, -n^2 + 4)$ ，据此列式计算即可求解;

②先求得 $-1 \leq n \leq 0$ 或 $n \geq 1$ ， $\triangle ABC$ 中含 $(0, 1)$ ， $(0, 2)$ ， $(1, 1)$ 三个整数点（不含边界），再分三种情况讨论，分别列不等式组，求解即可.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

【小问 1 详解】

解：∵二次函数 $y = -x^2 + bx + 3$ 交 x 轴于 $A(-1, 0)$,

$$\therefore 0 = -1 - b + 3,$$

解得 $b = 2$;

【小问 2 详解】

解：∵ $b = 2$,

$$\therefore y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4,$$

令 $y = 0$, 则 $-(x-1)^2 + 4 = 0$,

解得 $x = -1$ 或 $x = 3$,

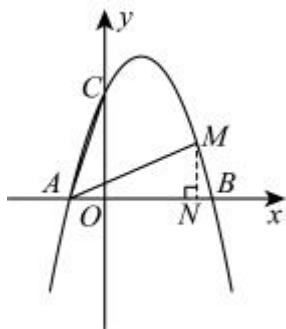
令 $y = 3$, 则 $y = 3$,

$$\therefore A(-1, 0), B(3, 0), C(0, 3),$$

作 $MN \perp x$ 轴于点 N ,

设 $M(m, -m^2 + 2m + 3)$,

当 M 点在 x 轴上方时, 如图,



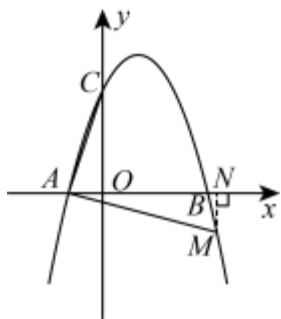
$$\therefore \angle MAB = \angle ACO,$$

$$\therefore \triangle MAN \sim \triangle ACO,$$

$$\therefore \frac{OC}{OA} = \frac{AN}{MN}, \text{ 即 } \frac{3}{1} = \frac{m+1}{-m^2 + 2m + 3},$$

解得 $m = \frac{8}{3}$ 或 -1 (舍去);

当 M 点在 x 轴下方时, 如图,



$$\therefore \angle MAB = \angle ACO,$$

$$\therefore \triangle MAN \sim \triangle ACO,$$

$$\therefore \frac{OC}{OA} = \frac{AN}{MN}, \text{ 即 } \frac{3}{1} = \frac{m+1}{-(-m^2+2m+3)},$$

$$\text{解得 } m = \frac{10}{3} \text{ 或 } -1 \text{ (舍去);}$$

$$\therefore m = \frac{10}{3} \text{ 或 } m = \frac{8}{3};$$

【小问 3 详解】

解：① $\because$ 将二次函数沿水平方向平移，

$\therefore$ 纵坐标不变是 4，

$\therefore$ 图象 L 的解析式为 $y = -(x-n)^2 + 4 = -x^2 + 2nx - n^2 + 4$ ，

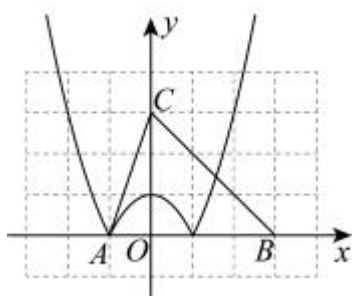
$$\therefore D(0, -n^2 + 4),$$

$$\therefore CD = d = |-n^2 + 4 - 3| = |-n^2 + 1|,$$

$$\therefore d = \begin{cases} n^2 - 1 & (n \geq 1 \text{ 或 } n \leq -1) \\ 1 - n^2 & (-1 < n < 1) \end{cases};$$

$$\text{②由①得 } d = \begin{cases} n^2 - 1 & (n \geq 1 \text{ 或 } n \leq -1) \\ 1 - n^2 & (-1 < n < 1) \end{cases},$$

则函数图象如图，

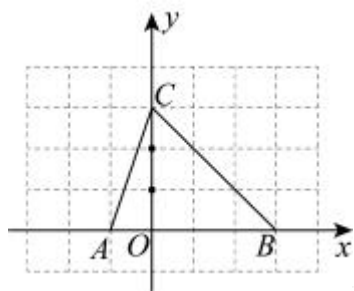


$\therefore d$ 随 n 增加而增加，

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】

$\therefore -1 \leq n \leq 0$ 或 $n \geq 1$, $\triangle ABC$ 中含 $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,1)$ 三个整数点 (不含边界),

当 W 内恰有 2 个整数点 $(0,1)$, $(0,2)$ 时,



当 $x=0$ 时, $y_I > 2$, 当 $x=1$ 时, $y_I \leq 1$,

$$\begin{cases} -n^2 + 4 > 2 \\ -(1-n)^2 + 4 \leq 1 \end{cases}$$

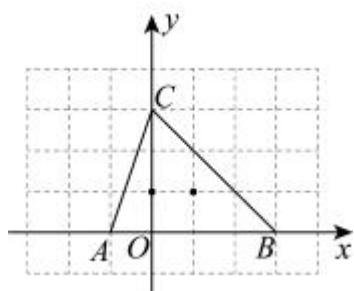
$$\therefore -\sqrt{2} < n < \sqrt{2}, \quad n \geq 1 + \sqrt{3} \text{ 或 } n \leq 1 - \sqrt{3},$$

$$\therefore -\sqrt{2} < n \leq 1 - \sqrt{3};$$

$$\therefore -1 \leq n \leq 0 \text{ 或 } n \geq 1,$$

$$\therefore -1 \leq n \leq 1 - \sqrt{3};$$

当 W 内恰有 2 个整数点 $(0,1)$, $(1,1)$ 时,



当 $x=0$ 时, $1 < y_I \leq 2$, 当 $x=1$ 时, $y_I > 1$,

$$\begin{cases} 1 < -n^2 + 4 \leq 2 \\ -(1-n)^2 + 4 > 1 \end{cases}$$

$$\therefore -\sqrt{3} < n \leq -\sqrt{2} \text{ 或 } \sqrt{2} \leq n < \sqrt{3}, \quad 1 - \sqrt{3} < n < 1 + \sqrt{3},$$

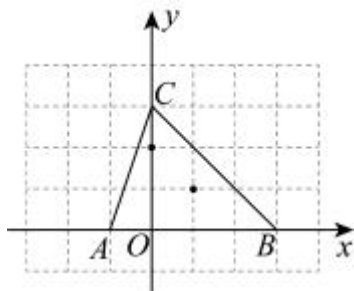
$$\therefore \sqrt{2} \leq n < \sqrt{3};$$

$$\therefore -1 \leq n \leq 0 \text{ 或 } n \geq 1,$$

$$\therefore \sqrt{2} \leq n < \sqrt{3};$$

当 W 内恰有 2 个整数点 $(0,2)$, $(1,1)$ 时,

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】



此情况不存在，舍去，

综上， n 的取值范围为 $\sqrt{2} \leq n < \sqrt{3}$ 或 $-1 \leq n \leq 1 - \sqrt{3}$.

【点睛】 本题主要考查了用待定系数法求二次函数的表达式及二次函数与线段的交点问题，也考查了二次函数与不等式，相似三角形的判定和性质．熟练掌握二次函数图象的性质及数形结合法是解题的关键．