

2022 年十堰市初中毕业生学业水平考试 数学试题

注意事项：

1. 本卷共 4 页，25 小题，满分 120 分，考试时限 120 分钟。
2. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡指定的位置，并认真核对条形码上的准考证号和姓名，在答题卡规定的位置贴好条形码。
3. 选择题必须用 2B 铅笔在指定位置填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，按照题目在答题卡对应的答题区域内作答，超出答题区域和在试卷、草稿纸上答题无效。要求字体工整，笔迹清晰。
4. 考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将试卷和答题卡一并上交。

一、选择题（本题有 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）下面每小题给出的四个选项中，只有一个是正确的，请把正确选项的字母填涂在答题卡中相应的格子内。

1. 2 的相反数是（ ）

A. 2

B. -2

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

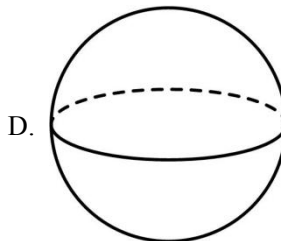
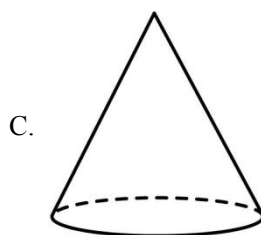
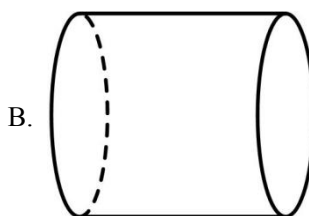
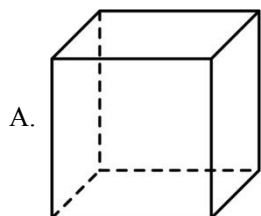
【答案】B

【解析】

【详解】2 的相反数是-2.

故选：B.

2. 下列四个几何体中，主视图与俯视图不同的几何体是（ ）



【答案】C

【解析】

【分析】正方体的主视图与俯视图都是正方形，圆柱横着放置时，主视图与俯视图都是长方形，球体的主视图与俯视图都是圆形，只有圆锥的主视图与俯视图不同。

【详解】解：A、正方体的主视图与俯视图都是正方形，选项不符合题意；

B、圆柱横着放置时，主视图与俯视图都是长方形，选项不符合题意；

C、圆锥的主视图与俯视图分别为圆形、三角形，故符合题意；

D、球体的主视图与俯视图都是圆形，故不符合题意.

故选：C.

【点睛】本题考查了简单的几何体的三视图，从不同方向看物体的形状所得到的图形可能不同.

3. 下列计算正确的是 ()

A. $a^6 \div a^3 = a^2$

B. $a^2 + 2a^2 = 3a^2$

C. $(2a)^3 = 6a^3$

D. $(a+1)^2 = a^2 + 1$

【答案】B

【解析】

【分析】根据同底数幂相除，合并同类项，积的乘方，完全平方公式，逐项判断即可求解.

【详解】解：A、 $a^6 \div a^3 = a^3$ ，故本选项错误，不符合题意；

B、 $a^2 + 2a^2 = 3a^2$ ，故本选项正确，符合题意；

C、 $(2a)^3 = 8a^3$ ，故本选项错误，不符合题意；

D、 $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$ ，故本选项错误，不符合题意；

故选：B

【点睛】本题主要考查了同底数幂相除，合并同类项，积的乘方，完全平方公式，熟练掌握相关运算法则是解题的关键.

4. 如图，工人砌墙时，先在两个墙脚的位置分别插一根木桩，再拉一条直的参照线，就能使砌的砖在一条直线上. 这样做应用的数学知识是 ()



A. 两点之间，线段最短

B. 两点确定一条直线

C. 垂线段最短

D. 三角形两边之和大于第三边

【答案】B

【解析】

【分析】由直线公理可直接得出答案.

【详解】解：建筑工人砌墙时，经常在两个墙脚的位置分别插一根木桩，然后拉一条直的参照线，这种做法用几何知识解释应是：两点确定一条直线.

故选：B.

【点睛】此题主要考查了直线的性质，要想确定一条直线，至少要知道两点.

5. 甲、乙两人在相同的条件下，各射击 10 次，经计算：甲射击成绩的平均数是 8 环，方差是 1.1；乙射击成绩的平均数是 8 环，方差是 1.5. 下列说法中不一定正确的是（ ）

- A. 甲、乙的总环数相同
B. 甲的成绩比乙的成绩稳定
C. 乙的成绩比甲的成绩波动大
D. 甲、乙成绩的众数相同

【答案】D

【解析】

【分析】根据方差、平均数的意义进行判断，平均数相同则总环数相同，方差越大，波动越大即可求出答案.

【详解】解：∵甲射击成绩的方差是 1.1，乙射击成绩的方差是 1.5，且平均数都是 8 环，

$$\therefore S_{\text{甲}}^2 < S_{\text{乙}}^2,$$

∴甲射击成绩比乙稳定，

∴乙射击成绩的波动比甲较大，

∵甲、乙射靶 10 次，

∴甲、乙射中的总环数相同，

故 A、B、C 选项都正确，

但甲、乙射击成绩的众数不一定相同，

故 D 错误；

故选：D.

【点睛】本题考查了平均数、方差的意义. 方差是用来衡量一组数据波动大小的量，方差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，数据越不稳定；反之，方差越小，表明这组数据分布比较集中，各数据偏离平均数越小，即波动越小，数据越稳定.

6. 我国古代数学名著《张丘建算经》中记载：“今有清酒一斗直粟十斗， 醕酒一斗直粟三斗，今持粟三斛，得酒五斗，问清酒各几何？”大意是：现有一斗清酒价值 10 斗谷子，一斗醕酒价值 3 斗谷子， 现在拿 30 斗谷子，共换了 5 斗酒，问清酒， 醕酒各几斗？如果设清酒 x 斗，那么可列方程为（ ）

A. $10x + 3(5 - x) = 30$

B. $3x + 10(5 - x) = 30$

C. $\frac{x}{3} + \frac{30-x}{10} = 5$

D. $\frac{x}{10} + \frac{30-x}{3} = 5$

【答案】A

【解析】

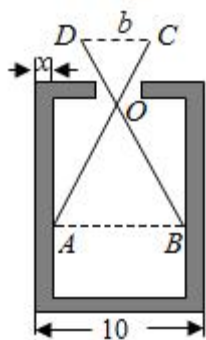
【分析】根据题意直接列方程即可.

【详解】解：根据题意，得： $10x + 3(5 - x) = 30$,

故选：A.

【点睛】本题考查一元一次方程的应用，理解题意，正确列出方程是解答的关键.

7. 如图，某零件的外径为 10cm，用一个交叉卡钳（两条尺长 AC 和 BD 相等）可测量零件的内孔直径 AB . 如果 $OA:OC=OB:OD=3$ ，且量得 $CD=3\text{cm}$ ，则零件的厚度 x 为（ ）



- A. 0.3cm B. 0.5cm C. 0.7cm D. 1cm

【答案】B

【解析】

【分析】求出 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 相似，利用相似三角形对应边成比例列式计算求出 AB ，再根据外径的长度解答.

【详解】解： $\because OA:OC=OB:OD=3$ ， $\angle AOB=\angle COD$ ，

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle COD,$$

$$\therefore AB:CD=3,$$

$$\therefore AB:3=3,$$

$$\therefore AB=9 \text{ (cm)},$$

$$\because \text{外径为 } 10\text{cm},$$

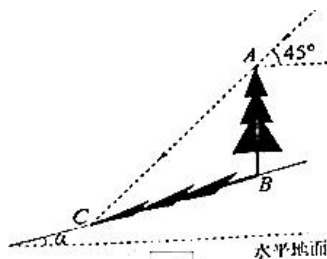
$$\therefore 19+2x=10,$$

$$\therefore x=0.5 \text{ (cm)}.$$

故选：B.

【点睛】本题考查相似三角形的应用，解题的关键是利用相似三角形的性质求出 AB 的长.

8. 如图，坡角为 α 的斜坡上有一棵垂直于水平地面的大树 AB ，当太阳光线与水平线成 45° 角沿斜坡照下，在斜坡上的树影 BC 长为 m ，则大树 AB 的高为（ ）



- A. $m(\cos \alpha - \sin \alpha)$ B. $m(\sin \alpha - \cos \alpha)$ C. $m(\cos \alpha - \tan \alpha)$ D.

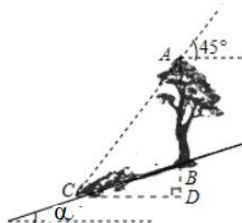
$$\frac{m}{\sin \alpha} - \frac{m}{\cos \alpha}$$

【答案】A

【解析】

【分析】应充分利用所给的 α 和 45° 在树的位置构造直角三角形，进而利用三角函数求解.

【详解】解：如图，过点C作水平线与AB的延长线交于点D，则 $AD \perp CD$ ，



$$\therefore \angle BCD = \alpha, \quad \angle ACD = 45^\circ.$$

在 $Rt\triangle CDB$ 中， $CD = m \cos \alpha$ ， $BD = m \sin \alpha$ ，

在 $Rt\triangle CDA$ 中，

$$AD = CD \times \tan 45^\circ$$

$$= m \times \cos \alpha \times \tan 45^\circ$$

$$= m \cos \alpha,$$

$$\therefore AB = AD - BD$$

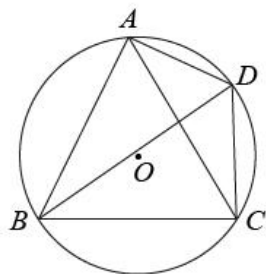
$$= (m \cos \alpha - m \sin \alpha)$$

$$= m (\cos \alpha - \sin \alpha).$$

故选：A.

【点睛】本题考查锐角三角函数的应用. 需注意构造直角三角形是常用的辅助线方法，另外，利用三角函数时要注意各边相对.

9. 如图， $\odot O$ 是等边 $\triangle ABC$ 的外接圆，点D是弧AC上一动点（不与A，C重合），下列结论：① $\angle ADB = \angle BDC$ ；② $DA = DC$ ；③当DB最长时， $DB = 2DC$ ；④ $DA + DC = DB$ ，其中一定正确的结论有（ ）



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】C

【解析】

【分析】根据等边三角形的性质可得 $\overset{\circ}{AB} = \overset{\circ}{BC}$ ，从而得到 $\angle ADB = \angle BDC$ ，故①正确；根据点 D 是 $\overset{\circ}{AC}$ 上一动点，可得 $\overset{\circ}{AD}$ 不一定等于 $\overset{\circ}{CD}$ ，故②错误；当 DB 最长时， DB 为圆 O 的直径，可得 $\angle BCD = 90^\circ$ ，再由 $\odot O$ 是等边 $\triangle ABC$ 的外接圆，可得 $\angle ABD = \angle CBD = 30^\circ$ ，可得 $DB = 2DC$ ，故③正确；延长 DA 至点 E ，使 $AE = AD$ ，证明 $\triangle ABE \cong \triangle CBD$ ，可得 $BD = AE$ ， $\angle ABE = \angle DBC$ ，从而得到 $\triangle BDE$ 是等边三角形，可得到 $DE = BD$ ，故④正确；即可求解。

【详解】解： $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore AB = BC, \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \overset{\circ}{AB} = \overset{\circ}{BC},$$

$$\therefore \angle ADB = \angle BDC, \text{ 故①正确；}$$

$$\because \text{点 } D \text{ 是 } \overset{\circ}{AC} \text{ 上一动点，}$$

$$\therefore \overset{\circ}{AD} \text{ 不一定等于 } \overset{\circ}{CD},$$

$$\therefore DA = DC \text{ 不一定成立，故②错误；}$$

当 DB 最长时， DB 为圆 O 的直径，

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ,$$

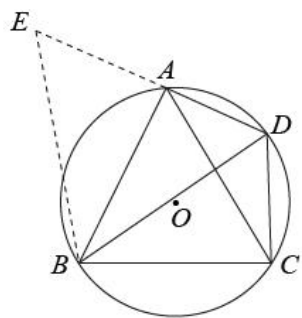
$$\because \odot O \text{ 是等边 } \triangle ABC \text{ 的外接圆，} \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore BD \perp AC,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = 30^\circ,$$

$$\therefore DB = 2DC, \text{ 故③正确；}$$

如图，延长 DA 至点 E ，使 $AE = DC$ ，



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为圆 O 的内接四边形，

$$\therefore \angle BCD + \angle BAD = 180^\circ,$$

$$\because \angle BAE + \angle BAD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle BCD,$$

$$\because AB = BC, AE = DC,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBD,$$

$$\therefore BD=AE, \angle ABE=\angle DBC,$$

$$\therefore \angle ABE+\angle ABD=\angle DBC+\angle ABD=\angle ABC=60^\circ,$$

$\therefore \triangle BDE$ 是等边三角形,

$$\therefore DE=BD,$$

$$\therefore DE=AD+AE=AD+CD,$$

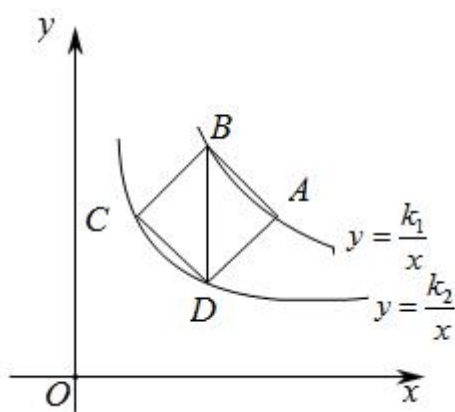
$$\therefore DA+DC=DB, \text{ 故④正确;}$$

$\therefore$ 正确的有 3 个.

故选: C.

【点睛】 本题主要考查了圆周角定理, 三角形的外接圆, 圆内接四边形的性质, 垂径定理, 等边三角形的判定和性质等知识, 熟练掌握圆周角定理, 三角形的外接圆, 圆内接四边形的性质, 垂径定理, 等边三角形的判定和性质等知识是解题的关键.

10. 如图, 正方形 $ABCD$ 的顶点分别在反比例函数 $y=\frac{k_1}{x} (k_1>0)$ 和 $y=\frac{k_2}{x} (k_2>0)$ 的图象上. 若 $BD \parallel y$ 轴, 点 D 的横坐标为 3, 则 $k_1+k_2=$ ()



A. 36

B. 18

C. 12

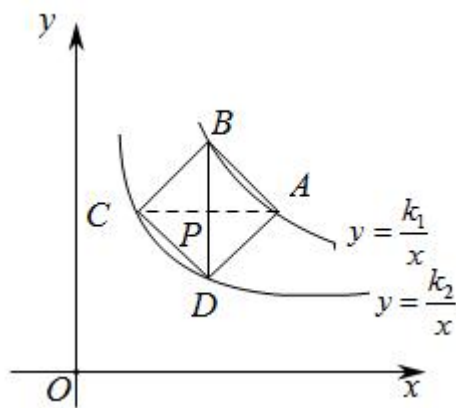
D. 9

【答案】 B

【解析】

【分析】 设 $PA=PB=PC=PD=t (t \neq 0)$, 先确定出 $D(3, \frac{k_2}{3})$, $C(3-t, \frac{k_2}{3}+t)$, 由点 C 在反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图象上, 推出 $t=3-\frac{k_2}{3}$, 进而求出点 B 的坐标 $(3, 6-\frac{k_2}{3})$, 再点 C 在反比例函数 $y=\frac{k_1}{x}$ 的图象上, 整理后, 即可得出结论.

【详解】 解: 连接 AC , 与 BD 相交于点 P ,



设 $PA=PB=PC=PD=t$ ($t \neq 0$).

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(3, \frac{k_2}{3})$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(3-t, \frac{k_2}{3}+t)$.

$\because$ 点 C 在反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图象上,

$\therefore (3-t) (\frac{k_2}{3}+t) = k_2$, 化简得: $t=3-\frac{k_2}{3}$,

$\therefore$ 点 B 的纵坐标为 $\frac{k_2}{3}+2t=\frac{k_2}{3}+2(3-\frac{k_2}{3})=6-\frac{k_2}{3}$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(3, 6-\frac{k_2}{3})$,

$\therefore 3 \times (6-\frac{k_2}{3}) = k_1$, 整理, 得: $k_1+k_2=18$.

故选: B.

【点睛】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征、正方形的性质, 解题的关键是利用反比例函数图象上点的坐标特征, 找出 k_1 , k_2 之间的关系.

二、填空题 (本题有 6 个小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

11. 袁隆平院士被誉为“杂交水稻之父”, 经过他带领的团队多年努力, 目前我国杂交水稻种植面积约为 2.5 亿亩. 将 250000000 用科学记数法表示为 2.5×10^n , 则 $n =$ _____.

【答案】8

【解析】

【分析】用科学记数法表示较大的数时, 一般形式为 $a \times 10^n$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数.

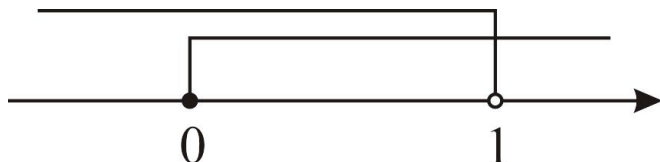
【详解】解: $\because 250000000 = 2.5 \times 10^8 = 2.5 \times 10^n$.

$\therefore n=8$

故答案为: 8.

【点睛】本题考查了科学记数法，科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．确定 n 的值时，要看把原来的数，变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数，确定 a 与 n 的值是解题的关键．

12. 关于 x 的不等式组中的两个不等式的解集如图所示，则该不等式组的解集为_____.



【答案】 $0 \leq x < 1$

【解析】

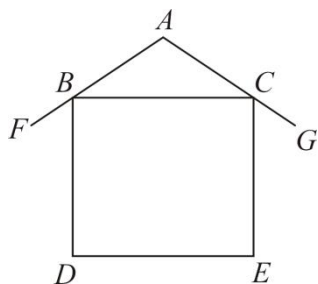
【分析】不等式组解集在数轴上的表示方法：把每个不等式的解集在数轴上表示出来（ $>$ ， $\geq$ 向右画； $<$ ， $\leq$ 向左画），数轴上的点把数轴分成若干段，如果数轴的某一段上面表示解集的线的条数与不等式的个数一样，那么这段就是不等式组的解集．有几个就要几个．在表示解集时“ $\geq$ ”，“ $\leq$ ”要用实心圆点表示；“ $<$ ”，“ $>$ ”要用空心圆点表示．

【详解】解：该不等式组的解集为 $0 \leq x < 1$

故答案为： $0 \leq x < 1$

【点睛】本题考查了不等式组解集在数轴上的表示方法，数形结合是解题的关键．

13. “美丽乡村”建设使我市农村住宅旧貌变新颜，如图所示为一农村民居侧面截图，屋坡 AF ， AG 分别架在墙体的点 B ， C 处，且 $AB = AC$ ，侧面四边形 $BDEC$ 为矩形，若测得 $\angle FBD = 55^\circ$ ，则 $\angle A =$ _____ $^\circ$ ．



【答案】 110

【解析】

【分析】根据矩形的性质可得 $\angle DBC = 90^\circ$ ，求出 $\angle ABC = 35^\circ$ ，根据等边对等角可得 $\angle ACB = \angle ABC = 35^\circ$ ，然后根据三角形内角和定理即可求解．

【详解】 $\because$ 四边形 $BDEC$ 为矩形

$\therefore \angle DBC = 90^\circ$

$$\because \angle FBD = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$$

$$\because AB = AC$$

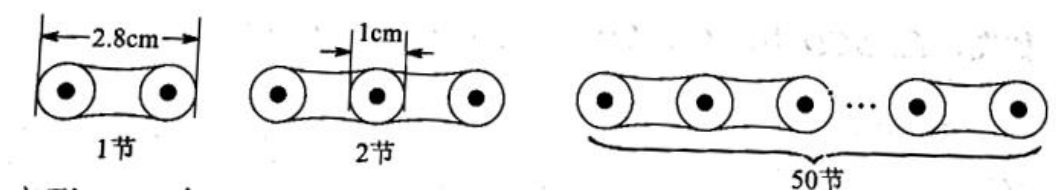
$$\therefore \angle ACB = \angle ABC = 35^\circ$$

$$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 110^\circ$$

故答案为：110.

【点睛】本题考查了矩形的性质，等边对等角，三角形内角和定理，掌握以上知识是解题的关键.

14. 如图，某链条每节长为2.8cm，每两节链条相连接部分重叠的圆的直径为1cm，按这种连接方式，50节链条总长度为_____cm.



【答案】91

【解析】

【分析】通过观察图形可知，1节链条的长度是2.8cm，2节链条的长度是 $(2.8 \times 2 - 1)$ cm，3节链条的长度是 $(2.8 \times 3 - 1 \times 2)$ cm， n 节链条的长度是 $2.8n - 1 \times (n-1)$ cm，据此解答即可求解.

【详解】解：2节链条的长度是 $(2.8 \times 2 - 1)$ cm，

3节链条的长度是 $(2.8 \times 3 - 1 \times 2)$ cm，

n 节链条的长度是 $2.8n - 1 \times (n-1)$ cm，

所以50节链条的长度是： $2.8 \times 50 - 1 \times (50-1)$

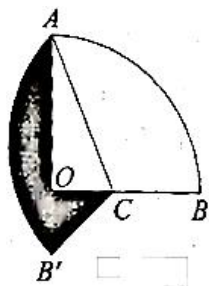
$$= 140 - 1 \times 49$$

$$= 91 \text{ (cm)}$$

故答案为：91

【点睛】此题考查的图形类规律，关键是找出规律，得出 n 节链条长度为 $2.5 \times n - 0.8 \times (n-1)$.

15. 如图，扇形AOB中， $\angle AOB = 90^\circ$ ， $OA = 2$ ，点C为OB上一点，将扇形AOB沿AC折叠，使点B的对应点B'落在射线AO上，则图中阴影部分的面积为_____.

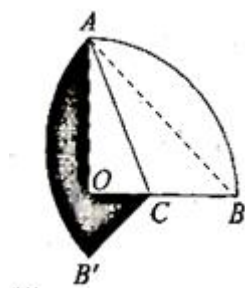


【答案】 $2\pi+4-4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】连接 AB ，在 $Rt\triangle AOB$ 中，由勾股定理，求得 $AB=2\sqrt{2}$ ，由折叠可得： $AB'=AB=2\sqrt{2}$ ， $CB'=CB$ ，则 $OB'=2\sqrt{2}-2$ ，设 $OC=x$ ，则 $CB'=CB=2-x$ ，在 $Rt\triangle COB'$ 中，由勾股定理，得 $(2\sqrt{2}-2)^2+x^2=(2-x)^2$ ，解得： $x=2\sqrt{2}-2$ ，最后由 $S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形}}-2S_{\triangle AOC}$ 求解即可。

【详解】解：连接 AB ，



在 $Rt\triangle AOB$ 中，由勾股定理，得

$$AB=\sqrt{OA^2+OC^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2},$$

由折叠可得： $AB'=AB=2\sqrt{2}$ ， $CB'=CB$ ，

$$\therefore OB'=2\sqrt{2}-2,$$

设 $OC=x$ ，则 $CB'=CB=2-x$ ，

在 $Rt\triangle COB'$ 中，由勾股定理，得

$$(2\sqrt{2}-2)^2+x^2=(2-x)^2,$$

解得： $x=2\sqrt{2}-2$ ，

$$S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形}}-2S_{\triangle AOC}$$

$$=\frac{90\pi \times 2^2}{180}-2 \times \frac{1}{2}OA \cdot OC$$

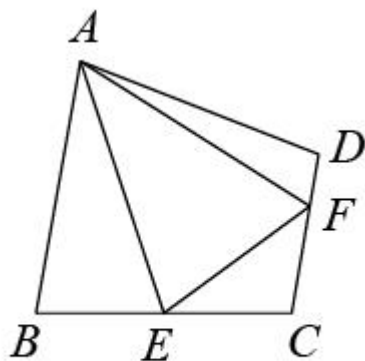
$$=\frac{90\pi \times 2^2}{180}-2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times (2\sqrt{2}-2)$$

$$=2\pi+4-4\sqrt{2},$$

故答案为： $2\pi+4-4\sqrt{2}$ 。

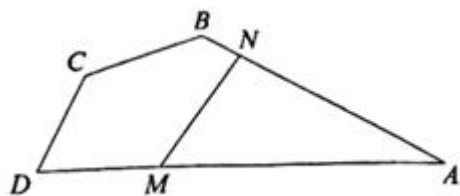
【点睛】 本题考查折叠的性质，勾股定理，扇形的面积，利用折叠的性质和勾股定理求出 OC 长是解题的关键。

16. 【阅读材料】如图①，四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ，点 E ， F 分别在 BC ， CD 上，若 $\angle BAD = 2\angle EAF$ ，则 $EF = BE + DF$ 。



图①

【解决问题】如图②，在某公园的同一水平面上，四条道路围成四边形 $ABCD$ 。已知 $CD = CB = 100\text{m}$ ， $\angle D = 60^\circ$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $\angle BCD = 150^\circ$ ，道路 AD ， AB 上分别有景点 M ， N ，且 $DM = 100\text{m}$ ， $BN = 50(\sqrt{3} - 1)\text{m}$ ，若在 M ， N 之间修一条直路，则路线 $M \rightarrow N$ 的长比路线 $M \rightarrow A \rightarrow N$ 的长少_____m (结果取整数，参考数据： $\sqrt{3} \approx 1.7$)。



图②

【答案】 370

【解析】

【分析】延长 AB, DC 交于点 E ，根据已知条件求得 $\angle E = 90^\circ$ ，进而根据含 30° 度角的直角三角形的性质，求得 EC, EB ， AE, AD ，从而求得 $AN + AM$ 的长，根据材料可得 $MN = DM + BN$ ，即可求解。

【详解】解：如图，延长 AB, DC 交于点 E ，连接 CM, CN ，

$$250 + 150\sqrt{3} - 50(\sqrt{3} + 1) = 200 + 100\sqrt{3} \approx 370 \text{ m}.$$

故答案为：370.

【点睛】本题考查了含30度角的直角三角形的性质，勾股定理，理解题意是解题的关键.

三、解答题 (本题有9个小题，共72分)

17. 计算： $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + |2 - \sqrt{5}| - (-1)^{2022}$.

【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】根据负整数指数幂、乘方、绝对值的性质化简后计算即可.

【详解】解： $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + |2 - \sqrt{5}| - (-1)^{2022}$

$$= 3 + \sqrt{5} - 2 - 1$$

$$= \sqrt{5}.$$

【点睛】本题考查实数的混合运算，解题的关键是根据负整数指数幂、绝对值的性质化简.

18. 计算： $\frac{a^2 - b^2}{a} \div \left(a + \frac{b^2 - 2ab}{a}\right)$.

【答案】 $\frac{a+b}{a-b}$

【解析】

【分析】先根据分式的加减计算括号内的，同时利用除法法则变形，约分即可得到结果.

【详解】解：原式 = $\frac{(a+b)(a-b)}{a} \div \left(\frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a}\right)$

$$= \frac{(a+b)(a-b)}{a} \times \frac{a}{(a-b)^2}$$

$$= \frac{a+b}{a-b}.$$

【点睛】本题考查了分式的混合运算，正确的计算是解题的关键.

19. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x - 3m^2 = 0$.

(1) 求证：方程总有两个不相等的实数根；

(2) 若方程的两个实数根分别为 α ， β ，且 $\alpha + 2\beta = 5$ ，求 m 的值.

【答案】 (1) 见解析 (2) $m = \pm 1$

【解析】

【分析】(1) 根据根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ，即可判断；

(2) 利用根与系数关系求出 $a + \beta = 2$ ，由 $a + 2\beta = 5$ 即可解出 a ， β ，再根据 $a \cdot \beta = -3m^2$ ，即可得到 m 的值.

【小问 1 详解】

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \cdot (-3m^2) = 4 + 12m^2,$$

$$\therefore 12m^2 \geq 0,$$

$$\therefore 4 + 12m^2 \geq 4 > 0,$$

$\therefore$ 该方程总有两个不相等的实数根；

【小问 2 详解】

$\therefore$ 方程的两个实数根 a ， β ，

由根与系数关系可知， $a + \beta = 2$ ， $a \cdot \beta = -3m^2$ ，

$$\therefore a + 2\beta = 5,$$

$$\therefore a = 5 - 2\beta,$$

$$\therefore 5 - 2\beta + \beta = 2,$$

$$\text{解得：} \beta = 3, a = -1,$$

$$\therefore -3m^2 = -1 \times 3 = -3, \text{ 即 } m = \pm 1.$$

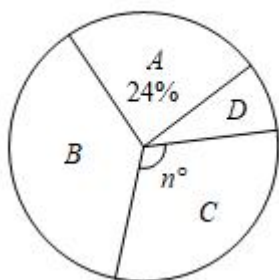
【点睛】本题考查了根的判别式以及根与系数的关系，解题的关键是掌握根的判别式以及根与系数的关系.

20. 某兴趣小组针对视力情况随机抽取本校部分学生进行调查，将调查结果进行统计分析，绘制成如下不完整的统计图表.

抽取的学生视力情况统计表

类别	调查结果	人数
A	正常	48
B	轻度近视	76
C	中度近视	60
D	重度近视	m

抽取的学生视力情况统计图



请根据图表信息解答下列问题：

- (1) 填空： $m=$ _____， $n=$ _____；
- (2) 该校共有学生 1600 人，请估算该校学生中“中度近视”的人数；
- (3) 某班有四名重度近视的学生甲、乙、丙、丁，从中随机选择两名学生参加学校组织的“爱眼护眼”座谈会，请用列表或画树状图的方法求同时选中甲和乙的概率。

【答案】 (1) 200, 108

(2) 估计该校学生中“中度近视”的人数约为 480 人；

(3) 甲和乙两名学生同时被选中的概率为 $\frac{1}{6}$ 。

【解析】

【分析】 (1) 从所取样本中根据“正常”的人数和所占比例求出所抽取的学生总人数；根据“中度近视”的人数求出所占比例，乘以 360° 即可求解；

(2) 由全校共有学生人数乘以“中度近视”人数所占的比例即可；

(3) 画树状图列出所有等可能结果，再利用概率公式计算可得。

【小问 1 详解】

解： 所抽取的学生总数为 $m=48 \div 24\%=200$ （人），

$$n=360 \times \frac{60}{200}=108,$$

故答案为： 200, 108；

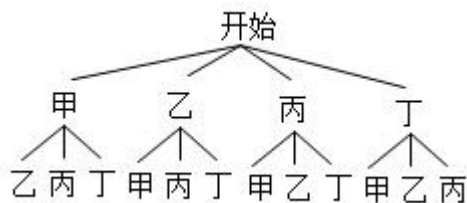
【小问 2 详解】

$$\text{解： } 1600 \times \frac{60}{200}=480 \text{（人），}$$

即估计该校学生中“中度近视”的人数约为 480 人；

【小问 3 详解】

解： 画树状图为：

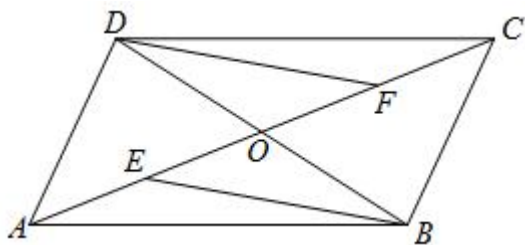


共有 12 种等可能的结果数，其中甲和乙两名学生同时被选中的结果数为 2，

所以甲和乙两名学生同时被选中的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 。

【点睛】 本题考查扇形统计图、统计表以及用样本估计总体以及列表法与树状图法等知识；利用列表法或树状图法展示所有等可能的结果 n ，再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m ，然后利用概率公式计算事件 A 或事件 B 的概率。

21. 如图， $\square ABCD$ 中， AC ， BD 相交于点 O ， E ， F 分别是 OA ， OC 的中点。



(1) 求证： $BE = DF$ ；

(2) 设 $\frac{AC}{BD} = k$ ，当 k 为何值时，四边形 $DEBF$ 是矩形？请说明理由。

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 当 $k = 2$ 时，四边形 $DEBF$ 是矩形，理由见解析

【解析】

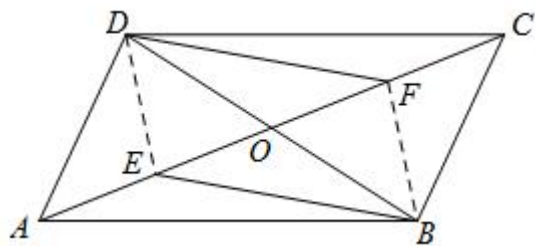
【分析】 (1) 连接 DE, BF ，先根据平行四边形的性质可得 $OA = OC, OB = OD$ ，再根据线段中点的定义可得 $OE = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}OC = OF$ ，然后根据平行四边形的判定可得四边形

$DEBF$ 是平行四边形，最后根据平行四边形的性质即可得证；

(2) 先根据矩形的判定可得当 $BD = EF$ 时，四边形 $DEBF$ 是矩形，再根据线段中点的定义、平行四边形的性质可得 $AC = 2EF$ ，由此即可得出 k 的值。

【小问 1 详解】

证明：如图，连接 DE, BF ，



∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $OA = OC, OB = OD$,

∵ E, F 分别是 OA, OC 的中点,

∴ $OE = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}OC = OF$,

∴ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形,

∴ $BE = DF$.

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 已证: 四边形 $DEBF$ 是平行四边形,

要使平行四边形 $DEBF$ 是矩形, 则 $BD = EF$,

∵ $OE = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}OC = OF$,

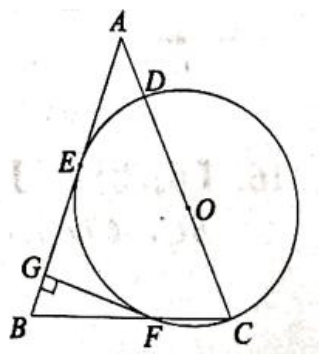
∴ $EF = OE + OF = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}OC = OA = \frac{1}{2}AC$, 即 $AC = 2EF$,

∴ $k = \frac{AC}{BD} = \frac{2EF}{EF} = 2$,

故当 $k = 2$ 时, 四边形 $DEBF$ 是矩形.

【点睛】本题考查了平行四边形的判定与性质、矩形的判定等知识点, 熟练掌握平行四边形的判定与性质是解题关键.

22. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 为 AC 上一点, 以 CD 为直径的 $\odot O$ 与 AB 相切于点 E , 交 BC 于点 F , $FG \perp AB$, 垂足为 G .



(1) 求证: FG 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $BG=1$, $BF=3$, 求 CF 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【解析】

【分析】(1) 连接 DF, OF , 设 $\angle ODF = \angle OFD = \beta$, $\angle OFC = \alpha$, 根据已知条件以及直径所对的圆周角相等, 证明 $\alpha + \beta = 90^\circ$, 进而求得 $\angle DFG = \alpha, \angle DFO = \beta$, 即可证明 FG 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 根据已知条件结合 (1) 的结论可得四边形 $GEOF$ 是正方形, 进而求得 DC 的长, 根据 $\angle BFG = \angle FDC = \beta$, $\sin \beta = \frac{GB}{BF} = \frac{FC}{DC}$, 即可求解.

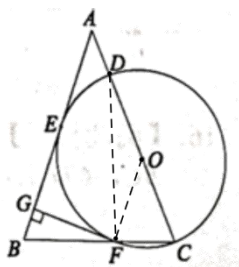
【小问 1 详解】

如图, 连接 DF, OF ,

$\because OF = OD$,

则 $\angle ODF = \angle OFD$,

设 $\angle ODF = \angle OFD = \beta$, $\angle OFC = \alpha$,



$\because OF = OC$,

$\therefore \angle OFC = \angle OCF = \alpha$,

$\because DC$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle DFC = 90^\circ$,

$\therefore \angle DFO + \angle OFC = \angle DFC = 90^\circ$,

即 $\alpha + \beta = 90^\circ$,

$\because AB = AC$,

$\therefore \angle B = \angle ACB = \alpha$,

$\because FG \perp AB$,

$\therefore \angle GFB = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - \alpha = \beta$,

$\because \angle DFB = \angle DFC = 90^\circ$,

$\therefore \angle DFG = 90^\circ - \angle GFB = 90^\circ - \beta = \alpha$,

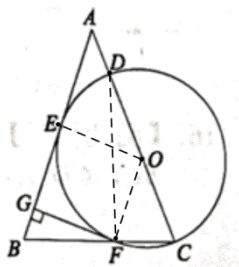
$$\therefore \angle GFO = GFD + DFO = \alpha + \beta = 90^\circ,$$

$\because OF$ 为 $\odot O$ 的半径,

$\therefore FG$ 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

如图, 连接 OE ,



$\because AB$ 是 $\odot O$ 的切线, 则 $OE \perp AB$, 又 $OF \perp FG, FG \perp AB$,

$\therefore$ 四边形 $GEOF$ 是矩形,

$\because OE = OF$,

$\therefore$ 四边形 $GEOF$ 是正方形,

$$\therefore GF = OF = \frac{1}{2}DC,$$

在 $\text{Rt}\triangle GFB$ 中, $BG = 1$, $BF = 3$,

$$\therefore FG = \sqrt{BF^2 - GB^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore DC = 2\sqrt{2},$$

由 (1) 可得 $\angle BFG = \angle FDC = \beta$,

$\because FG \perp AB, DF \perp FC$,

$$\therefore \sin \beta = \frac{GB}{BF} = \frac{FC}{DC},$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{FC}{2\sqrt{2}},$$

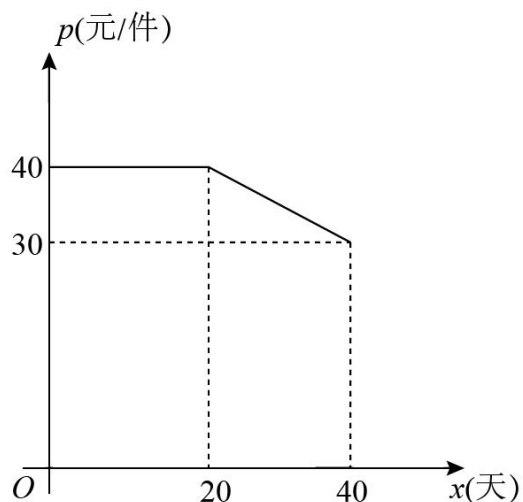
$$\text{解得 } FC = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

【点睛】本题考查了切线的性质与判定, 正方形的性质与判定, 等腰三角形的性质, 正弦的定义, 掌握切线的性质与判定是解题的关键.

23. 某商户购进一批童装, 40 天销售完毕. 根据所记录的数据发现, 日销售量 y (件) 与销

售时间 x (天) 之间的关系式是 $y = \begin{cases} 2x, & 0 < x \leq 30 \\ -6x + 240, & 30 < x \leq 40 \end{cases}$, 销售单价 p (元/件) 与销

售时间 x (天) 之间的函数关系如图所示.



- (1) 第 15 天的日销售量为_____件;
- (2) 当 $0 < x \leq 30$ 时, 求日销售额的最大值;
- (3) 在销售过程中, 若日销售量不低于 48 件的时间段为“火热销售期”, 则“火热销售期”共有多少天?

【答案】(1) 30 (2) 2100 元

(3) 9 天

【解析】

【分析】(1) 将 $x=15$ 直接代入表达式即可求出销售量;

(2) 设销售额为 w 元, 分类讨论, 当 $0 \leq x \leq 20$ 时, 由图可知, 销售单价 $p=40$; 当 $20 < x \leq 30$ 时, 有图可知, p 是 x 的一次函数, 用待定系数法求出 p 的表达式; 分别列出函数表达式, 在自变量取值范围内求取最大值即可;

(3) 分类讨论, 当 $20 < x \leq 30$ 和 $0 < x \leq 30$ 时列出不等式, 解不等式, 即可得出结果.

【小问 1 详解】

解: 当 $x=15$ 时, 销售量 $y=2x=30$;

故答案为 30;

【小问 2 详解】

设销售额为 w 元,

①当 $0 \leq x \leq 20$ 时, 由图可知, 销售单价 $p=40$,

此时销售额 $w=40 \times y=40 \times 2x=80x$

$\because 80 > 0$,

$\therefore w$ 随 x 的增大而增大

当 $x=20$ 时, w 取最大值

此时 $w=80 \times 20=1600$

②当 $20 < x \leq 30$ 时，有图可知， p 是 x 的一次函数，且过点 $(20, 40)$ 、 $(40, 30)$

设销售单价 $p = kx + b$ ($k \neq 0$),

将 $(20, 40)$ 、 $(40, 30)$ 代入得:

$$\begin{cases} 20k + b = 40 \\ 40k + b = 30 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 50 \end{cases}$$

$$\therefore p = -\frac{1}{2}x + 50$$

$$\therefore w = py = \left(-\frac{1}{2}x + 50\right) \cdot 2x = -x^2 + 100x = -(x - 50)^2 + 2500$$

$$\because -1 < 0,$$

$\therefore$ 当 $20 < x \leq 30$ 时， w 随 x 的增大而增大

当 $x = 30$ 时， w 取最大值

$$\text{此时 } w = -(30 - 50)^2 + 2500 = 2100$$

$$\because 1600 < 2100$$

$\therefore w$ 的最大值为 2100,

$\therefore$ 当 $0 < x \leq 30$ 时，日销售额的最大值为 2100 元;

【小问 3 详解】

当 $0 \leq x \leq 30$ 时， $2x \geq 48$

解得 $x \geq 24$

$$\therefore 24 \leq x \leq 30$$

当 $30 < x \leq 40$ ， $-6x + 240 \geq 48$

解得 $x \leq 32$

$$\therefore 30 < x \leq 32$$

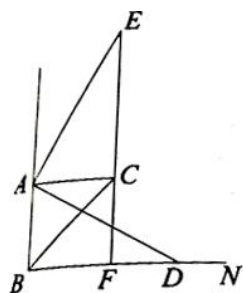
$$\therefore 24 \leq x \leq 32, \text{ 共 } 9 \text{ 天}$$

$\therefore$ 日销售量不低于 48 件的时间段有 9 天.

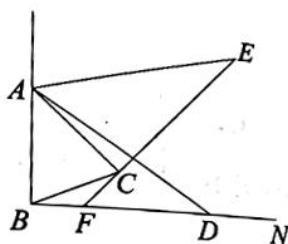
【点睛】 本题考查一元一次方程、一次函数、一元一次不等式、二次函数，是初中数学应用题的综合题型，解题的关键在于利用题目中的等量关系、不等关系列出方程、不等式，求出函数表达式，其中自变量取值范围是易错点、难点.

24. 已知 $\angle ABN = 90^\circ$ ，在 $\angle ABN$ 内部作等腰 $\triangle ABC$ ， $AB = AC$ ，

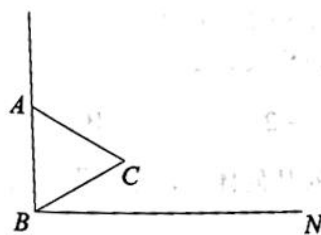
$\angle BAC = \alpha$ ($0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$). 点 D 为射线 BN 上任意一点 (与点 B 不重合)，连接 AD ，将线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 α 得到线段 AE ，连接 EC 并延长交射线 BN 于点 F .



(图 1)



(图 2)



(备用图)

- (1) 如图 1, 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 线段 BF 与 CF 的数量关系是_____;
- (2) 如图 2, 当 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时, (1) 中的结论是否还成立? 若成立, 请给予证明; 若不成立, 请说明理由;
- (3) 若 $\alpha = 60^\circ$, $AB = 4\sqrt{3}$, $BD = m$, 过点 E 作 $EP \perp BN$, 垂足为 P , 请直接写出 PD 的长 (用含有 m 的式子表示).

【答案】(1) $BF=CF$

(2) 成立; 理由见解析

(3) $PD = 6 - \frac{m}{2}$ 或 $PD=0$ 或 $PD = \frac{m}{2} - 6$

【解析】

【分析】(1) 连接 AF , 先根据 “SAS” 证明 $\triangle ACE \cong \triangle ABD$, 得出 $\angle ACE = \angle ABD = 90^\circ$, 再证明 $\text{Rt}\triangle ABF \cong \text{Rt}\triangle ACF$, 即可得出结论;

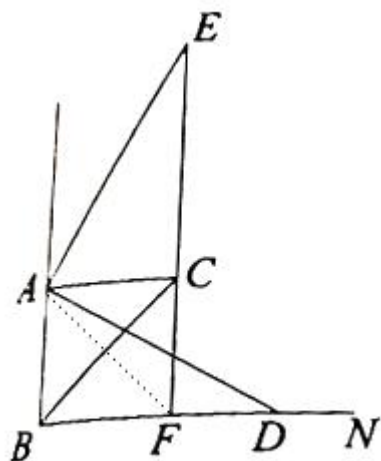
(2) 连接 AF , 先说明 $\angle EAC = \angle BAD$, 然后根据 “SAS” 证明 $\triangle ACE \cong \triangle ABD$, 得出 $\angle ACE = \angle ABD = 90^\circ$, 再证明 $\text{Rt}\triangle ABF \cong \text{Rt}\triangle ACF$, 即可得出结论;

(3) 先根据 $\alpha = 60^\circ$, $AB=AC$, 得出 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 再按照 $\angle BAD < 60^\circ$, $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle BAD > 60^\circ$ 三种情况进行讨论, 得出结果即可.

【小问 1 详解】

解: $BF=CF$; 理由如下:

连接 AF , 如图所示:



根据旋转可知， $\angle DAE = \alpha = 90^\circ$ ， $AE = AD$ ，

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAC + \angle CAD = 90^\circ, \quad \angle BAD + \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle BAD,$$

$$\therefore AC = AB,$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle ABD \quad (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle ACE = \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACF = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABF \text{ 与 Rt}\triangle ACF \text{ 中} \begin{cases} AB = AC \\ AF = AF \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABF \cong \text{Rt}\triangle ACF \quad (\text{HL}),$$

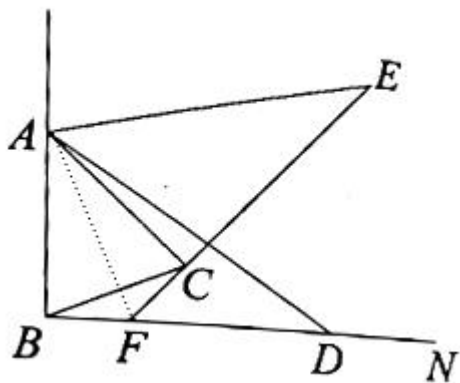
$$\therefore BF = CF.$$

故答案为： $BF = CF$ 。

【小问 2 详解】

成立；理由如下：

连接 AF ，如图所示：



根据旋转可知， $\angle DAE = \alpha$ ， $AE = AD$ ，

$$\therefore \angle BAC = \alpha,$$

$$\therefore \angle EAC - \angle CAD = \alpha, \quad \angle BAD - \angle CAD = \alpha,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle BAD,$$

$$\therefore AC = AB,$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle ABD,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACF = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABF \text{ 与 Rt}\triangle ACF \text{ 中} \begin{cases} AB = AC \\ AF = AF \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABF \cong \text{Rt}\triangle ACF \quad (\text{HL}),$$

$$\therefore BF = CF.$$

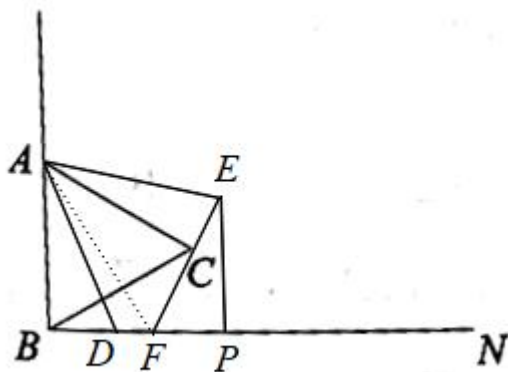
【小问 3 详解】

$$\therefore \alpha = 60^\circ, \quad AB = AC,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \angle BAC = 60^\circ, \quad AB = AC = BC = 4\sqrt{3},$$

当 $\angle BAD < 60^\circ$ 时，连接 AF ，如图所示：



根据解析 (2) 可知, $\text{Rt}\triangle ABF \cong \text{Rt}\triangle ACF$,

$$\therefore \angle BAF = \angle CAF = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \tan \angle BAF = \tan 30^\circ = \frac{BF}{AB},$$

$$\text{即 } BF = AB \times \tan 30^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 4,$$

$$\therefore CF = BF = 4,$$

根据解析 (2) 可知, $\triangle ACE \cong \triangle ABD$,

$$\therefore CE = BD = m,$$

$$\therefore EF = CF + CE = 4 + m,$$

$$\angle FBC = \angle FCB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle EFP = \angle FBC + \angle FCB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EPF = 90^\circ,$$

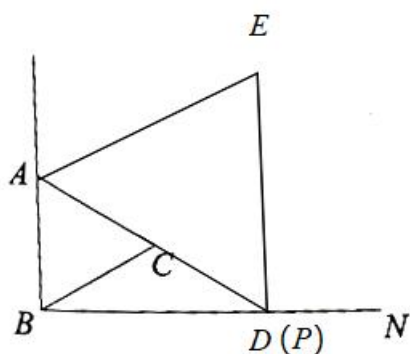
$$\therefore \angle FEP = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore PF = \frac{1}{2} EF = \frac{1}{2} (4 + m) = 2 + \frac{m}{2},$$

$$\therefore BP = BF + PF = 4 + 2 + \frac{m}{2} = 6 + \frac{m}{2},$$

$$\therefore PD = BP - BD = 6 + \frac{m}{2} - m = 6 - \frac{m}{2};$$

当 $\angle BAD = 60^\circ$ 时, AD 与 AC 重合, 如图所示:



$$\therefore \angle DAE = 60^\circ, \quad AE = AD,$$

$\therefore \triangle ADE$ 为等边三角形,

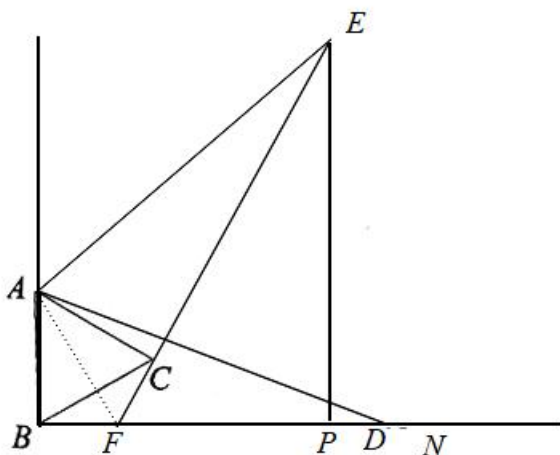
$$\therefore \angle ADE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ - \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ,$$

$\therefore$ 此时点 P 与点 D 重合, $PD = 0$;

当 $\angle BAD > 60^\circ$ 时, 连接 AF , 如图所示:



根据解析 (2) 可知, $\text{Rt}\triangle ABF \cong \text{Rt}\triangle ACF$,

$$\therefore \angle BAF = \angle CAF = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \tan \angle BAF = \tan 30^\circ = \frac{BF}{AB},$$

$$\text{即 } BF = AB \times \tan 30^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 4,$$

$$\therefore CF = BF = 4,$$

根据解析 (2) 可知, $\triangle ACE \cong \triangle ABD$,

$$\therefore CE = BD = m,$$

$$\therefore EF = CF + CE = 4 + m,$$

$$\therefore \angle FBC = \angle FCB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle EFP = \angle FBC + \angle FCB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EPF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FEP = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

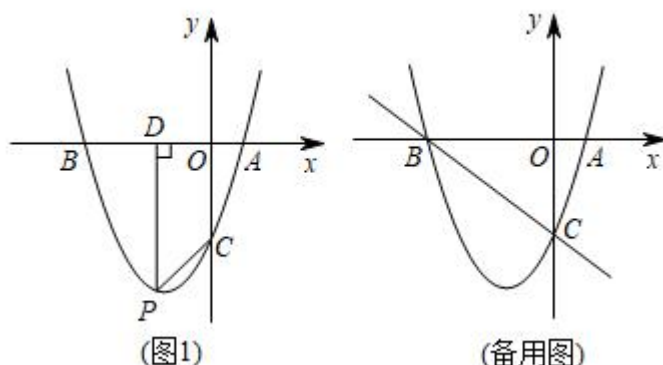
$$\therefore PF = \frac{1}{2} EF = \frac{1}{2} (4 + m) = 2 + \frac{m}{2},$$

$$\therefore BP = BF + PF = 4 + 2 + \frac{m}{2} = 6 + \frac{m}{2},$$

$$\therefore PD = BD - BF = m - \left(6 + \frac{m}{2}\right) = \frac{m}{2} - 6;$$

综上所述可知, $PD = 6 - \frac{m}{2}$ 或 $PD = 0$ 或 $PD = \frac{m}{2} - 6$.

25. 已知抛物线 $y = ax^2 + \frac{9}{4}x + c$ 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和点 B 两点, 与 y 轴交于点 $C(0, -3)$.



(1) 求抛物线的解析式;

(2) 点 P 是抛物线上一动点 (不与点 A, B, C 重合), 作 $PD \perp x$ 轴, 垂足为 D , 连接 PC .

①如图 1, 若点 P 在第三象限, 且 $\angle CPD = 45^\circ$, 求点 P 的坐标;

②直线 PD 交直线 BC 于点 E , 当点 E 关于直线 PC 的对称点 E' 落在 y 轴上时, 求四边形 $PECE'$ 的周长.

【答案】(1) $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3$

(2) ① $P\left(-\frac{5}{3}, -\frac{14}{3}\right)$; ② $\frac{85}{3}$ 或 $\frac{35}{3}$

【解析】

【分析】(1) 把点 $A(1, 0)$, $C(0, -3)$ 代入, 即可求解;

(2) ①过点 C 作 $CQ \perp DP$ 于点 Q , 可得 $\triangle CPQ$ 为等腰直角三角形, 从而得到 $PQ = CQ$, 设点 $P\left(m, \frac{3}{4}m^2 + \frac{9}{4}m - 3\right)$, 则 $OD = -m$, $PD = -\frac{3}{4}m^2 - \frac{9}{4}m + 3$, 再由四边形 $OCQD$ 为矩

形, 可得 $QC = OD = PQ = -m$, $DQ = OC = 3$, 从而得到 $PQ = -\frac{3}{4}m^2 - \frac{9}{4}m$, 即可求解; ②过点

E 作 $EM \parallel x$ 轴于点 M , 先求出直线 BC 的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x - 3$, 证得四边形 $PECE'$ 为菱

形, 可得 $CE = PE = \frac{3}{4}t^2 + 3t$, 然后根据 $\triangle CEM \sim \triangle CBO$, 设点 $P\left(t, \frac{3}{4}t^2 + \frac{9}{4}t - 3\right)$, 则点

$E\left(t, -\frac{3}{4}t - 3\right)$, 然后分三种情况讨论, 即可求解.

【小问 1 详解】

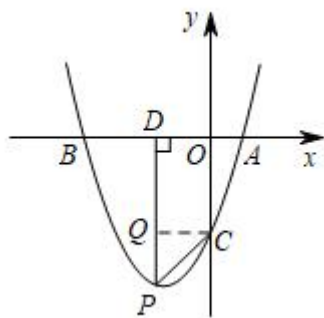
解: 把点 $A(1, 0)$, $C(0, -3)$ 代入得:

$$\begin{cases} a + \frac{9}{4} + c = 0 \\ c = -3 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ c = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3$;

【小问 2 详解】

解: ①如图, 过点 C 作 $CQ \perp DP$ 于点 Q ,



$\because$ 点 $C(0, -3)$,

$\therefore OC=3$,

$\because \angle CPD = 45^\circ$,

$\therefore \triangle CPQ$ 为等腰直角三角形,

$\therefore CQ=PQ$,

设点 $P\left(m, \frac{3}{4}m^2 + \frac{9}{4}m - 3\right)$, 则 $OD=-m$, $PD = -\frac{3}{4}m^2 - \frac{9}{4}m + 3$,

$\because PD \perp x$ 轴,

$\therefore \angle COD = \angle ODQ = \angle CQD = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $OCQD$ 为矩形,

$\therefore QC=OD=PQ=-m$, $DQ=OC=3$,

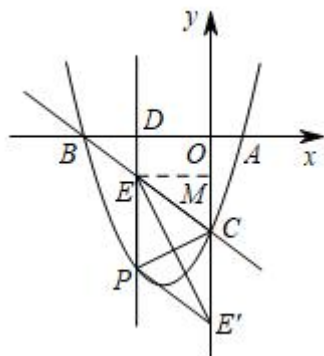
$\therefore PQ = DP - DQ = -\frac{3}{4}m^2 - \frac{9}{4}m + 3 - 3 = -\frac{3}{4}m^2 - \frac{9}{4}m$,

$\therefore -m = -\frac{3}{4}m^2 - \frac{9}{4}m$,

解得： $m = -\frac{5}{3}$ 或 0 (舍去)，

$\therefore$ 点 $P\left(-\frac{5}{3}, -\frac{14}{3}\right)$;

②如图，过点 E 作 $EM \parallel x$ 轴于点 M ，



$$\text{令 } y=0, \quad \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3 = 0,$$

解得： $x_1 = -4, x_2 = 1$ (舍去)，

$\therefore$ 点 $B(-4, 0)$ ，

$\therefore OB=4$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 5,$$

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + n (k \neq 0)$ ，

把点 $B(-4, 0)$ ， $C(0, -3)$ 代入得：

$$\begin{cases} -4k + n = 0 \\ n = -3 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ n = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x - 3$ ，

$\because$ 点 E 关于直线 PC 的对称点 E' 落在 y 轴上时，

$\therefore CE = CE'$ ， $PE = PE'$ ， $\angle PCE = \angle PCE'$ ，

$\because DP \perp x$ 轴，

$\therefore PD \parallel CE'$ ，

$\therefore \angle CPE = \angle PCE'$ ，

$\therefore \angle CPE = \angle PCE$ ，

$\therefore CE = PE$ ，

$\therefore PE = PE' = CE = CE'$ ，

∴ 四边形 $PECE'$ 为菱形,

∵ $EM \parallel x$ 轴,

∴ $\triangle CEM \sim \triangle CBO$,

$$\therefore \frac{EM}{OB} = \frac{CE}{BC},$$

设点 $P\left(t, \frac{3}{4}t^2 + \frac{9}{4}t - 3\right)$, 则点 $E\left(t, -\frac{3}{4}t - 3\right)$,

当点 P 在 y 轴左侧时, $EM = -t$,

$$\text{当 } -4 < t < 0 \text{ 时, } PE = \left(-\frac{3}{4}t - 3\right) - \left(\frac{3}{4}t^2 + \frac{9}{4}t - 3\right) = -\frac{3}{4}t^2 - 3t,$$

$$\therefore CE = PE = -\frac{3}{4}t^2 - 3t,$$

$$\therefore \frac{-t}{4} = \frac{-\frac{3}{4}t^2 - 3t}{5},$$

解得: $t = -\frac{7}{3}$ 或 0 (舍去),

$$\therefore PE = -\frac{3}{4}t^2 - 3t = \frac{35}{12},$$

$$\therefore \text{四边形 } PECE' \text{ 的周长为 } 4PE = 4 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{3};$$

当点 P 在 y 轴右侧时, $EM = t$,

$$\text{当 } t \leq -4 \text{ 时, } PE = \left(\frac{3}{4}t^2 + \frac{9}{4}t - 3\right) - \left(-\frac{3}{4}t - 3\right) = \frac{3}{4}t^2 + 3t,$$

$$\therefore \frac{-t}{4} = \frac{\frac{3}{4}t^2 + 3t}{5}, \text{ 解得: } t = -\frac{17}{3} \text{ 或 } 0 \text{ (舍去),}$$

$$\text{此时 } PE = \frac{3}{4}t^2 + 3t = \frac{85}{12},$$

$$\therefore \text{四边形 } PECE' \text{ 的周长为 } 4PE = 4 \times \frac{85}{12} = \frac{85}{3};$$

$$\text{当点 } P \text{ 在 } y \text{ 轴右侧, 即 } t > 0 \text{ 时, } EM = t, PE = \left(\frac{3}{4}t^2 + \frac{9}{4}t - 3\right) - \left(-\frac{3}{4}t - 3\right) = \frac{3}{4}t^2 + 3t,$$

$$\therefore \frac{t}{4} = \frac{\frac{3}{4}t^2 + 3t}{5}, \text{ 解得: } t = -\frac{7}{3} \text{ 或 } 0,$$

不符合题意，舍去；

综上所述，四边形 $PECE'$ 的周长为 $\frac{85}{3}$ 或 $\frac{35}{3}$.

【点睛】本题主要考查了二次函数的综合题：熟练掌握二次函数图象上点的坐标特征、对称的性质和菱形的判定方法；会利用待定系数法求函数解析式；理解坐标与图形性质；会利用相似比计算线段的长和解一元二次方程是解题的关键.