

2023 年河南省普通高中招生考试试卷数学

一、选择题

1. 下列各数中，最小的数是（ ）

- A. -1 B. 0 C. 1 D. $\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据实数的大小比较法则，比较即可解答.

【详解】解： $\because -1 < 0 < 1 < \sqrt{3}$,

$\therefore$ 最小的数是 -1 .

故选：A

【点睛】本题考查实数的大小比较，负数都小于 0 ，正数都大于 0 ，正数大于一切负数，两个负数，其绝对值大的反而小.

2. 北宋时期的汝官窑天蓝釉刻花鹅颈瓶是河南博物院九大镇院之宝之一，具有极高的历史价值、文化价值. 如图所示，关于它的三视图，下列说法正确的是（ ）



- A. 主视图与左视图相同 B. 主视图与俯视图相同
C. 左视图与俯视图相同 D. 三种视图都相同

【答案】A

【解析】

【分析】直接利用已知几何体分别得出三视图进而分析得出答案.

【详解】解：这个花鹅颈瓶的主视图与左视图相同，俯视图与主视图和左视图不相同.

故选：A.

【点睛】此题主要考查了简单几何体的三视图，掌握三视图的概念是解题关键.

3. 2022 年河南省出版的 4.59 亿册图书，为贯彻落实党的二十大关于深化全民阅读活动的重要精神，建设学习型社会提供了丰富的图书资源. 数据“4.59 亿”用科学记数法表示为（ ）

- A. 4.59×10^7 B. 45.9×10^8 C. 4.59×10^8 D. 0.459×10^9

【答案】C

【解析】

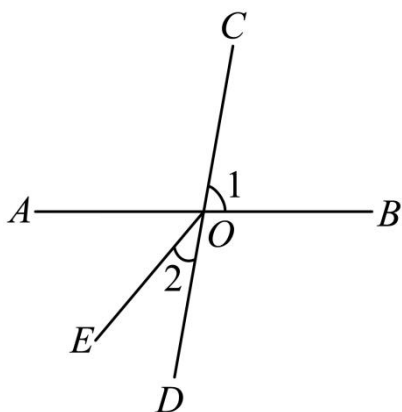
【分析】将一个数表示为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，这种记数方法叫做科学记数法，据此即可得出答案.

【详解】解：4.59 亿 $= 459000000 = 4.59 \times 10^8$.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了用科学记数法表示较大的数，掌握形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ，确定 a 与 n 的值是解题的关键.

4. 如图，直线 AB ， CD 相交于点 O ，若 $\angle 1 = 80^\circ$ ， $\angle 2 = 30^\circ$ ，则 $\angle AOE$ 的度数为 ()

A. 30° B. 50° C. 60° D. 80°

【答案】B

【解析】

【分析】根据对顶角相等可得 $\angle AOD = \angle 1 = 80^\circ$ ，再根据角的和差关系可得答案.

【详解】解： $\because \angle 1 = 80^\circ$,

$\therefore \angle AOD = \angle 1 = 80^\circ$,

$\because \angle 2 = 30^\circ$,

$\therefore \angle AOE = \angle AOD - \angle 2 = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$,

故选：B

【点睛】本题主要考查了对顶角的性质，解题的关键是掌握对顶角相等.

5. 化简 $\frac{a-1}{a} + \frac{1}{a}$ 的结果是 ()

A. 0

B. 1

C. a D. $a-2$

【答案】B

【解析】

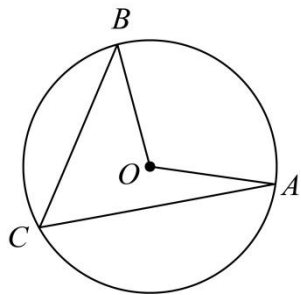
【分析】根据同母的分式加法法则进行计算即可.

【详解】解: $\frac{a-1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{a-1+1}{a} = \frac{a}{a} = 1$,

故选: B.

【点睛】本题考查同分母的分式加法, 熟练掌握运算法则是解决问题的关键.

6. 如图, 点 A, B, C 在 $\odot O$ 上, 若 $\angle C = 55^\circ$, 则 $\angle AOB$ 的度数为 ()



- A. 95° B. 100° C. 105° D. 110°

【答案】D

【解析】

【分析】直接根据圆周角定理即可得.

【详解】解: $\because \angle C = 55^\circ$,

$\therefore$ 由圆周角定理得: $\angle AOB = 2\angle C = 110^\circ$,

故选: D.

【点睛】本题考查了圆周角定理, 熟练掌握圆周角定理是解题关键.

7. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + mx - 8 = 0$ 的根的情况是 ()

- A. 有两个不相等的实数根 B. 有两个相等的实数根
C. 只有一个实数根 D. 没有实数根

【答案】A

【解析】

【分析】对于 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 当 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实根, 当 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实根, $\Delta < 0$, 方程没有实根, 根据原理作答即可.

【详解】解: $\because x^2 + mx - 8 = 0$,

$\therefore \Delta = m^2 - 4 \times (-8) = m^2 + 32 > 0$,

所以原方程有两个不相等的实数根,

故选：A.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式，熟练掌握一元二次方程根的判别式是解题关键.

8. 为落实教育部办公厅、中共中央宣传部办公厅关于《第 41 批向全国中小学生推荐优秀影片片目》的通知精神，某校七、八年级分别从如图所示的三部影片中随机选择一部组织本年级学生观看，则这两个年级选择的影片相同的概率为 ()



A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{6}$

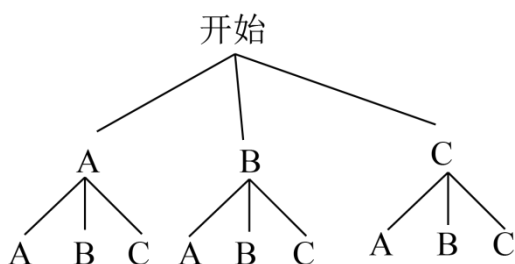
D. $\frac{1}{9}$

【答案】B

【解析】

【分析】先画树状图，再根据概率公式计算即可.

【详解】设三部影片依次为 A、B、C，根据题意，画树状图如下：

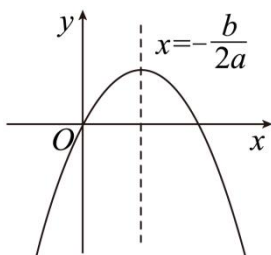


故相同的概率为 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

故选 B.

【点睛】本题考查了画树状图法计算概率，熟练掌握画树状图法是解题的关键.

9. 二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图象如图所示，则一次函数 $y = x + b$ 的图象一定不经过 ()



A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次函数图象的开口方向、对称轴判断出 a 、 b 的正负情况，再由一次函数的性质解答.【详解】解：由图象开口向下可知 $a < 0$,由对称轴 $x = -\frac{b}{2a} > 0$, 得 $b > 0$. $\therefore$ 一次函数 $y = x + b$ 的图象经过第一、二、三象限, 不经过第四象限.

故选: D.

【点睛】本题考查二次函数图象和一次函数图象的性质, 解答本题的关键是求出 a 、 b 的正负情况, 要掌握它们的性质才能灵活解题, 此题难度不大.

10. 如图 1, 点 P 从等边三角形 ABC 的顶点 A 出发, 沿直线运动到三角形内部一点, 再从该点沿直线运动到顶点 B . 设点 P 运动的路程为 x , $\frac{PB}{PC} = y$, 图 2 是点 P 运动时 y 随 x 变化的关系图象, 则等边三角形 ABC 的边长为 ()

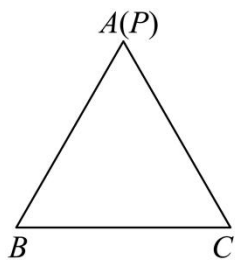


图1

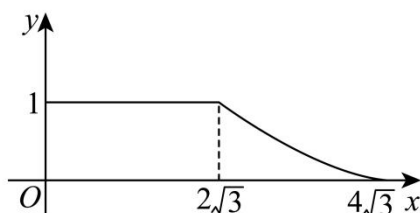


图2

A. 6

B. 3

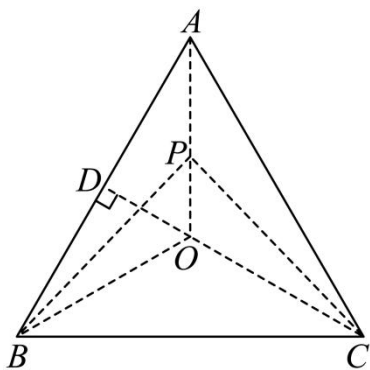
C. $4\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】如图, 令点 P 从顶点 A 出发, 沿直线运动到三角形内部一点 O , 再从点 O 沿直线运动到顶点 B . 结合图象可知, 当点 P 在 AO 上运动时, $PB = PC$, $AO = 2\sqrt{3}$, 易知 $\angle BAO = \angle CAO = 30^\circ$, 当点 P 在 OB 上运动时, 可知点 P 到达点 B 时的路程为 $4\sqrt{3}$, 可知 $AO = OB = 2\sqrt{3}$, 过点 O 作 $OD \perp AB$, 解直角三角形可得 $AD = AO \cdot \cos 30^\circ = 3$, 进而可求得等边三角形 ABC 的边长.

【详解】解: 如图, 令点 P 从顶点 A 出发, 沿直线运动到三角形内部一点 O , 再从点 O 沿直线运动到顶点 B .



结合图象可知，当点 P 在 AO 上运动时， $\frac{PB}{PC} = 1$ ，

$$\therefore PB = PC, \quad AO = 2\sqrt{3},$$

又 $\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ, \quad AB = AC,$$

$$\therefore \triangle APB \cong \triangle APC \text{ (SSS)},$$

$$\therefore \angle BAO = \angle CAO,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle CAO = 30^\circ,$$

当点 P 在 OB 上运动时，可知点 P 到达点 B 时的路程为 $4\sqrt{3}$ ，

$$\therefore OB = 2\sqrt{3}, \quad \text{即 } AO = OB = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \angle BAO = \angle ABO = 30^\circ,$$

过点 O 作 $OD \perp AB$ ，

$$\therefore AD = BD, \quad \text{则 } AD = AO \cdot \cos 30^\circ = 3,$$

$$\therefore AB = AD + BD = 6,$$

即：等边三角形 ABC 的边长为 6，

故选：A.

【点睛】本题考查了动点问题的函数图象，解决本题的关键是综合利用图象和图形给出的条件.

二、填空题

11. 某校计划给每个年级配发 n 套劳动工具，则 3 个年级共需配发_____套劳动工具.

【答案】 $3n$

【解析】

【分析】根据总共配发的数量 = 年级数量 $\times$ 每个年级配发的套数，列代数式.

【详解】解：由题意得：3 个年级共需配发得套劳动工具总数为： $3n$ 套，

故答案为： $3n$.

【点睛】 本题考查了列代数式，解答本题的关键是读懂题意，找出合适的等量关系，列代数式.

12. 方程组 $\begin{cases} 3x + y = 5, \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ 的解为_____.

【答案】 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

【解析】

【分析】 利用加减消元法求解即可.

【详解】 解: $\begin{cases} 3x + y = 5 \text{ ①} \\ x + 3y = 7 \text{ ②} \end{cases}$

由 ① $\times 3$ - ② 得, $8x = 8$, 解得 $x = 1$,

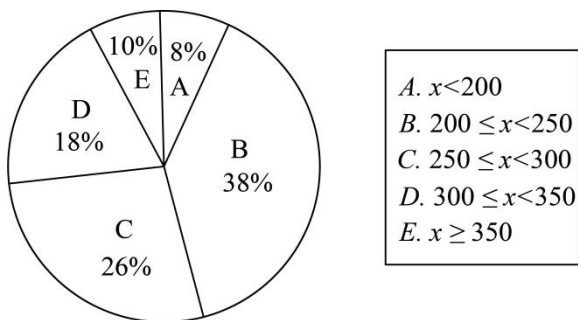
把 $x = 1$ 代入 ① 中得 $3 \times 1 + y = 5$, 解得 $y = 2$,

故原方程组的解是 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$,

故答案为: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

【点睛】 本题主要考查了二元一次方程组的解法，解二元一次方程组的常用解法：代入消元法和加减消元法，观察题目选择合适的方法是解题关键.

13. 某林木良种繁育试验基地为全面掌握“无絮杨”品种苗的生长规律，定期对培育的 1000 棵该品种苗进行抽测. 如图是某次随机抽测该品种苗的高度 x (cm) 的统计图，则此时该基地高度不低于 300cm 的“无絮杨”品种苗约有_____棵.



【答案】 280

【解析】

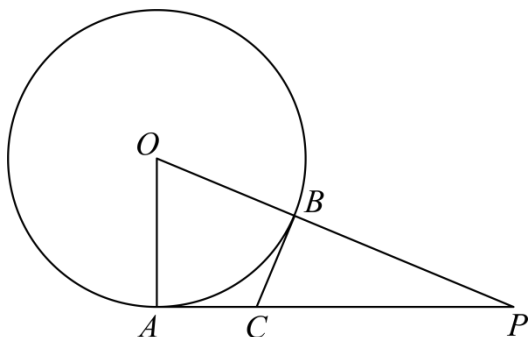
【分析】 利用 1000 棵乘以样本中不低于 300cm 的百分比即可求解.

【详解】 解: 该基地高度不低于 300cm 的“无絮杨”品种苗所占百分比为 $10\% + 18\% = 28\%$,
则不低于 300cm 的“无絮杨”品种苗约为: $1000 \times 28\% = 280$ 棵,

故答案为：280.

【点睛】 本题考查用样本估计总体，明确题意，结合扇形统计图中百分比是解决问题的关键.

14. 如图， PA 与 $\odot O$ 相切于点 A ， PO 交 $\odot O$ 于点 B ，点 C 在 PA 上，且 $CB = CA$. 若 $OA = 5$ ， $PA = 12$ ，则 CA 的长为_____.



【答案】 $\frac{10}{3}$

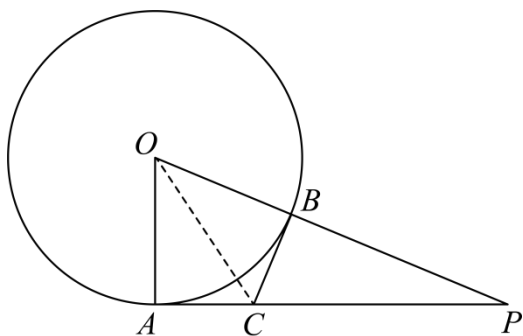
【解析】

【分析】 连接 OC ，证明 $\triangle OAC \cong \triangle OBC$ ，设 $CB = CA = x$ ，则 $PC = PA - CA = 12 - x$ ，再证明 $\triangle PAO \sim \triangle PBC$ ，列出比例式计算即可.

【详解】 如图，连接 OC ，

$\because PA$ 与 $\odot O$ 相切于点 A ，

$\therefore \angle OAC = 90^\circ$ ；



$$\therefore \begin{cases} OA = OB \\ CA = CB \\ OC = OC \end{cases},$$

$\therefore \triangle OAC \cong \triangle OBC$ ，

$\therefore \angle OAC = \angle OBC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle PAO = \angle PBC = 90^\circ$ ，

$\because \angle P = \angle P$ ，

$\therefore \triangle PAO \sim \triangle PBC$ ，

$$\therefore \frac{PO}{PC} = \frac{AO}{BC},$$

$$\because OA = 5, PA = 12,$$

$$\therefore PO = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$$

设 $CB = CA = x$ ，则 $PC = PA - CA = 12 - x$ ，

$$\therefore \frac{13}{12-x} = \frac{5}{x},$$

$$\text{解得 } x = \frac{10}{3},$$

故 CA 的长为 $\frac{10}{3}$ ，

故答案为： $\frac{10}{3}$ 。

【点睛】 本题考查了切线的性质，三角形全等的判定和性质，勾股定理，三角形相似的判断和性质，熟练掌握性质是解题的关键。

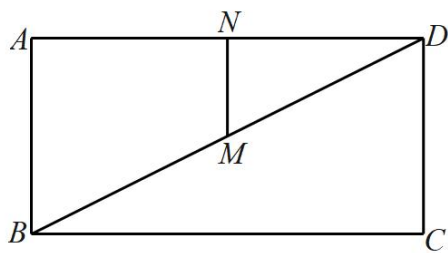
15. 矩形 $ABCD$ 中， M 为对角线 BD 的中点，点 N 在边 AD 上，且 $AN = AB = 1$ 。当以点 D, M, N 为顶点的三角形是直角三角形时， AD 的长为_____。

【答案】 2 或 $\sqrt{2} + 1$

【解析】

【分析】 分两种情况：当 $\angle MND = 90^\circ$ 时和当 $\angle NMD = 90^\circ$ 时，分别进行讨论求解即可。

【详解】 解：当 $\angle MND = 90^\circ$ 时，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 矩形，

$\therefore \angle A = 90^\circ$ ，则 $MN \parallel AB$ ，

由平行线分线段成比例可得： $\frac{AN}{ND} = \frac{BM}{MD}$ ，

又 $\because M$ 为对角线 BD 的中点，

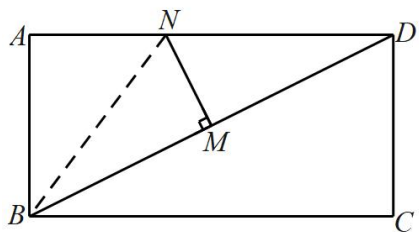
$$\therefore BM = MD,$$

$$\therefore \frac{AN}{ND} = \frac{BM}{MD} = 1,$$

即： $ND = AN = 1$ ，

$$\therefore AD = AN + ND = 2,$$

当 $\angle NMD = 90^\circ$ 时,



$\because M$ 为对角线 BD 的中点, $\angle NMD = 90^\circ$

$\therefore MN$ 为 BD 的垂直平分线,

$$\therefore BN = ND,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 矩形, $AN = AB = 1$

$$\therefore \angle A = 90^\circ, \text{ 则 } BN = \sqrt{AB^2 + AN^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore BN = ND = \sqrt{2}$$

$$\therefore AD = AN + ND = \sqrt{2} + 1,$$

综上, AD 的长为 2 或 $\sqrt{2} + 1$,

故答案为: 2 或 $\sqrt{2} + 1$.

【点睛】 本题考查矩形的性质, 平行线分线段成比例, 垂直平分线的判定及性质等, 画出草图进行分类讨论是解决问题的关键.

三、解答题

16. (1) 计算: $|-3| - \sqrt{9} + 5^{-1}$;

(2) 化简: $(x-2y)^2 - x(x-4y)$.

【答案】 (1) $\frac{1}{5}$; $4y^2$

【解析】

【分析】 (1) 先求绝对值和算术平方根, 再进行加减计算即可;

(2) 先利用完全平方公式去括号, 再合并同类项即可.

【详解】 (1) 解: 原式 $= 3 - 3 + \frac{1}{5}$
 $= \frac{1}{5};$

(2) 解：原式 $= x^2 - 4xy + 4y^2 - x^2 + 4xy$
 $= 4y^2$.

【点睛】本题考查实数的混合运算、多项式乘多项式的混合运算，熟练掌握完全平方公式是解题的关键.

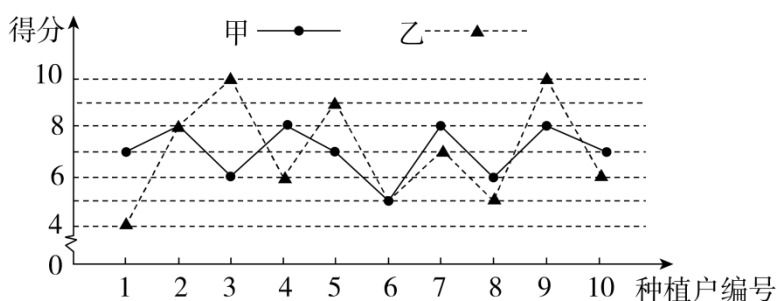
17. 蓬勃发展的快递业，为全国各地的新鲜水果及时走进千家万户提供了极大便利. 不同的快递公司在配送、服务、收费和投递范围等方面各具优势. 樱桃种植户小丽经过初步了解，打算从甲、乙两家快递公司中选择一家合作，为此，小丽收集了 10 家樱桃种植户对两家公司的相关评价，并整理、描述、分析如下：

a. 配送速度得分（满分 10 分）：

甲：6 6 7 7 7 8 9 9 9 10

乙：6 7 7 8 8 8 8 9 9 10

b. 服务质量得分统计图（满分 10 分）：



c. 配送速度和服务质量得分统计表：

项目 统计量 快递公司	配送速度得分		服务质量得分	
	平均数	中位数	平均数	方差
甲	7.8	m	7	$s_{\text{甲}}^2$
乙	8	8	7	$s_{\text{乙}}^2$

根据以上信息，回答下列问题：

- 表格中的 $m =$ _____； $s_{\text{甲}}^2$ _____ $s_{\text{乙}}^2$ （填“>”“=”或“<”）.
- 综合上表中的统计量，你认为小丽应选择哪家公司？请说明理由.
- 为了从甲、乙两家公司中选出更合适的公司，你认为还应收集什么信息（列出一条即可）？

【答案】(1) 7.5； <

(2) 甲公司，理由见解析

(3) 还应收集甲、乙两家公司的收费情况。(答案不唯一，言之有理即可)

【解析】

【分析】(1) 根据中位数和方差的概念求解即可；

(2) 通过比较平均数，中位数和方差求解即可；

(3) 根据题意求解即可.

【小问 1 详解】

由题意可得, $m = \frac{7+8}{2} = 7.5$,

$$s_{\text{甲}}^2 = \frac{1}{10} \times [3 \times (7-7)^2 + 4 \times (8-7)^2 + 2 \times (6-7)^2 + (5-7)^2] = 1$$

$$s_{\text{乙}}^2 = \frac{1}{10} \times [(4-7)^2 + (8-7)^2 + 2 \times (10-7)^2 + 2 \times (6-7)^2 + (9-7)^2 + 2 \times (5-7)^2 + (7-7)^2] = 4.2,$$

$$\therefore s_{\text{甲}}^2 < s_{\text{乙}}^2,$$

故答案为: 7.5; <;

【小问 2 详解】

$\because$ 配送速度得分甲和乙的得分相差不大,

服务质量得分甲和乙的平均数相同, 但是甲的方差明显小于乙的方差,

$\therefore$ 甲更稳定,

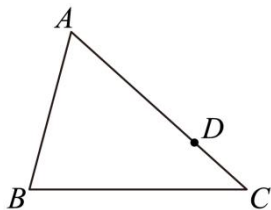
$\therefore$ 小丽应选择甲公司;

【小问 3 详解】

还应收集甲、乙两家公司的收费情况。(答案不唯一，言之有理即可)

【点睛】本题考查中位数、平均数、方差的定义，掌握中位数、平均数、方差的定义是解题的关键.

18. 如图, $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AC 上, 且 $AD = AB$.



(1) 请用无刻度的直尺和圆规作出 $\angle A$ 的平分线 (保留作图痕迹, 不写作法).

(2) 若 (1) 中所作的角平分线与边 BC 交于点 E , 连接 DE . 求证: $DE = BE$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

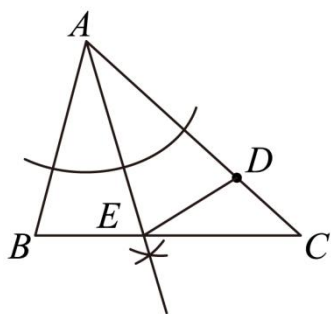
【解析】

【分析】(1) 利用角平分线的作图步骤作图即可;

(2) 证明 $\triangle BAE \cong \triangle DAE$ (SAS), 即可得到结论.

【小问 1 详解】

解：如图所示，即为所求，



【小问 2 详解】

证明： $\because AE$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle BAE = \angle DAE,$$

$$\because AB = AD, \quad AE = AE,$$

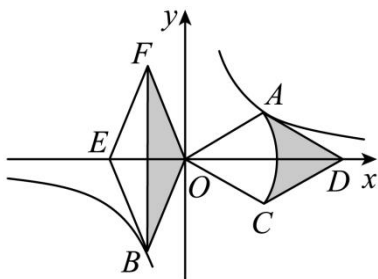
$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle DAE (\text{SAS}),$$

$$\therefore DE = BE.$$

【点睛】此题考查了角平分线的作图、全等三角形的判定和性质等知识，熟练掌握角平分线的作图和全等三角形的判定是解题的关键.

19. 小军借助反比例函数图象设计“鱼形”图案，如图，在平面直角坐标系中，以反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象上

的点 $A(\sqrt{3}, 1)$ 和点 B 为顶点，分别作菱形 $AOCD$ 和菱形 $OBEF$ ，点 D, E 在 x 轴上，以点 O 为圆心， OA 长为半径作 $\widehat{AC}$ ，连接 BF 。



- (1) 求 k 的值;
- (2) 求扇形 AOC 的半径及圆心角的度数;
- (3) 请直接写出图中阴影部分面积之和.

【答案】(1) $\sqrt{3}$

(2) 半径为 2，圆心角为 60°

(3) $3\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$

【解析】

【分析】(1) 将 $A(\sqrt{3}, 1)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 中即可求解；

(2) 利用勾股定理求解边长，再利用三角函数求出 $\angle AOD$ 的度数，最后结合菱形的性质求解；

(3) 先计算出 $S_{\text{菱形}A OCD} = 2\sqrt{3}$ ，再计算出扇形的面积，根据菱形的性质及结合 k 的几何意义可求出 $S_{\triangle FBO} = \sqrt{3}$ ，从而问题即可解答.

【小问 1 详解】

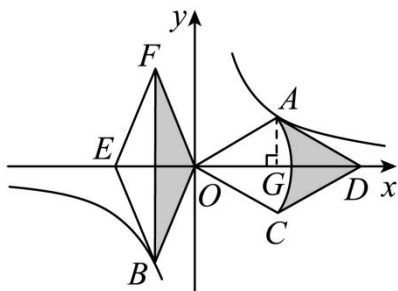
解：将 $A(\sqrt{3}, 1)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 中，

$$\text{得 } 1 = \frac{k}{\sqrt{3}},$$

解得： $k = \sqrt{3}$ ；

【小问 2 详解】

解：过点 A 作 OD 的垂线，垂足为 G ，如下图：



$$\because A(\sqrt{3}, 1),$$

$$\therefore AG = 1, OG = \sqrt{3},$$

$$\therefore OA = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2,$$

$\therefore$ 半径为 2；

$$\because AG = \frac{1}{2}OA,$$

$$\therefore \sin \angle AOG = \frac{AG}{OA} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle AOG = 30^\circ,$$

由菱形的性质知： $\angle AOG = \angle COG = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle AOC = 60^\circ,$$

∴ 扇形 AOC 的圆心角的度数: 60° ;

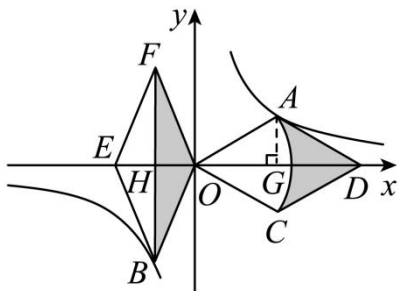
【小问 3 详解】

解: ∵ $OD = 2OG = 2\sqrt{3}$,

$$\therefore S_{\text{菱形}AOCD} = AG \times OD = 1 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{扇形}AOC} = \frac{1}{6} \times \pi r^2 = \frac{1}{6} \times \pi \times 2^2 = \frac{2}{3}\pi,$$

如下图: 由菱形 $OBEF$ 知, $S_{\triangle FHO} = S_{\triangle BHO}$,



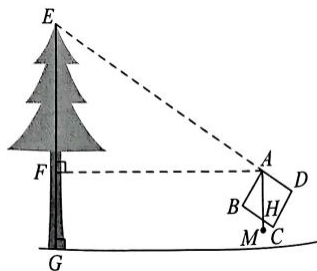
$$\therefore S_{\triangle BHO} = \frac{|k|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle FBO} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分面积}} = S_{\triangle FBO} + S_{\text{菱形}AOCD} - S_{\text{扇形}AOC} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi = 3\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi.$$

【点睛】本题考查了反比例函数及 k 的几何意义, 菱形的性质、勾股定理、圆心角, 解题的关键是掌握 k 的几何意义.

20. 综合实践活动中, 某小组用木板自制了一个测高仪测量树高, 测高仪 $ABCD$ 为正方形, $AB = 30\text{cm}$, 顶点 A 处挂了一个铅锤 M . 如图是测量树高的示意图, 测高仪上的点 D, A 与树顶 E 在一条直线上, 铅垂线 AM 交 BC 于点 H . 经测量, 点 A 距地面 1.8m , 到树 EG 的距离 $AF = 11\text{m}$, $BH = 20\text{cm}$. 求树 EG 的高度 (结果精确到 0.1m).



【答案】树 EG 的高度为 9.1m

【解析】

【分析】由题意可知， $\angle BAE = \angle MAF = \angle BAD = 90^\circ$ ， $FG = 1.8\text{m}$ ，易知 $\angle EAF = \angle BAH$ ，可得 $\tan \angle EAF = \frac{EF}{AF} = \tan \angle BAH = \frac{2}{3}$ ，进而求得 $EF = \frac{22}{3}\text{m}$ ，利用 $EG = EF + FG$ 即可求解。

【详解】解：由题意可知， $\angle BAE = \angle MAF = \angle BAD = 90^\circ$ ， $FG = 1.8\text{m}$ ，
则 $\angle EAF + \angle BAF = \angle BAF + \angle BAH = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle EAF = \angle BAH,$$

$$\therefore AB = 30\text{cm}, BH = 20\text{cm},$$

$$\text{则 } \tan \angle BAH = \frac{BH}{AB} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \tan \angle EAF = \frac{EF}{AF} = \tan \angle BAH = \frac{2}{3},$$

$$\therefore AF = 11\text{m}, \text{ 则 } \frac{EF}{11} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore EF = \frac{22}{3}\text{m},$$

$$\therefore EG = EF + FG = \frac{22}{3} + 1.8 \approx 9.1\text{m},$$

答：树 EG 的高度为 9.1m 。

【点睛】本题考查解直角三角形的应用，得到 $\angle EAF = \angle BAH$ 是解决问题的关键。

21. 某健身器材专卖店推出两种优惠活动，并规定购物时只能选择其中一种。

活动一：所购商品按原价打八折；

活动二：所购商品按原价每满300元减80元。（如：所购商品原价为300元，可减80元，需付款220元；所购商品原价为770元，可减160元，需付款610元）

- (1) 购买一件原价为450元的健身器材时，选择哪种活动更合算？请说明理由。
- (2) 购买一件原价在500元以下的健身器材时，若选择活动一和选择活动二的付款金额相等，求一件这种健身器材的原价。
- (3) 购买一件原价在900元以下的健身器材时，原价在什么范围内，选择活动二比选择活动一更合算？设一件这种健身器材的原价为 a 元，请直接写出 a 的取值范围。

【答案】(1) 活动一更合算

(2) 400元 (3) 当 $300 \leq a < 400$ 或 $600 \leq a < 800$ 时，活动二更合算

【解析】

【分析】(1) 分别计算出两个活动需要付款价格，进行比较即可；

(2) 设这种健身器材的原价是 x 元，根据“选择活动一和选择活动二的付款金额相等”列方程求解即可；

(3) 由题意得活动一所需付款为 $0.8a$ 元，活动二当 $0 < a < 300$ 时，所需付款为 a 元，当 $300 \leq a < 600$ 时，

所需付款为 $(a-80)$ 元，当 $600 \leq a < 900$ 时，所需付款为 $(a-160)$ 元，然后根据题意列出不等式即可求解.

【小问 1 详解】

解：购买一件原价为 450 元的健身器材时，

活动一需付款： $450 \times 0.8 = 360$ 元，活动二需付款： $450 - 80 = 370$ 元，

$\therefore$ 活动一更合算；

【小问 2 详解】

设这种健身器材的原价是 x 元，

则 $0.8x = x - 80$ ，

解得 $x = 400$ ，

答：这种健身器材的原价是 400 元，

【小问 3 详解】

这种健身器材的原价为 a 元，

则活动一所需付款为： $0.8a$ 元，

活动二当 $0 < a < 300$ 时，所需付款为： a 元，

当 $300 \leq a < 600$ 时，所需付款为： $(a-80)$ 元，

当 $600 \leq a < 900$ 时，所需付款为： $(a-160)$ 元，

①当 $0 < a < 300$ 时， $a > 0.8a$ ，此时无论 a 为何值，都是活动一更合算，不符合题意，

②当 $300 \leq a < 600$ 时， $a - 80 < 0.8a$ ，解得 $300 \leq a < 400$ ，

即：当 $300 \leq a < 400$ 时，活动二更合算，

③当 $600 \leq a < 900$ 时， $a - 160 < 0.8a$ ，解得 $600 \leq a < 800$ ，

即：当 $600 \leq a < 800$ 时，活动二更合算，

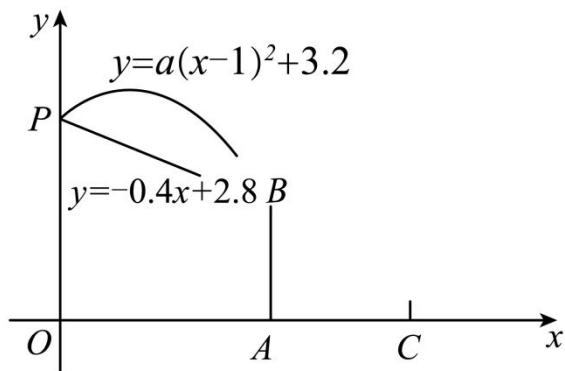
综上：当 $300 \leq a < 400$ 或 $600 \leq a < 800$ 时，活动二更合算.

【点睛】此题考查了一元一次方程及一元一次不等式的应用，解答本题的关键是仔细审题，注意分类讨论的应用.

22. 小林同学不仅是一名羽毛球运动爱好者，还喜欢运用数学知识对羽毛球比赛进行技术分析，下面是他对击球线路的分析.

如图，在平面直角坐标系中，点 A ， C 在 x 轴上，球网 AB 与 y 轴的水平距离 $OA = 3\text{m}$ ， $CA = 2\text{m}$ ，击球点 P 在 y 轴上. 若选择扣球，羽毛球的飞行高度 $y(\text{m})$ 与水平距离 $x(\text{m})$ 近似满足一次函数关系 $y = -0.4x + 2.8$ ；若选择吊球，羽毛球的飞行高度 $y(\text{m})$ 与水平距离 $x(\text{m})$ 近似满足二次函数关系

$$y = a(x-1)^2 + 3.2.$$



(1) 求点 P 的坐标和 a 的值.

(2) 小林分析发现, 上面两种击球方式均能使球过网. 要使球的落地点到 C 点的距离更近, 请通过计算判断应选择哪种击球方式.

【答案】 (1) $P(0, 2.8)$, $a = -0.4$,

(2) 选择吊球, 使球的落地点到 C 点的距离更近

【解析】

【分析】 (1) 在一次函数上 $y = -0.4x + 2.8$, 令 $x = 0$, 可求得 $P(0, 2.8)$, 再代入 $y = a(x-1)^2 + 3.2$ 即可求得 a 的值;

(2) 由题意可知 $OC = 5\text{m}$, 令 $y = 0$, 分别求得 $-0.4x + 2.8 = 0$, $-0.4(x-1)^2 + 3.2 = 0$, 即可求得落地点到 O 点的距离, 即可判断谁更近.

【小问 1 详解】

解: 在一次函数 $y = -0.4x + 2.8$,

令 $x = 0$ 时, $y = 2.8$,

$\therefore P(0, 2.8)$,

将 $P(0, 2.8)$ 代入 $y = a(x-1)^2 + 3.2$ 中, 可得: $a + 3.2 = 2.8$,

解得: $a = -0.4$;

【小问 2 详解】

$\therefore OA = 3\text{m}$, $CA = 2\text{m}$,

$\therefore OC = 5\text{m}$,

选择扣球, 则令 $y = 0$, 即: $-0.4x + 2.8 = 0$, 解得: $x = 7$,

即: 落地点距离点 O 距离为 7m ,

∴落地点到 C 点的距离为 $7-5=2\text{m}$,

选择吊球, 则令 $y=0$, 即: $-0.4(x-1)^2+3.2=0$, 解得: $x=\pm 2\sqrt{2}+1$ (负值舍去),

即: 落地点距离点 O 距离为 $(2\sqrt{2}+1)\text{m}$,

∴落地点到 C 点的距离为 $5-(2\sqrt{2}-1)=(4-2\sqrt{2})\text{m}$,

∵ $4-2\sqrt{2}<2$,

∴选择吊球, 使球的落地点到 C 点的距离更近.

【点睛】本题考查二次函数与一次函数的应用, 理解题意, 求得函数解析式是解决问题的关键.

23. 李老师善于通过合适的主题整合教学内容, 帮助同学们用整体的、联系的、发展的眼光看问题, 形成科学的思维习惯. 下面是李老师在“图形的变化”主题下设计的问题, 请你解答.

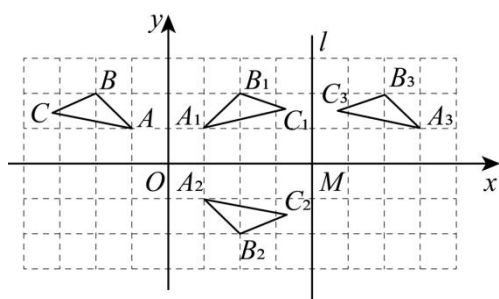


图1

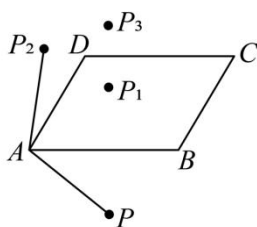
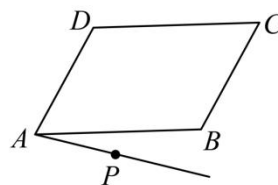


图2



备用图

(1) 观察发现: 如图1, 在平面直角坐标系中, 过点 $M(4,0)$ 的直线 $l \parallel y$ 轴, 作 $\triangle ABC$ 关于 y 轴对称的图形 $\triangle A_1B_1C_1$, 再分别作 $\triangle A_1B_1C_1$ 关于 x 轴和直线 l 对称的图形 $\triangle A_2B_2C_2$ 和 $\triangle A_3B_3C_3$, 则 $\triangle A_2B_2C_2$ 可以看作是 $\triangle ABC$ 绕点 O 顺时针旋转得到的, 旋转角的度数为____; $\triangle A_3B_3C_3$ 可以看作是 $\triangle ABC$ 向右平移得到的, 平移距离为____个单位长度.

(2) 探究迁移: 如图2, $ABCD$ 中, $\angle BAD = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), P 为直线 AB 下方一点, 作点 P 关于直线 AB 的对称点 P_1 , 再分别作点 P_1 关于直线 AD 和直线 CD 的对称点 P_2 和 P_3 , 连接 AP , AP_2 , 请仅就图2的情形解决以下问题:

①若 $\angle PAP_2 = \beta$, 请判断 β 与 α 的数量关系, 并说明理由;

②若 $AD = m$, 求 P , P_3 两点间的距离.

(3) 拓展应用: 在 (2) 的条件下, 若 $\alpha = 60^\circ$, $AD = 2\sqrt{3}$, $\angle PAB = 15^\circ$, 连接 P_2P_3 . 当 P_2P_3 与 $ABCD$ 的边平行时, 请直接写出 AP 的长.

【答案】(1) 180° , 8.

(2) ① $\beta = 2\alpha$ ，理由见解析；② $2m \sin \alpha$

(3) $2\sqrt{6}$ 或 $3\sqrt{2} - \sqrt{6}$

【解析】

【分析】(1) 观察图形可得 $\triangle A_2B_2C_2$ 与 $\triangle ABC$ 关于 O 点中心对称，根据轴对称的性质可得即可求得平移距离；

(2) ①连接 AP_1 ，由对称性可得， $\angle PAB = \angle P_1AB$ ， $\angle PAD = \angle P_2AD$ ，进而可得 $\angle PAP_2 = 2\angle BAD$ ，即可得出结论；

②连接 PP_1, P_1P_3 分别交 AB, CD 于 E, F 两点，过点 D 作 $DG \perp AB$ ，交 AB 于点 G ，由对称性可知：

$PE = P_1E$ ， $P_1F = P_3F$ 且 $PP_1 \perp AB$ ， $P_1P_3 \perp CD$ ，得出 $PP_3 = 2EF$ ，证明四边形 $EFDG$ 是矩形，则 $DG = EF$ ，在 $\text{Rt}\triangle DAG$ 中，根据 $\sin \angle DAG = \frac{DG}{DA}$ ，即可求解；

(3) 分 $P_2P_3 \parallel AD$ ， $P_2P_3 \parallel CD$ ，两种情况讨论，设 $AP = x$ ，则 $AP_1 = AP_2 = x$ ，先求得 $PP_1 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}x$ ，勾股定理求得 P_1P_3 ，进而表示出 PP_3 ，根据由 (2) ②可得 $PP_3 = 2AD \sin \alpha$ ，可得 $PP_3 = 6$ ，进而建立方程，即可求解。

【小问 1 详解】

(1) $\because \triangle ABC$ 关于 y 轴对称的图形 $\triangle A_1B_1C_1$ ， $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 关于 x 轴对称，

$\therefore \triangle A_2B_2C_2$ 与 $\triangle ABC$ 关于 O 点中心对称，

则 $\triangle A_2B_2C_2$ 可以看作是 $\triangle ABC$ 绕点 O 顺时针旋转得到的，旋转角的度数为 180°

$\therefore A(-1, 1)$ ，

$\therefore AA_1 = 2$ ，

$\therefore M(4, 0)$ ， A_1, A_3 关于直线 $x = 4$ 对称，

$\therefore A_1A_3 + AA_1 = 2 \times 4 = 8$ ，

即 $AA_3 = 8$ ，

$\triangle A_3B_3C_3$ 可以看作是 $\triangle ABC$ 向右平移得到的，平移距离为 8 个单位长度。

故答案为： 180° ，8。

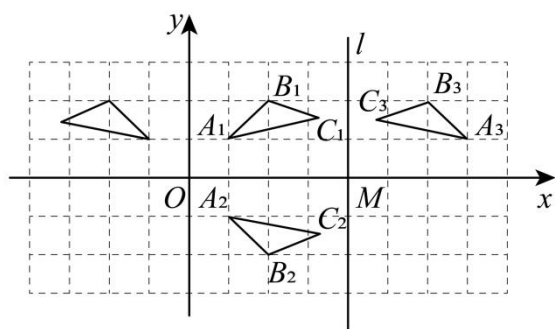


图1

【小问2详解】

① $\beta = 2\alpha$ ，理由如下，

连接 AP_1 ，

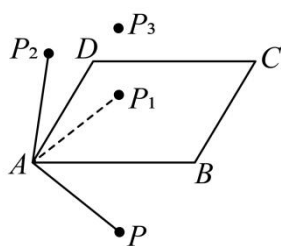


图2

由对称性可得， $\angle PAB = \angle P_1AB$ ， $\angle P_1AD = \angle P_2AD$ ，

$$\angle PAP_2 = \angle PAB + \angle P_1AB + \angle P_1AD + \angle P_2AD$$

$$= 2\angle P_1AB + 2\angle P_1AD$$

$$= 2(\angle P_1AB + \angle P_1AD)$$

$$= 2\angle BAD$$

$$\therefore \beta = 2\alpha,$$

② 连接 PP_1, P_1P_3 分别交 AB, CD 于 E, F 两点，过点 D 作 $DG \perp AB$ ，交 AB 于点 G ，

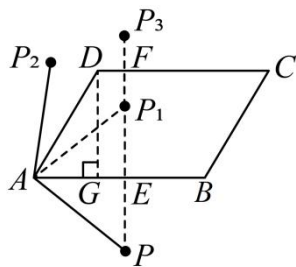


图2

由对称性可知： $PE = P_1E$ ， $P_1F = P_3F$ 且 $PP_1 \perp AB$ ， $P_1P_3 \perp CD$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$$\therefore AB \parallel CD$$

$\therefore P, P_1, P_3$ 三点共线,

$$\therefore PP_3 = PE + P_1E + P_1F + P_3F = 2P_1E + 2P_1F = 2EF,$$

$\because PP_1 \perp AB, P_1P_3 \perp CD, DG \perp AB,$

$$\therefore \angle P_1FD = \angle P_1EG = \angle DGE = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EFDG$ 是矩形,

$$\therefore DG = EF,$$

在 $\text{Rt}\triangle DAG$ 中, $\angle DAG = \alpha$, $AD = m$

$$\therefore \sin \angle DAG = \frac{DG}{DA},$$

$$\therefore DG = AD \cdot \sin \angle DAG = m \sin \alpha,$$

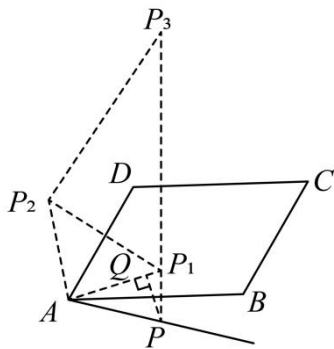
$$\therefore PP_3 = 2EF = 2DG = 2m \sin \alpha$$

【小问 3 详解】

解: 设 $AP = x$, 则 $AP_1 = AP_2 = x$,

依题意, $P_1P_2 \perp AD$,

当 $P_2P_3 \parallel AD$ 时, 如图所示, 过点 P 作 $PQ \perp AP_1$ 于点 Q ,



$$\therefore \angle P_1P_2P_3 = 90^\circ$$

$$\therefore \angle PAB = 15^\circ, \alpha = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle PAP_1 = 2\angle PAB = 30^\circ, \angle DAP_1 = \angle DAP_2 = 45^\circ$$

$$\therefore \angle P_2AP_1 = 90^\circ, \text{ 则 } P_1P_2 = \sqrt{2}x,$$

在 $\triangle APP_1$ 中, $\angle AP_1P = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle PAP_1) = 75^\circ$,

$\therefore \angle P_2P_1P_3 = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$, 则 $\angle P_1P_3P_2 = 30^\circ$,

$$\therefore P_1P_3 = 2P_2P_1 = 2\sqrt{2}x$$

在 $\text{Rt}\triangle APQ$ 中, $\angle PAQ = 30^\circ$, 则 $PQ = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}x$, $AQ = \sqrt{AP^2 - PQ^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$,

在 $\text{Rt}\triangle P_1QP$ 中, $P_1Q = AP_1 - AQ = x - \frac{\sqrt{3}}{2}x$,

$$PP_1 = \sqrt{P_1Q^2 + PQ^2} = \sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}x,$$

$$\therefore PP_3 = PP_1 + P_1P_3 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}x + 2\sqrt{2}x = \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{2}x$$

由 (2) ②可得 $PP_3 = 2AD \sin \alpha$,

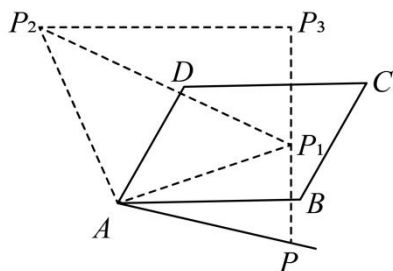
$$\therefore AD = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore PP_3 = 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$

$$\therefore \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{2}x = 6,$$

解得: $x = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$;

如图所示, 若 $P_2P_3 \parallel DC$, 则 $\angle P_1P_3P_2 = 90^\circ$,



$\therefore \angle P_2P_1P_3 = 60^\circ$, 则 $\angle P_3P_2P_1 = 30^\circ$,

$$\text{则 } P_1P_3 = \frac{1}{2}P_1P_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$\because PP_1 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}x, \quad PP_3 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}x = \frac{\sqrt{6}}{2}x,$$

$$\because PP_3 = 6,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{6}}{2}x = 6,$$

$$\text{解得: } x = 2\sqrt{6},$$

综上所述, AP 的长为 $3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ 或 $2\sqrt{6}$.

【点睛】 本题考查了轴对称的性质, 旋转的性质, 平行四边形的性质, 解直角三角形, 熟练掌握轴对称的性质是解题的关键.

