

## 2023 年河北省初中毕业生升学文化课考试数学试卷

### 一、选择题

1. 代数式  $-7x$  的意义可以是 ( )

- A.  $-7$  与  $x$  的和                  B.  $-7$  与  $x$  的差                  C.  $-7$  与  $x$  的积                  D.  $-7$  与  $x$  的商

【答案】C

【解析】

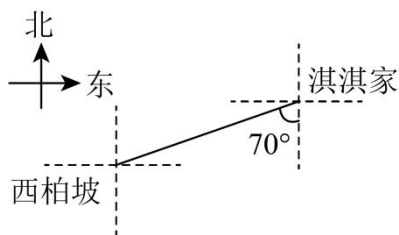
【分析】根据代数式赋予实际意义即可解答.

【详解】解:  $-7x$  的意义可以是  $-7$  与  $x$  的积.

故选 C.

【点睛】本题主要考查了代数式的意义, 掌握代数式和差乘除的意义是解答本题的关键.

2. 淇淇一家要到革命圣地西柏坡参观. 如图, 西柏坡位于淇淇家南偏西  $70^\circ$  的方向, 则淇淇家位于西柏坡的 ( )



- A. 南偏西  $70^\circ$  方向                  B. 南偏东  $20^\circ$  方向  
C. 北偏西  $20^\circ$  方向                  D. 北偏东  $70^\circ$  方向

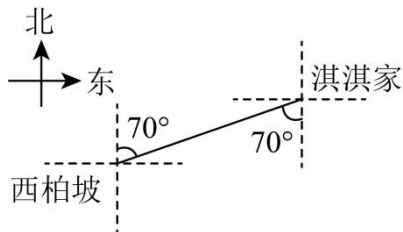
【答案】D

【解析】

【分析】根据方向角的定义可得答案.

【详解】解: 如图:  $\because$  西柏坡位于淇淇家南偏西  $70^\circ$  的方向,

$\therefore$  淇淇家位于西柏坡的北偏东  $70^\circ$  方向.



故选 D.

【点睛】本题主要考查方向角, 理解方向角的定义是正确解答的关键.

3. 化简  $x^3 \left( \frac{y^3}{x} \right)^2$  的结果是 ( )

A.  $xy^6$

B.  $xy^5$

C.  $x^2y^5$

D.  $x^2y^6$

【答案】 A

【解析】

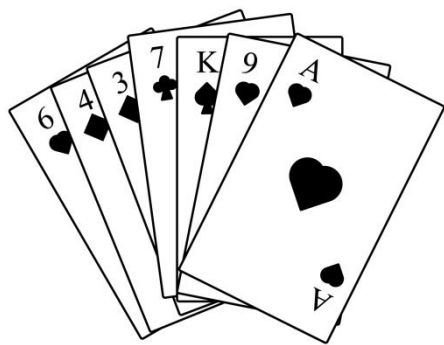
【分析】 根据分式的乘方和除法的运算法则进行计算即可.

【详解】 解:  $x^3 \left( \frac{y^3}{x} \right)^2 = x^3 \cdot \frac{y^6}{x^2} = xy^6$ ,

故选: A.

【点睛】 本题考查分式的乘方, 掌握公式准确计算是本题的解题关键.

4. 1 有 7 张扑克牌如图所示, 将其打乱顺序后, 背面朝上放在桌面上. 若从中随机抽取一张, 则抽到的花色可能性最大的是 ( )



A.   
(黑桃)

B.   
(红心)

C.   
(梅花)

D.   
(方块)

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据概率计算公式分别求出四种花色的概率即可得到答案.

【详解】 解:  $\because$  一共有 7 张扑克牌, 每张牌被抽到的概率相同, 其中黑桃牌有 1 张, 红桃牌有 3 张, 梅花牌有 1 张, 方片牌有 2 张,

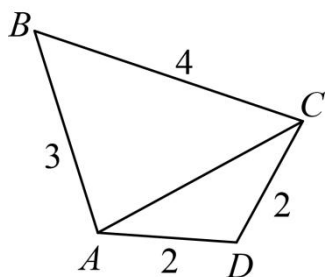
$\therefore$  抽到的花色是黑桃的概率为  $\frac{1}{7}$ , 抽到的花色是红桃的概率为  $\frac{3}{7}$ , 抽到的花色是梅花的概率为  $\frac{1}{7}$ , 抽到的花色是方片的概率为  $\frac{2}{7}$ ,

$\therefore$  抽到的花色可能性最大的是红桃,

故选 B.

【点睛】 本题主要考查了简单的概率计算, 正确求出每种花色的概率是解题的关键.

5. 四边形  $ABCD$  的边长如图所示, 对角线  $AC$  的长度随四边形形状的改变而变化. 当  $\triangle ABC$  为等腰三角形时, 对角线  $AC$  的长为 ( )



- A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 5

【答案】 B

【解析】

【分析】 利用三角形三边关系求得  $0 < AC < 4$ , 再利用等腰三角形的定义即可求解.

【详解】 解: 在  $\triangle ACD$  中,  $AD = CD = 2$ ,

$\therefore 2 - 2 < AC < 2 + 2$ , 即  $0 < AC < 4$ ,

当  $AC = BC = 4$  时,  $\triangle ABC$  为等腰三角形, 但不合题意, 舍去;

若  $AC = AB = 3$  时,  $\triangle ABC$  为等腰三角形,

故选: B.

【点睛】 本题考查了三角形三边关系以及等腰三角形的定义, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题.

6. 若  $k$  为任意整数, 则  $(2k+3)^2 - 4k^2$  的值总能 ( )

- A. 被 2 整除              B. 被 3 整除              C. 被 5 整除              D. 被 7 整除

【答案】 B

【解析】

【分析】 用平方差公式进行因式分解, 得到乘积的形式, 然后直接可以找到能被整除的数或式.

【详解】 解:  $(2k+3)^2 - 4k^2$

$$= (2k+3+2k)(2k+3-2k)$$

$$= 3(4k+3),$$

$3(4k+3)$  能被 3 整除,

$\therefore (2k+3)^2 - 4k^2$  的值总能被 3 整除,

故选: B.

【点睛】 本题考查了平方差公式的应用, 平方差公式为  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$  通过因式分解, 可以把多项

式分解成若干个整式乘积的形式.

7. 若  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt{7}$ , 则  $\sqrt{\frac{14a^2}{b^2}} = ( \quad )$

A. 2

B. 4

C.  $\sqrt{7}$

D.  $\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】把  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt{7}$  代入计算即可求解.

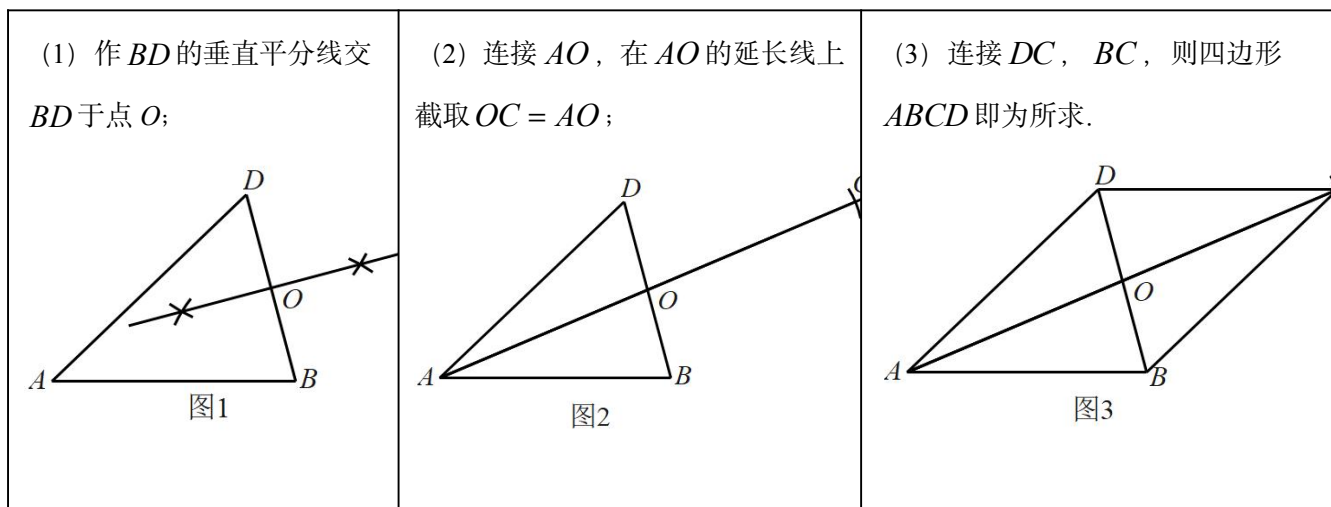
【详解】解:  $\because a = \sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt{7}$ ,

$$\therefore \sqrt{\frac{14a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{14 \times (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{7})^2}} = \sqrt{\frac{14 \times 2}{7}} = \sqrt{4} = 2,$$

故选: A.

【点睛】本题考查了求二次根式的值, 掌握二次根式的乘方和乘除运算是解题的关键.

8. 综合实践课上, 嘉嘉画出  $\triangle ABD$ , 利用尺规作图找一点  $C$ , 使得四边形  $ABCD$  为平行四边形. 图 1~图 3 是其作图过程.



在嘉嘉的作法中, 可直接判定四边形  $ABCD$  为平行四边形的条件是 ( )

A. 两组对边分别平行

B. 两组对边分别相等

C. 对角线互相平分

D. 一组对边平行且相等

【答案】C

【解析】

【分析】根据作图步骤可知, 得出了对角线互相平分, 从而可以判断.

【详解】解: 根据图 1, 得出  $BD$  的中点  $O$ , 图 2, 得出  $OC = AO$ ,

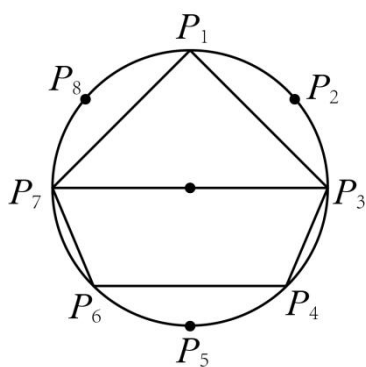
可知使得对角线互相平分，从而得出四边形  $ABCD$  为平行四边形，

判定四边形  $ABCD$  为平行四边形的条件是：对角线互相平分，

故选：C.

【点睛】 本题考查了平行四边形的判断，解题的关键是掌握基本的作图方法及平行四边形的判定定理.

9. 如图，点  $P_1 \sim P_8$  是  $\odot O$  的八等分点. 若  $\triangle P_1P_3P_7$ ，四边形  $P_3P_4P_6P_7$  的周长分别为  $a$ ， $b$ ，则下列正确的是 ( )



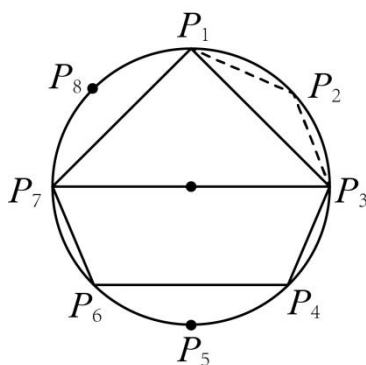
- A.  $a < b$                       B.  $a = b$                       C.  $a > b$                       D.  $a, b$  大小无法比较

【答案】 A

【解析】

【分析】 连接  $P_1P_2, P_2P_3$ ，依题意得  $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_6P_7$ ， $P_4P_6 = P_1P_7$ ， $\triangle P_1P_3P_7$  的周长为  $a = P_1P_3 + P_1P_7 + P_3P_7$ ，四边形  $P_3P_4P_6P_7$  的周长为  $b = P_3P_4 + P_4P_6 + P_6P_7 + P_3P_7$ ，故  $b - a = P_1P_2 + P_2P_3 - P_1P_3$ ，根据  $\triangle P_1P_2P_3$  的三边关系即可得解.

【详解】 连接  $P_1P_2, P_2P_3$ ，



$\therefore$  点  $P_1 \sim P_8$  是  $\odot O$  的八等分点，即  $\widehat{P_1P_2} = \widehat{P_2P_3} = \widehat{P_3P_4} = \widehat{P_4P_5} = \widehat{P_5P_6} = \widehat{P_6P_7} = \widehat{P_7P_8} = \widehat{P_8P_1}$

$\therefore P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_6P_7$ ， $\widehat{P_4P_6} = \widehat{P_4P_5} + \widehat{P_5P_6} = \widehat{P_7P_8} + \widehat{P_8P_1} = \widehat{P_1P_7}$

$\therefore P_4P_6 = P_1P_7$

又 $\because \triangle P_1P_3P_7$  的周长为  $a = P_1P_3 + P_1P_7 + P_3P_7$ ,

四边形  $P_3P_4P_6P_7$  的周长为  $b = P_3P_4 + P_4P_6 + P_6P_7 + P_3P_7$ ,

$$\therefore b - a = (P_3P_4 + P_4P_6 + P_6P_7 + P_3P_7) - (P_1P_3 + P_1P_7 + P_3P_7)$$

$$= (P_1P_2 + P_1P_7 + P_2P_3 + P_3P_7) - (P_1P_3 + P_1P_7 + P_3P_7)$$

$$= P_1P_2 + P_2P_3 - P_1P_3$$

在  $\triangle P_1P_2P_3$  中有  $P_1P_2 + P_2P_3 > P_1P_3$

$$\therefore b - a = P_1P_2 + P_2P_3 - P_1P_3 > 0$$

故选 A.

【点睛】 本题考查等弧所对的弦相等，三角形的三边关系等知识，利用作差比较法比较周长大小是解题的关键.

10. 光年是天文学上的一种距离单位，一光年是指光在一年内走过的路程，约等于  $9.46 \times 10^{12} \text{ km}$ . 下列正确的是 ( )

A.  $9.46 \times 10^{12} - 10 = 9.46 \times 10^{11}$

B.  $9.46 \times 10^{12} - 0.46 = 9 \times 10^{12}$

C.  $9.46 \times 10^{12}$  是一个 12 位数

D.  $9.46 \times 10^{12}$  是一个 13 位数

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据科学记数法、同底数幂乘法和除法逐项分析即可解答.

【详解】 解： A.  $9.46 \times 10^{12} \div 10 = 9.46 \times 10^{11}$ ，故该选项错误，不符合题意；

B.  $9.46 \times 10^{12} - 0.46 \neq 9 \times 10^{12}$ ，故该选项错误，不符合题意；

C.  $9.46 \times 10^{12}$  是一个 13 位数，故该选项错误，不符合题意；

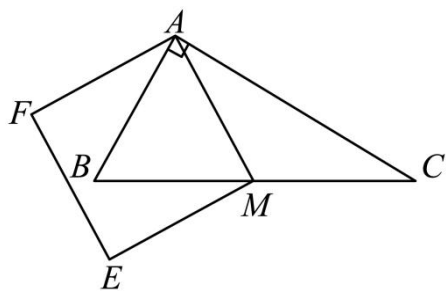
D.  $9.46 \times 10^{12}$  是一个 13 位数,正确，符合题意.

故选 D.

【点睛】 本题主要考查了科学记数法、同底数幂乘法和除法等知识点，理解相关定义和运算法则是解答本题的关键.

11. 如图，在  $\text{Rt} \triangle ABC$  中，  $AB = 4$ ，点  $M$  是斜边  $BC$  的中点，以  $AM$  为边作正方形  $AMEF$ ，若

$$S_{\text{正方形} AMEF} = 16, \text{ 则 } S_{\triangle ABC} = ( \quad )$$



- A.  $4\sqrt{3}$                       B.  $8\sqrt{3}$                       C. 12                      D. 16

【答案】B

【解析】

【分析】根据正方形的面积可求得  $AM$  的长，利用直角三角形斜边的中线求得斜边  $BC$  的长，利用勾股定理求得  $AC$  的长，根据三角形的面积公式即可求解.

【详解】解：∵  $S_{\text{正方形}AMEF} = 16$ ,

$$\therefore AM = \sqrt{16} = 4,$$

∵  $\text{Rt}\triangle ABC$  中，点  $M$  是斜边  $BC$  的中点，

$$\therefore BC = 2AM = 8,$$

$$\therefore AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3},$$

故选：B.

【点睛】本题考查了直角三角形斜边中线的性质，勾股定理，掌握“直角三角形斜边中线等于斜边的一半”是解题的关键.

12. 如图 1，一个  $2 \times 2$  的平台上已经放了一个棱长为 1 的正方体，要得到一个几何体，其主视图和左视图如图 2，平台上至还需再放这样的正方体（ ）

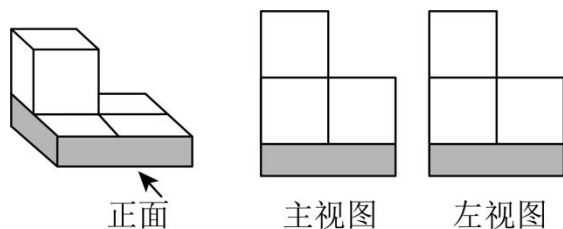


图 1

图 2

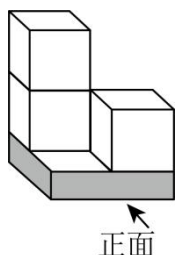
- A. 1 个                      B. 2 个                      C. 3 个                      D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】利用左视图和主视图画出草图，进而得出答案.

【详解】解：由题意画出草图，如图，



平台上至还需再放这样的正方体 2 个，

故选：B.

【点睛】此题主要考查了三视图，正确掌握观察角度是解题关键.

13. 在  $\triangle ABC$  和  $\triangle A'B'C'$  中,  $\angle B = \angle B' = 30^\circ$ ,  $AB = A'B' = 6$ ,  $AC = A'C' = 4$ . 已知  $\angle C = n^\circ$ , 则  $\angle C' =$  ( )

- A.  $30^\circ$                       B.  $n^\circ$                       C.  $n^\circ$  或  $180^\circ - n^\circ$                       D.  $30^\circ$  或  $150^\circ$

【答案】C

【解析】

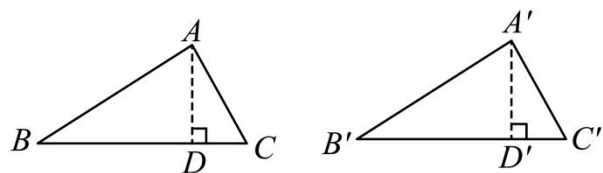
【分析】过  $A$  作  $AD \perp BC$  于点  $D$ , 过  $A'$  作  $A'D' \perp B'C'$  于点  $D'$ , 求得  $AD = A'D' = 3$ , 分两种情况讨论, 利用全等三角形的判定和性质即可求解.

【详解】解：过  $A$  作  $AD \perp BC$  于点  $D$ , 过  $A'$  作  $A'D' \perp B'C'$  于点  $D'$ ,

$$\because \angle B = \angle B' = 30^\circ, AB = A'B' = 6,$$

$$\therefore AD = A'D' = 3,$$

当  $B, C$  在点  $D$  的两侧,  $B', C'$  在点  $D'$  的两侧时, 如图,

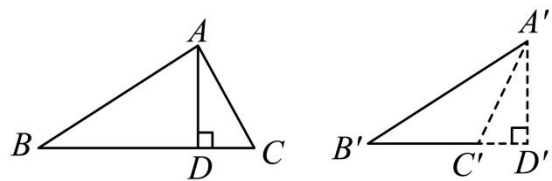


$$\because AD = A'D' = 3, AC = A'C' = 4,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ACD \cong \text{Rt}\triangle A'C'D' (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle C' = \angle C = n^\circ;$$

当  $B, C$  在点  $D$  的两侧,  $B', C'$  在点  $D'$  的同侧时, 如图,



$$\because AD = A'D' = 3, AC = A'C' = 4,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ACD \cong \text{Rt}\triangle A'C'D' (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle A'C'D' = \angle C = n^\circ, \text{ 即 } \angle A'C'B' = 180^\circ - \angle A'C'D' = 180^\circ - n^\circ;$$

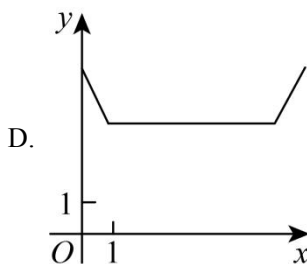
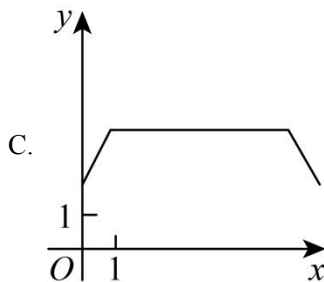
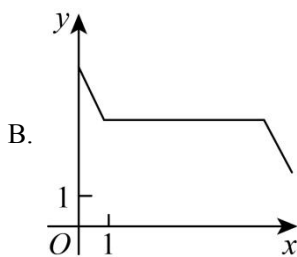
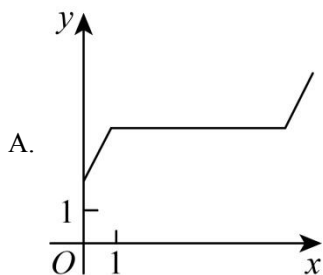
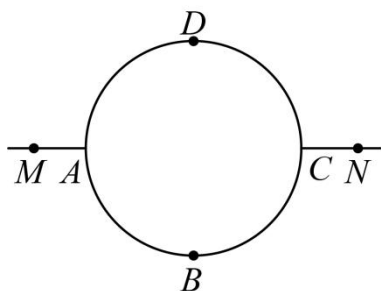
综上,  $\angle C'$  的值为  $n^\circ$  或  $180^\circ - n^\circ$ .

故选: C.

【点睛】本题考查了含  $30^\circ$  度角的直角三角形的性质, 全等三角形的判定和性质, 分类讨论是解题的关键.

14. 如图是一种轨道示意图, 其中  $ADC$  和  $ABC$  均为半圆, 点  $M, A, C, N$  依次在同一直线上, 且

$AM = CN$ . 现有两个机器人 (看成点) 分别从  $M, N$  两点同时出发, 沿着轨道以大小相同的速度匀速移动, 其路线分别为  $M \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow N$  和  $N \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow M$ . 若移动时间为  $x$ , 两个机器人之间距离为  $y$ , 则  $y$  与  $x$  关系的图象大致是 ( )



【答案】D

【解析】

【分析】设圆的半径为  $R$ , 根据机器人移动时最开始的距离为  $AM + CN + 2R$ , 之后同时到达点  $A, C$ , 两个机器人之间的距离  $y$  越来越小, 当两个机器人分别沿  $A \rightarrow D \rightarrow C$  和  $C \rightarrow B \rightarrow A$  移动时, 此时两个机器人之间的距离是直径  $2R$ , 当机器人分别沿  $C \rightarrow N$  和  $A \rightarrow M$  移动时, 此时两个机器人之间的距离越来越大.

【详解】解：由题意可得：机器人（看成点）分别从  $M, N$  两点同时出发，

设圆的半径为  $R$ ，

$\therefore$  两个机器人最初的距离是  $AM + CN + 2R$ ，

$\therefore$  两个人机器人速度相同，

$\therefore$  分别同时到达点  $A, C$ ，

$\therefore$  两个机器人之间的距离  $y$  越来越小，故排除 A, C；

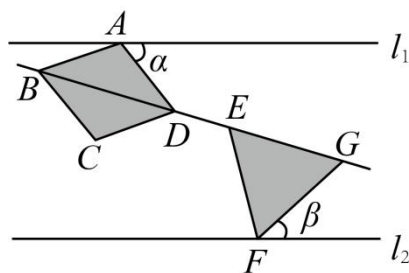
当两个机器人分别沿  $A \rightarrow D \rightarrow C$  和  $C \rightarrow B \rightarrow A$  移动时，此时两个机器人之间的距离是直径  $2R$ ，保持不变，

当机器人分别沿  $C \rightarrow N$  和  $A \rightarrow M$  移动时，此时两个机器人之间的距离越来越大，故排除 C，

故选：D.

【点睛】本题考查动点函数图像，找到运动时的特殊点用排除法是关键.

15. 如图，直线  $l_1 \parallel l_2$ ，菱形  $ABCD$  和等边  $\triangle EFG$  在  $l_1, l_2$  之间，点  $A, F$  分别在  $l_1, l_2$  上，点  $B, D, E, G$  在同一直线上：若  $\angle \alpha = 50^\circ$ ， $\angle ADE = 146^\circ$ ，则  $\angle \beta =$  ( )



A.  $42^\circ$

B.  $43^\circ$

C.  $44^\circ$

D.  $45^\circ$

【答案】C

【解析】

【分析】如图，由平角的定义求得  $\angle ADB = 180^\circ - \angle ADE = 34^\circ$ ，由外角定理求得， $\angle AHD = \angle \alpha - \angle ADB = 16^\circ$ ，根据平行性质，得  $\angle GFI = \angle AHD = 16^\circ$ ，进而求得  $\angle \beta = \angle EGF - \angle GFI = 44^\circ$ 。

【详解】如图， $\because \angle ADE = 146^\circ$

$\therefore \angle ADB = 180^\circ - \angle ADE = 34^\circ$

$\therefore \angle \alpha = \angle ADB + \angle AHD$

$\therefore \angle AHD = \angle \alpha - \angle ADB = 50^\circ - 34^\circ = 16^\circ$

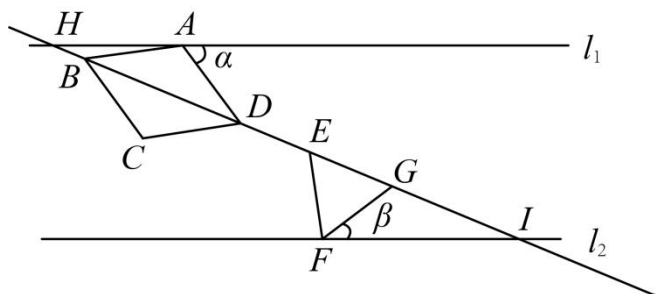
$\because l_1 \parallel l_2$

$\therefore \angle GFI = \angle AHD = 16^\circ$

$$\therefore \angle EGF = \angle \beta + \angle GFI$$

$$\therefore \angle \beta = \angle EGF - \angle GFI = 60^\circ - 16^\circ = 44^\circ$$

故选：C.



【点睛】本题考查平行线的性质，平角的定义，等

边三角形的性质，三角形外角定理，根据相关定理确定角之间的数量关系是解题的关键.

16. 已知二次函数  $y = -x^2 + m^2x$  和  $y = x^2 - m^2$  ( $m$  是常数) 的图象与  $x$  轴都有两个交点，且这四个交点中每相邻两点间的距离都相等，则这两个函数图象对称轴之间的距离为 ( )

A. 2

B.  $m^2$

C. 4

D.  $2m^2$

【答案】A

【解析】

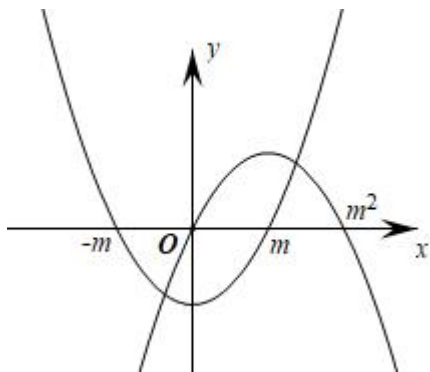
【分析】先求得两个抛物线与  $x$  轴的交点坐标，据此求解即可.

【详解】解：令  $y = 0$ ，则  $-x^2 + m^2x = 0$  和  $x^2 - m^2 = 0$ ，

解得  $x = 0$  或  $x = m^2$  或  $x = -m$  或  $x = m$ ，

不妨设  $m > 0$ ，

$\therefore (m, 0)$  和  $(-m, 0)$  关于原点对称，又这四个交点中每相邻两点间的距离都相等，



$\therefore (m^2, 0)$  与原点关于点  $(m, 0)$  对称，

$$\therefore 2m = m^2,$$

$$\therefore m = 2 \text{ 或 } m = 0 \text{ (舍去),}$$

$\therefore$  抛物线  $y = x^2 - m^2$  的对称轴为  $x = 0$ ，抛物线  $y = -x^2 + m^2x$  的对称轴为  $x = \frac{m^2}{2} = 2$ ，

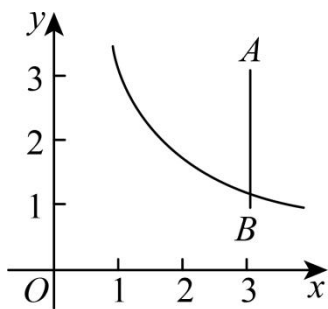
$\therefore$  这两个函数图象对称轴之间的距离为 2，

故选：A.

【点睛】本题考查了抛物线与  $x$  轴的交点问题，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件.

## 二、填空题

17. 如图，已知点  $A(3,3), B(3,1)$ ，反比例函数  $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$  图像的一支与线段  $AB$  有交点，写出一个符合条件的  $k$  的数值：\_\_\_\_\_.



【答案】4（答案不唯一，满足  $3 \leq k \leq 9$  均可）

【解析】

【分析】先分别求得反比例函数  $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$  图像过  $A$ 、 $B$  时  $k$  的值，从而确定  $k$  的取值范围，然后确定符合条件  $k$  的值即可.

【详解】解：当反比例函数  $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$  图像过  $A(3,3)$  时， $k = 3 \times 3 = 9$ ；

当反比例函数  $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$  图像过  $B(3,1)$  时， $k = 3 \times 1 = 3$ ；

$\therefore k$  的取值范围为  $3 \leq k \leq 9$

$\therefore k$  可以取 4.

故答案为 4（答案不唯一，满足  $3 \leq k \leq 9$  均可）.

【点睛】本题主要考查了求反比例函数的解析式，确定边界点的  $k$  的值是解答本题的关键.

18. 根据下表中的数据，写出  $a$  的值为\_\_\_\_\_.  $b$  的值为\_\_\_\_\_.

|        |   |     |
|--------|---|-----|
| $x$    |   |     |
| 结果     | 2 | $n$ |
| 代数式    |   |     |
| $3x+1$ | 7 | $b$ |

|                  |     |   |
|------------------|-----|---|
| $\frac{2x+1}{x}$ | $a$ | 1 |
|------------------|-----|---|

【答案】 ①.  $\frac{5}{2}$  ②.  $-2$

【解析】

【分析】把  $x=2$  代入得  $\frac{2x+1}{x} = a$ ，可求得  $a$  的值；把  $x=n$  分别代入  $3x+1=b$  和  $\frac{2x+1}{x} = 1$ ，据此求解即可。

【详解】解：当  $x=n$  时， $3x+1=b$ ，即  $3n+1=b$ ，

当  $x=2$  时， $\frac{2x+1}{x} = a$ ，即  $a = \frac{2 \times 2 + 1}{2} = \frac{5}{2}$ ，

当  $x=n$  时， $\frac{2x+1}{x} = 1$ ，即  $\frac{2n+1}{n} = 1$ ，

解得  $n = -1$ ，

经检验， $n = -1$  是分式方程的解，

$\therefore b = 3 \times (-1) + 1 = -2$ ，

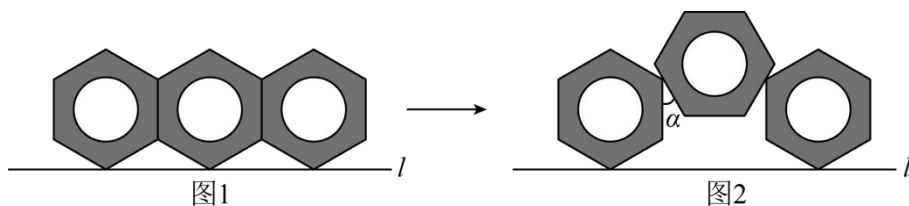
故答案为： $\frac{5}{2}$ ； $-2$

【点睛】本题考查了求代数式的值，解分式方程，准确计算是解题的关键。

19. 将三个相同的六角形螺母并排摆放在桌面上，其俯视图如图 1，正六边形边长为 2 且各有一个顶点在直线  $l$  上，两侧螺母不动，把中间螺母抽出并重新摆放后，其俯视图如图 2，其中，中间正六边形的一边与直线  $l$  平行，有两边分别经过两侧正六边形的一个顶点。则图 2 中

(1)  $\angle \alpha =$  \_\_\_\_\_ 度。

(2) 中间正六边形的中心到直线  $l$  的距离为 \_\_\_\_\_ (结果保留根号)。



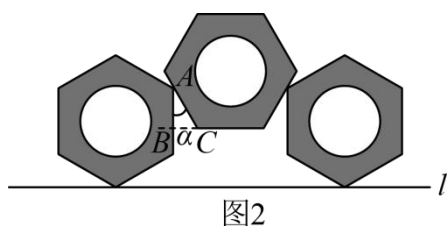
【答案】 ①. 30 ②.  $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 作图后，结合正多边形的外角的求法即可求解；

(2) 表问题转化为图形问题，首先作图，标出相应的字母，把正六边形的中心到直线  $l$  的距离转化为求  $ON = OM + BE$ ，再根据正六边形的特征及利用勾股定理及三角函数，分别求出  $OM, BE$  即可求解。

【详解】解：（1）作图如下：

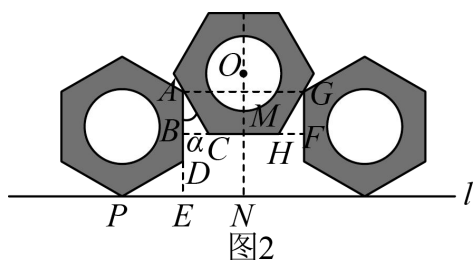


根据中间正六边形的一边与直线  $l$  平行及多边形外角和，得  $\angle ABC = 60^\circ$ ，

$$\angle A = \angle \alpha = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

故答案为：30；

（2）取中间正六边形的中心为  $O$ ，作如下图形，



由题意得：  $AG \parallel BF$ ，  $AB \parallel GF$ ，  $BF \perp AB$ ，

$\therefore$  四边形  $ABFG$  为矩形，

$$\therefore AB = GF,$$

$$\because \angle BAC = \angle FGH, \angle ABC = \angle GFH = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle GFH \text{ (SAS)},$$

$$\therefore BC = FH,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PDE \text{ 中, } DE = 1, PE = \sqrt{3},$$

$$\text{由图 1 知 } AG = BF = 2PE = 2\sqrt{3},$$

$$\text{由正六边形的结构特征知: } OM = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3},$$

$$\therefore BC = \frac{1}{2}(BF - CH) = \sqrt{3} - 1,$$

$$\therefore AB = \frac{BC}{\tan \angle BAC} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3 - \sqrt{3},$$

$$\therefore BD = 2 - AB = \sqrt{3} - 1,$$

$$\text{又} \because DE = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

$$\therefore BE = BD + DE = \sqrt{3},$$

$$\therefore ON = OM + BE = 2\sqrt{3}$$

故答案为：  $2\sqrt{3}$  .

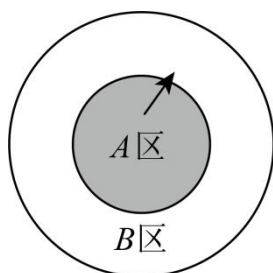
【点睛】 本题考查了正六边形的特征，勾股定理，含  $30^\circ$  直角三角形的特征，全等三角形的判定性质，解直角三角形，解题的关键是掌握正六边形的结构特征.

### 三、解答题

20. 某磁性飞镖游戏的靶盘如图. 珍珍玩了两局，每局投 10 次飞镖，若投到边界则不计入次数，需重新投，计分规则如下：

| 投中位置     | A 区 | B 区 | 脱靶 |
|----------|-----|-----|----|
| 一次计分 (分) | 3   | 1   | -2 |

在第一局中，珍珍投中 A 区 4 次，B 区 2 次，脱靶 4 次.



(1) 求珍珍第一局的得分；

(2) 第二局，珍珍投中 A 区  $k$  次，B 区 3 次，其余全部脱靶. 若本局得分比第一局提高了 13 分，求  $k$  的值.

【答案】 (1) 珍珍第一局的得分为 6 分；

(2)  $k = 6$  .

【解析】

【分析】 (1) 根据题意列式计算即可求解；

(2) 根据题意列一元一次方程即可求解.

【小问 1 详解】

解： 由题意得  $4 \times 3 + 2 \times 1 + 4 \times (-2) = 6$  (分),

答： 珍珍第一局的得分为 6 分；

【小问 2 详解】

解：由题意得  $3k + 3 \times 1 + (10 - k - 3) \times (-2) = 6 + 13$ ,

解得：  $k = 6$ .

【点睛】 本题考查了一元一次方程的应用，解题关键是要读懂题目的意思，根据题目给出的条件，找出合适的等量关系，列出方程，再求解.

21. 现有甲、乙、丙三种矩形卡片各若干张，卡片的边长如图 1 所示 ( $a > 1$ ). 某同学分别用 6 张卡片拼出了两个矩形(不重叠无缝隙)，如图 2 和图 3，其面积分别为  $S_1, S_2$ .

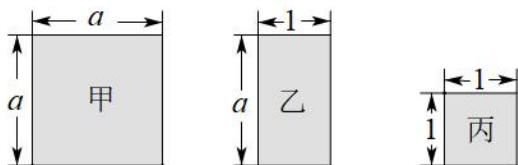


图 1



图 2

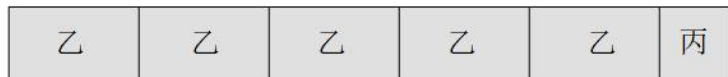


图 3

(1) 请用含  $a$  的式子分别表示  $S_1, S_2$ ；当  $a = 2$  时，求  $S_1 + S_2$  的值；

(2) 比较  $S_1$  与  $S_2$  的大小，并说明理由.

【答案】 (1)  $S_1 = a^2 + 3a + 2$ ,  $S_2 = 5a + 1$ , 当  $a = 2$  时,  $S_1 + S_2 = 23$

(2)  $S_1 > S_2$ , 理由见解析

【解析】

【分析】(1) 根据题意求出三种矩形卡片的面积, 从而得到  $S_1, S_2, S_1 + S_2$ , 将  $a = 2$  代入用  $a^2$  表示  $S_1 + S_2$  的等式中求值即可;

(2) 利用 (1) 的结果, 使用作差比较法比较即可.

【小问 1 详解】

解：依题意得，三种矩形卡片的面积分别为：  $S_{\text{甲}} = a^2$ ,  $S_{\text{乙}} = a$ ,  $S_{\text{丙}} = 1$ ,

$$\therefore S_1 = S_{\text{甲}} + 3S_{\text{乙}} + 2S_{\text{丙}} = a^2 + 3a + 2, \quad S_2 = 5S_{\text{乙}} + S_{\text{丙}} = 5a + 1,$$

$$\therefore S_1 + S_2 = (a^2 + 3a + 2) + (5a + 1) = a^2 + 8a + 3,$$

$\therefore$  当  $a=2$  时,  $S_1 + S_2 = 2^2 + 8 \times 2 + 3 = 23$ ;

**【小问 2 详解】**

$S_1 > S_2$ , 理由如下:

$$\therefore S_1 = a^2 + 3a + 2, \quad S_2 = 5a + 1$$

$$\therefore S_1 - S_2 = (a^2 + 3a + 2) - (5a + 1) = a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2$$

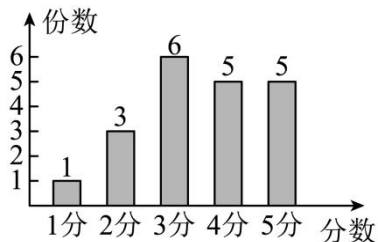
$$\therefore a > 1,$$

$$\therefore S_1 - S_2 = (a - 1)^2 > 0,$$

$$\therefore S_1 > S_2.$$

**【点睛】** 本题考查列代数式, 整式的加减, 完全平方公式等知识, 会根据题意列式和掌握做差比较法是解题的关键.

22. 某公司为提高服务质量, 对其某个部门开展了客户满意度问卷调查, 客户满意度以分数呈现, 满意度从低到高为 1 分, 2 分, 3 分, 4 分, 5 分, 共 5 档. 公司规定: 若客户所评分数的平均数或中位数低于 3.5 分, 则该部门需要对服务质量进行整改. 工作人员从收回的问卷中随机抽取了 20 份, 下图是根据这 20 份问卷中的客户所评分数绘制的统计图.



- (1) 求客户所评分数的中位数、平均数, 并判断该部门是否需要整改;
- (2) 监督人员从余下的问卷中又随机抽取了 1 份, 与之前的 20 份合在一起, 重新计算后, 发现客户所评分数的平均数大于 3.55 分, 求监督人员抽取的问卷所评分数为几分? 与 (1) 相比, 中位数是否发生变化?

**【答案】** (1) 中位数为 3.5 分, 平均数为 3.5 分, 不需要整改

(2) 监督人员抽取的问卷所评分数为 5 分, 中位数发生了变化, 由 3.5 分变成 4 分

**【解析】**

**【分析】** (1) 先求出客户所评分数的中位数、平均数, 再根据中位数、平均数确定是否需要整改即可;

(2) 根据“重新计算后, 发现客户所评分数的平均数大于 3.55 分”列出不等式, 继而求出监督人员抽取的问卷所评分数, 重新排列后再求出中位数即可得解.

**【小问 1 详解】**

解: 由条形统计图可知, 客户所评分数按从小到大排列后, 第 10 个数据是 3 分, 第 11 个数据是 4 分;

∴ 客户所评分数的中位数为：  $\frac{3+4}{2} = 3.5$  (分)

由统计图可知，客户所评分数的平均数为：  $\frac{1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 6 + 4 \times 5 + 5 \times 5}{20} = 3.5$  (分)

∴ 客户所评分数的平均数或中位数都不低于 3.5 分，

∴ 该部门不需要整改.

### 【小问 2 详解】

设监督人员抽取的问卷所评分数为  $x$  分，则有：

$$\frac{3.5 \times 20 + x}{20 + 1} > 3.55$$

解得：  $x > 4.55$

∴ 调意度从低到高为 1 分，2 分，3 分，4 分，5 分，共 5 档，

∴ 监督人员抽取的问卷所评分数为 5 分，

∴  $4 < 5$ ，

∴ 加入这个数据，客户所评分数按从小到大排列之后，第 11 个数据不变依然是 4 分，

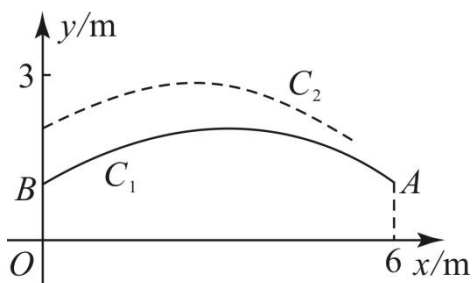
即加入这个数据之后，中位数是 4 分.

∴ 与 (1) 相比，中位数发生了变化，由 3.5 分变成 4 分.

【点睛】 本题考查条形统计图，中位数和加权平均数，一元一次不等式的应用等知识，掌握求中位数和加权平均数的方法和根据不等量关系列不等式是解题的关键.

23. 嘉嘉和淇淇在玩沙包游戏. 某同学借此情境编制了一道数学题，请解答这道题.

如图，在平面直角坐标系中，一个单位长度代表  $1m$  长. 嘉嘉在点  $A(6,1)$  处将沙包（看成点）抛出，并运动路线为抛物线  $C_1: y = a(x-3)^2 + 2$  的一部分，淇淇恰在点  $B(0, c)$  处接住，然后跳起将沙包回传，其运动路线为抛物线  $C_2: y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{n}{8}x + c + 1$  的一部分.



(1) 写出  $C_1$  的最高点坐标，并求  $a, c$  的值；

(2) 若嘉嘉在  $x$  轴上方  $1m$  的高度上，且到点  $A$  水平距离不超过  $1m$  的范围内可以接到沙包，求符合条件

的  $n$  的整数值.

【答案】(1)  $C_1$  的最高点坐标为  $(3,2)$ ,  $a = -\frac{1}{9}$ ,  $c = 1$ ;

(2) 符合条件的  $n$  的整数值为 4 和 5.

【解析】

【分析】(1) 利用顶点式即可得到最高点坐标; 点  $A(6,1)$  在抛物线上, 利用待定系数法即可求得  $a$  的值; 令  $x = 0$ , 即可求得  $c$  的值;

(2) 求得点  $A$  的坐标范围为  $(5,1) \sim (7,1)$ , 求得  $n$  的取值范围, 即可求解.

【小问 1 详解】

解:  $\because$  抛物线  $C_1: y = a(x-3)^2 + 2$ ,

$\therefore C_1$  的最高点坐标为  $(3,2)$ ,

$\because$  点  $A(6,1)$  在抛物线  $C_1: y = a(x-3)^2 + 2$  上,

$\therefore 1 = a(6-3)^2 + 2$ , 解得:  $a = -\frac{1}{9}$ ,

$\therefore$  抛物线  $C_1$  的解析式为  $y = -\frac{1}{9}(x-3)^2 + 2$ , 令  $x = 0$ , 则  $c = -\frac{1}{9}(0-3)^2 + 2 = 1$ ;

【小问 2 详解】

解:  $\because$  到点  $A$  水平距离不超过 1m 的范围内可以接到沙包,

$\therefore$  点  $A$  的坐标范围为  $(5,1) \sim (7,1)$ ,

当经过  $(5,1)$  时,  $1 = -\frac{1}{8} \times 5^2 + \frac{n}{8} \times 5 + 1 + 1$ ,

解得  $n = \frac{17}{5}$ ;

当经过  $(7,1)$  时,  $1 = -\frac{1}{8} \times 7^2 + \frac{n}{8} \times 7 + 1 + 1$ ,

解得  $n = \frac{41}{7}$ ;

$\therefore \frac{17}{5} \leq n \leq \frac{41}{7}$

$\therefore$  符合条件的  $n$  的整数值为 4 和 5.

【点睛】本题考查了二次函数的应用, 联系实际, 读懂题意, 熟练掌握二次函数图象上点的坐标特征是解题的关键.

24. 装有水的水槽放置在水平台面上, 其横截面是以  $AB$  为直径的半圆  $O$ ,  $AB = 50\text{cm}$ , 如图 1 和图 2 所示,  $MN$  为水面截线,  $GH$  为台面截线,  $MN \parallel GH$ .

计算：在图 1 中，已知  $MN = 48\text{cm}$ ，作  $OC \perp MN$  于点  $C$ 。

(1) 求  $OC$  的长。

操作：将图 1 中的水面沿  $GH$  向右作无滑动的滚动，使水流出的一部分，当  $\angle ANM = 30^\circ$  时停止滚动，如图

2. 其中，半圆的中点为  $Q$ ， $GH$  与半圆的切点为  $E$ ，连接  $OE$  交  $MN$  于点  $D$ 。

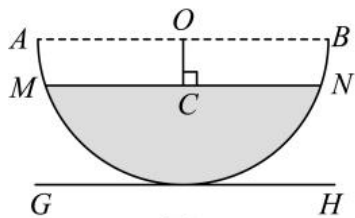


图1

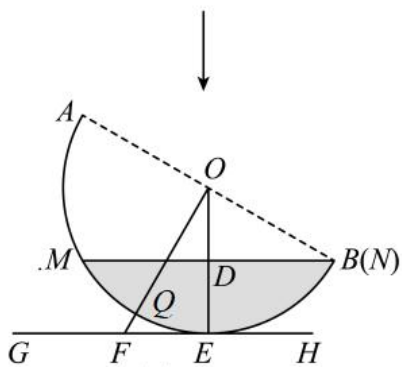


图2

探究：在图 2 中

(2) 操作后水面高度下降了多少？

(3) 连接  $OQ$  并延长交  $GH$  于点  $F$ ，求线段  $EF$  与  $\widehat{EQ}$  的长度，并比较大小。

【答案】(1)  $7\text{cm}$ ；(2)  $\frac{11}{2}\text{cm}$ ；(3)  $EF = \frac{25\sqrt{3}}{3}\text{cm}$ ， $\widehat{EQ} = \frac{25\pi}{6}\text{cm}$ ， $EF > \widehat{EQ}$ 。

【解析】

【分析】(1) 连接  $OM$ ，利用垂径定理计算即可；

(2) 由切线的性质证明  $OE \perp GH$  进而得到  $OE \perp MN$ ，利用锐角三角函数求  $OD$ ，再与 (1) 中  $OC$  相减即可；

(3) 由半圆的中点为  $Q$  得到  $\angle QOB = 90^\circ$ ，得到  $\angle QOE = 30^\circ$  分别求出线段  $EF$  与  $\widehat{EQ}$  的长度，再相减比较即可。

【详解】解：(1) 连接  $OM$ ，

$\because O$  为圆心， $OC \perp MN$  于点  $C$ ， $MN = 48\text{cm}$ ，

$\therefore MC = \frac{1}{2}MN = 24\text{cm}$ ，

$$\therefore AB = 50\text{cm},$$

$$\therefore OM = \frac{1}{2}AB = 25\text{cm},$$

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle OMC$  中,

$$OC = \sqrt{OM^2 - MC^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7\text{cm}.$$

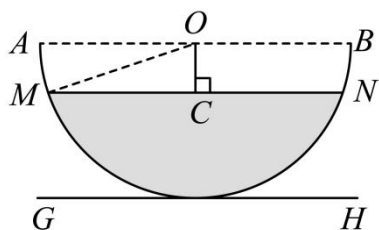


图1

(2)  $\because GH$  与半圆的切点为  $E$ ,

$$\therefore OE \perp GH$$

$$\because MN \parallel GH$$

$$\therefore OE \perp MN \text{ 于点 } D,$$

$$\because \angle ANM = 30^\circ, ON = 25\text{cm},$$

$$\therefore OD = \frac{1}{2}ON = \frac{25}{2}\text{cm},$$

$\therefore$  操作后水面高度下降高度为:

$$\frac{25}{2} - 7 = \frac{11}{2}\text{cm}.$$

(3)  $\because OE \perp MN$  于点  $D$ ,  $\angle ANM = 30^\circ$

$$\therefore \angle DOB = 60^\circ,$$

$\because$  半圆的中点为  $Q$ ,

$$\therefore \widehat{AQ} = \widehat{QB},$$

$$\therefore \angle QOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle QOE = 30^\circ,$$

$$\therefore EF = \tan \angle QOE \cdot OE = \frac{25\sqrt{3}}{3}\text{cm},$$

$$\widehat{EQ} = \frac{30 \times \pi \times 25}{180} = \frac{25\pi}{6}\text{cm},$$

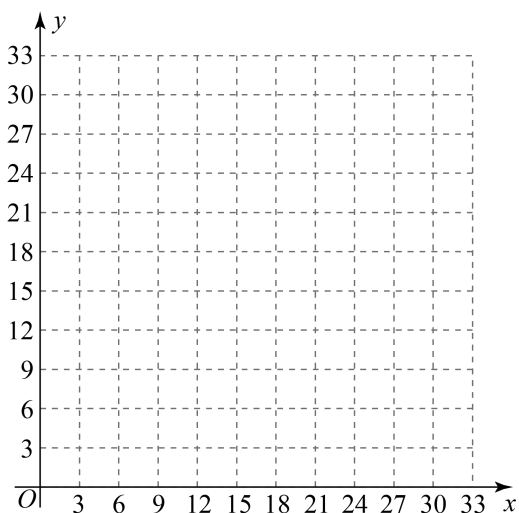
$$\therefore \frac{25\sqrt{3}}{3} - \frac{25\pi}{6} = \frac{50\sqrt{3} - 25\pi}{6} = \frac{25(2\sqrt{3} - \pi)}{6} > 0,$$

$$\therefore EF > \widehat{EQ}.$$

【点睛】本题考查了垂径定理、圆的切线的性质、求弧长和解直角三角形的知识，解答过程中根据相关性质构造直角三角形是解题关键.

25. 在平面直角坐标系中，设计了点的两种移动方式：从点  $(x, y)$  移动到点  $(x+2, y+1)$  称为一次甲方式：从点  $(x, y)$  移动到点  $(x+1, y+2)$  称为一次乙方式.

例、点  $P$  从原点  $O$  出发连续移动 2 次；若都按甲方式，最终移动到点  $M(4, 2)$ ；若都按乙方式，最终移动到点  $N(2, 4)$ ；若按 1 次甲方式和 1 次乙方式，最终移动到点  $E(3, 3)$ .



(1) 设直线  $l_1$  经过上例中的点  $M, N$ ，求  $l_1$  的解析式；并直接写出将  $l_1$  向上平移 9 个单位长度得到的直线  $l_2$  的解析式；

(2) 点  $P$  从原点  $O$  出发连续移动 10 次，每次移动按甲方式或乙方式，最终移动到点  $Q(x, y)$ 。其中，按甲方式移动了  $m$  次.

①用含  $m$  的式子分别表示  $x, y$ ；

②请说明：无论  $m$  怎样变化，点  $Q$  都在一条确定的直线上. 设这条直线为  $l_3$ ，在图中直接画出  $l_3$  的图象；

(3) 在 (1) 和 (2) 中的直线  $l_1, l_2, l_3$  上分别有一个动点  $A, B, C$ ，横坐标依次为  $a, b, c$ ，若  $A, B, C$  三点始终在一条直线上，直接写出此时  $a, b, c$  之间的关系式.

【答案】(1)  $l_1$  的解析式为  $y = -x + 6$ ； $l_2$  的解析式为  $y = -x + 15$ ；

(2) ①  $x = m + 10, y = 20 - m$ ；②  $l_3$  的解析式为  $y = -x + 30$ ，图象见解析；

(3)  $5a + 3c = 8b$

【解析】

【分析】(1) 根据待定系数法即可求出  $l_1$  的解析式，然后根据直线平移的规律：上加下减即可求出直线  $l_2$  的解析式；

(2) ①根据题意可得：点  $P$  按照甲方式移动  $m$  次后得到的点的坐标为  $(2m, m)$ ，再得出点  $(2m, m)$  按照乙方式移动  $(10-m)$  次后得到的点的横坐标和纵坐标，即得结果；

②由①的结果可得直线  $l_3$  的解析式，进而可画出函数图象；

(3) 先根据题意得出点  $A, B, C$  的坐标，然后利用待定系数法求出直线  $AB$  的解析式，再把点  $C$  的坐标代入整理即可得出结果。

### 【小问 1 详解】

设  $l_1$  的解析式为  $y = kx + b$ ，把  $M(4, 2)$ 、 $N(2, 4)$  代入，得

$$\begin{cases} 4k + b = 2 \\ 2k + b = 4 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = -1 \\ b = 6 \end{cases},$$

$\therefore l_1$  的解析式为  $y = -x + 6$ ；

将  $l_1$  向上平移 9 个单位长度得到的直线  $l_2$  的解析式为  $y = -x + 15$ ；

### 【小问 2 详解】

① $\because$  点  $P$  按照甲方式移动了  $m$  次，点  $P$  从原点  $O$  出发连续移动 10 次，

$\therefore$  点  $P$  按照乙方式移动了  $(10-m)$  次，

$\therefore$  点  $P$  按照甲方式移动  $m$  次后得到的点的坐标为  $(2m, m)$ ；

$\therefore$  点  $(2m, m)$  按照乙方式移动  $(10-m)$  次后得到的点的横坐标为  $2m + 10 - m = m + 10$ ，纵坐标为

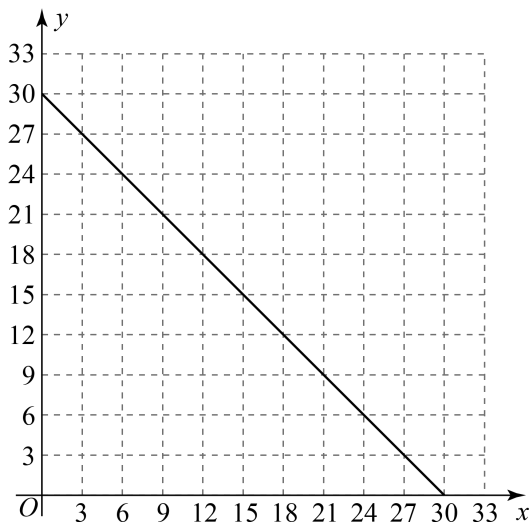
$$m + 2(10 - m) = 20 - m,$$

$$\therefore x = m + 10, y = 20 - m;$$

②由于  $x + y = m + 10 + 20 - m = 30$ ，

$\therefore$  直线  $l_3$  的解析式为  $y = -x + 30$ ；

函数图象如图所示：



【小问 3 详解】

$\therefore$  点  $A, B, C$  的横坐标依次为  $a, b, c$ ，且分别在直线  $l_1, l_2, l_3$  上，

$$\therefore A(a, -a+6), B(b, -b+15), C(c, -c+30),$$

设直线  $AB$  的解析式为  $y = mx + n$ ，

把  $A, B$  两点坐标代入，得

$$\begin{cases} ma + n = -a + 6 \\ mb + n = -b + 15 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} m = -1 + \frac{9}{b-a} \\ n = 6 - \frac{9a}{b-a} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的解析式为 } y = \left(-1 + \frac{9}{b-a}\right)x + 6 - \frac{9a}{b-a},$$

$\therefore A, B, C$  三点始终在一条直线上，

$$\therefore c \left(-1 + \frac{9}{b-a}\right) + 6 - \frac{9a}{b-a} = -c + 30,$$

整理得：  $5a + 3c = 8b$ ；

即  $a, b, c$  之间的关系式为：  $5a + 3c = 8b$ 。

【点睛】本题是一次函数和平移综合题，主要考查了平移的性质和一次函数的相关知识，正确理解题意、熟练掌握平移的性质和待定系数法求一次函数的解析式是解题关键。

26. 如图 1 和图 2，平面上，四边形  $ABCD$  中，  $AB = 8, BC = 2\sqrt{11}, CD = 12, DA = 6, \angle A = 90^\circ$ ，点  $M$  在  $AD$  边上，且  $DM = 2$ 。将线段  $MA$  绕点  $M$  顺时针旋转  $n^\circ (0 < n \leq 180)$  到  $MA'$ ， $\angle A'MA$  的平分线  $MP$  所在直线交折线  $AB - BC$  于点  $P$ ，设点  $P$  在该折线上运动的路径长为  $x (x > 0)$ ，连接  $A'P$ 。

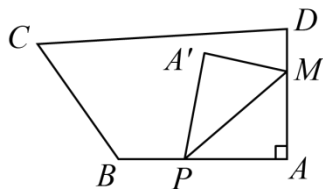


图1

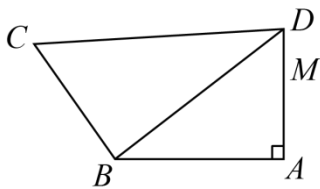
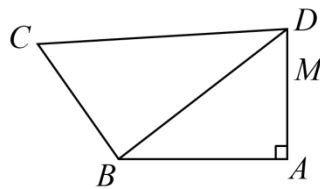


图2



备用图

- (1) 若点  $P$  在  $AB$  上, 求证:  $A'P = AP$ ;
- (2) 如图 2. 连接  $BD$ .
- ①求  $\angle CBD$  的度数, 并直接写出当  $n = 180$  时,  $x$  的值;
- ②若点  $P$  到  $BD$  的距离为 2, 求  $\tan \angle A'MP$  的值;
- (3) 当  $0 < x \leq 8$  时, 请直接写出点  $A'$  到直线  $AB$  的距离. (用含  $x$  的式子表示).

【答案】(1) 见解析 (2) ①  $\angle CBD = 90^\circ$ ,  $x = 13$ ; ②  $\frac{7}{6}$  或  $\frac{23}{6}$

(3)  $\frac{8x^2}{x^2 + 16}$

【解析】

【分析】(1) 根据旋转的性质和角平分线的概念得到  $A'M = AM$ ,  $\angle A'MP = \angle AMP$ , 然后证明出  $A'MP \cong AMP$  (SAS), 即可得到  $A'P = AP$ ;

(2) ①首先根据勾股定理得到  $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 10$ , 然后利用勾股定理的逆定理即可求出  $\angle CBD = 90^\circ$ ; 首先画出图形, 然后证明出  $DNM \sim DBA$ , 利用相似三角形的性质求出  $DN = \frac{10}{3}$ ,  $MN = \frac{8}{3}$ , 然后证明出  $PBN \sim DMN$ , 利用相似三角形的性质得到  $PB = 5$ , 进而求解即可;

②当  $P$  点在  $AB$  上时,  $PQ = 2$ ,  $\angle A'MP = \angle AMP$ , 分别求得  $BP, AP$ , 根据正切的定义即可求解; ②当  $P$  在  $BC$  上时, 则  $PB = 2$ , 过点  $P$  作  $PQ \perp AB$  交  $AB$  的延长线于点  $Q$ , 延长  $MP$  交  $AB$  的延长线于点  $H$ , 证明  $\triangle PQB \sim \triangle BAD$ , 得出  $PQ = \frac{4}{5}PB = \frac{8}{5}$ ,  $BQ = \frac{3}{5}PB = \frac{6}{5}$ , 进而求得  $AQ$ , 证明  $\triangle HPQ \sim \triangle HMA$ , 即可求解;

(3) 如图所示, 过点  $A'$  作  $A'E \perp AB$  交  $AB$  于点  $E$ , 过点  $M$  作  $MF \perp A'E$  于点  $F$ , 则四边形  $AMFE$  是矩形, 证明  $\triangle A'PE \sim \triangle MA'F$ , 根据相似三角形的性质即可求解.

【小问 1 详解】

$\therefore$  将线段  $MA$  绕点  $M$  顺时针旋转  $n^\circ$  ( $0 < n \leq 180$ ) 到  $MA'$ ,

$$\therefore A'M = AM$$

$\therefore \angle A'MA$  的平分线  $MP$  所在直线交折线  $AB - BC$  于点  $P$ ,

$$\therefore \angle A'MP = \angle AMP$$

$$\text{又} \because PM = PM$$

$$\therefore \triangle A'MP \cong \triangle AMP (\text{SAS})$$

$$\therefore A'P = AP;$$

【小问2详解】

$$\textcircled{1} \because AB = 8, DA = 6, \angle A = 90^\circ$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 10$$

$$\because BC = 2\sqrt{11}, CD = 12$$

$$\therefore BC^2 + BD^2 = (2\sqrt{11})^2 + 10^2 = 144, CD^2 = 12^2 = 144$$

$$\therefore BC^2 + BD^2 = CD^2$$

$$\therefore \angle CBD = 90^\circ;$$

如图所示，当  $n = 180$  时，

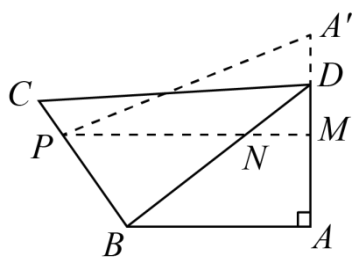


图2

$$\because PM \text{ 平分 } \angle A'MA$$

$$\therefore \angle PMA = 90^\circ$$

$$\therefore PM \parallel AB$$

$$\therefore \triangle DNM \sim \triangle DBA$$

$$\therefore \frac{DN}{DB} = \frac{DM}{DA} = \frac{MN}{BA}$$

$$\because DM = 2, DA = 6$$

$$\therefore \frac{DN}{10} = \frac{2}{6} = \frac{MN}{8}$$

$$\therefore DN = \frac{10}{3}, MN = \frac{8}{3}$$

$$\therefore BN = BD - DN = \frac{20}{3}$$

$$\because \angle PBN = \angle NMD = 90^\circ, \angle PNB = \angle DNM$$

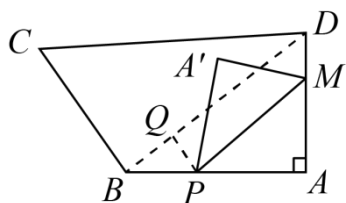
$$\therefore PBN \sim DMN$$

$$\therefore \frac{PB}{DM} = \frac{BN}{MN}, \text{ 即 } \frac{PB}{2} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{8}{3}}$$

$$\therefore \text{解得 } PB = 5$$

$$\therefore x = AB + PB = 8 + 5 = 13.$$

②如图所示，当  $P$  点在  $AB$  上时， $PQ = 2$ ， $\angle A'MP = \angle AMP$



$$\therefore AB = 8, DA = 6, \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10, \sin \angle DBA = \frac{AD}{BD} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore BP = \frac{BQ}{\sin \angle DBA} = \frac{2}{\frac{3}{5}} = \frac{10}{3},$$

$$\therefore AP = AB - BP = 8 - \frac{10}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\therefore \tan \angle A'MP = \tan \angle AMP = \frac{AP}{AM} = \frac{\frac{14}{3}}{4} = \frac{7}{6};$$

如图所示，当  $P$  在  $BC$  上时，则  $PB = 2$ ，过点  $P$  作  $PQ \perp AB$  交  $AB$  的延长线于点  $Q$ ，延长  $MP$  交  $AB$  的延长线于点  $H$ ，

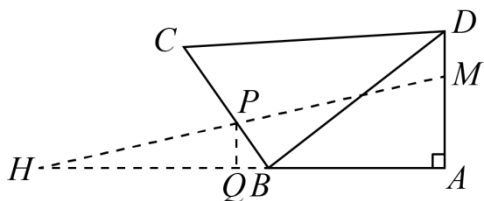


图2

$$\therefore \angle PQB = \angle CBD = \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle QPB = 90^\circ - \angle PBQ = \angle DBA,$$

$$\therefore \triangle PQB \sim \triangle BAD$$

$$\therefore \frac{PQ}{BA} = \frac{QB}{AD} = \frac{PB}{BD}$$

$$\text{即 } \frac{PQ}{8} = \frac{QB}{6} = \frac{PB}{10}$$

$$\therefore PQ = \frac{4}{5}PB = \frac{8}{5}, \quad BQ = \frac{3}{5}PB = \frac{6}{5},$$

$$\therefore AQ = AB + BQ = \frac{46}{5}$$

$$\therefore PQ \perp AB, DA \perp AB$$

$$\therefore PQ \parallel AD,$$

$$\therefore \triangle HPQ \sim \triangle HMA,$$

$$\therefore \frac{HQ}{HA} = \frac{PQ}{AM}$$

$$\therefore \frac{HQ}{HQ + \frac{46}{5}} = \frac{\frac{8}{5}}{4}$$

$$\text{解得: } HQ = \frac{92}{15}$$

$$\therefore \tan \angle A'MP = \tan \angle AMP = \tan \angle QPH = \frac{HQ}{PQ} = \frac{\frac{92}{15}}{\frac{8}{5}} = \frac{23}{6},$$

综上所述,  $\tan \angle A'MP$  的值为  $\frac{7}{6}$  或  $\frac{23}{6}$ ;

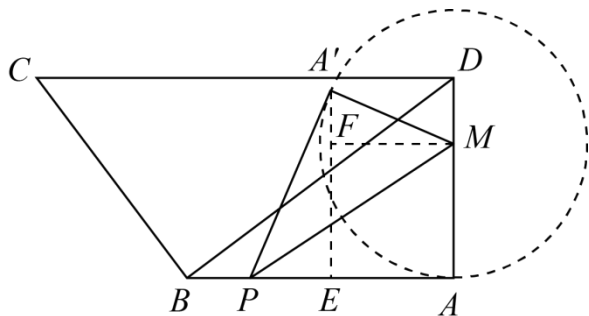
【小问 3 详解】

解:  $\because$  当  $0 < x \leq 8$  时,

$\therefore P$  在  $AB$  上,

如图所示, 过点  $A'$  作  $A'E \perp AB$  交  $AB$  于点  $E$ , 过点  $M$  作  $MF \perp A'E$  于点  $F$ , 则四边形  $AMFE$  是矩形,

$$\therefore AE = FM, \quad EF = AM = 4,$$



$$\because \triangle A'MP \cong \triangle AMP,$$

$$\therefore \angle PA'M = \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PA'E + \angle FA'M = 90^\circ,$$

$$\text{又 } \angle A'MF + \angle FA'M = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PA'E = \angle A'MF,$$

$$\text{又 } \because \angle A'EP = \angle MFA' = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle A'PE \sim \triangle MA'F,$$

$$\therefore \frac{A'P}{MA'} = \frac{PE}{A'F} = \frac{A'E}{FM}$$

$$\because A'P = AP = x, \quad MA' = MA = 4, \quad \text{设 } FM = AE = y, \quad A'E = h$$

$$\text{即 } \frac{x}{4} = \frac{x-y}{h-4} = \frac{h}{y}$$

$$\therefore y = \frac{4h}{x}, \quad 4(x-y) = x(h-4)$$

$$\therefore 4\left(x - \frac{4h}{x}\right) = x(h-4)$$

$$\text{整理得 } h = \frac{8x^2}{x^2 + 16}$$

$$\text{即点 } A' \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离为 } \frac{8x^2}{x^2 + 16}.$$

【点睛】 本题考查了全等三角形的性质与判定，相似三角形的性质与判定，折叠的性质，求正切值，熟练掌握以上知识且分类讨论是解题的关键.

