

2022 徐州市初中学业水平考试

数学试题

一、选择题（本大题共有 8 小题，每小题 3 分，共 24 分．在每小题所给出的四个选项中，只有一项符合题意，请将正确选项前的字母代号填涂在答题卡相应位置）

1. -3 的绝对值是 ()

- A. -3 B. 3 C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据负数的绝对值是它的相反数，可得出答案．

【详解】根据绝对值的性质得： $|-3|=3$ ．

故选 B.

【点睛】本题考查绝对值的性质，需要掌握非负数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数．

2. 下列图案是轴对称图形但不是中心对称图形的是 ()



【答案】C

【解析】

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的定义：如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做轴对称图形；中心对称图形的定义：把一个图形绕着某一个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点就是它的对称中心，进行逐一判断即可．

【详解】解：A、是中心对称图形，是轴对称图形，故 A 选项不合题意；

B、是中心对称图形，是轴对称图形，故 B 选项不合题意；

C、是轴对称图形，不是中心对称图形，故 C 选项不合题意；

D、是中心对称图形，是轴对称图形，故 D 选项不合题意；

故选：C.

【点睛】本题主要考查了中心对称图形，关键是找出对称中心．

3. 要使得式子 $\sqrt{x-2}$ 有意义，则 x 的取值范围是 ()

- A. $x > 2$ B. $x \geq 2$ C. $x < 2$ D. $x \leq 2$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次根式有意义，被开方数大于等于0，列不等式求解.

【详解】解：根据题意，得

$$x-2 \geq 0,$$

解得 $x \geq 2$.

故选：B.

【点睛】本题主要考查二次根式有意义的条件的知识点，代数式的意义一般从三个方面考虑：（1）当代数式是整式时，字母可取全体实数；（2）当代数式是分式时，分式的分母不能为0；（3）当代数式是二次根式时，被开方数为非负数.

4. 下列计算正确的是（ ）

A. $a^2 \cdot a^6 = a^8$

B. $a^8 \div a^4 = a^2$

C. $2a^2 + 3a^2 = 6a^4$

D. $(-3a)^2 = -9a^2$

【答案】A

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘法，同底数幂的除法，合并同类项，积的乘方逐项分析判断即可求解.

【详解】解：A. $a^2 \cdot a^6 = a^8$ ，故该选项正确，符合题意；

B. $a^8 \div a^4 = a^4$ ，故该选项不正确，不符合题意；

C. $2a^2 + 3a^2 = 5a^2$ ，故该选项不正确，不符合题意；

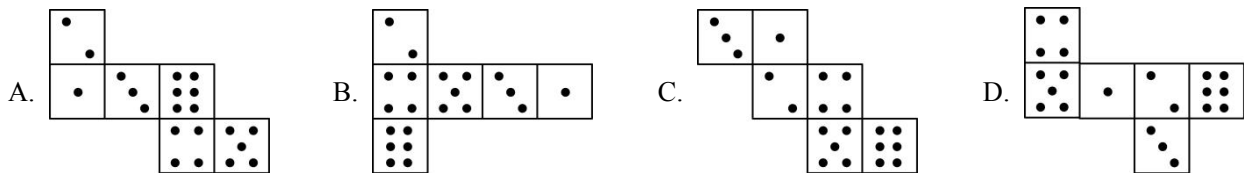
D. $(-3a)^2 = 9a^2$ ，故该选项不正确，不符合题意；

故选 A

【点睛】本题考查了同底数幂的乘法，同底数幂的除法，合并同类项，积的乘方，正确的计算是解题的关键.

5. 如图，已知骰子相对两面的点数之和为7，下列图形为该骰子表面展开图的是（ ）





【答案】D

【解析】

【分析】根据骰子表面展开后，其相对面的点数之和是 7，逐项判断即可作答。

【详解】A 项，2 的对面是 4，点数之和不为 7，故 A 项错误；

B 项，2 的对面是 6，点数之和不为 7，故 B 项错误；

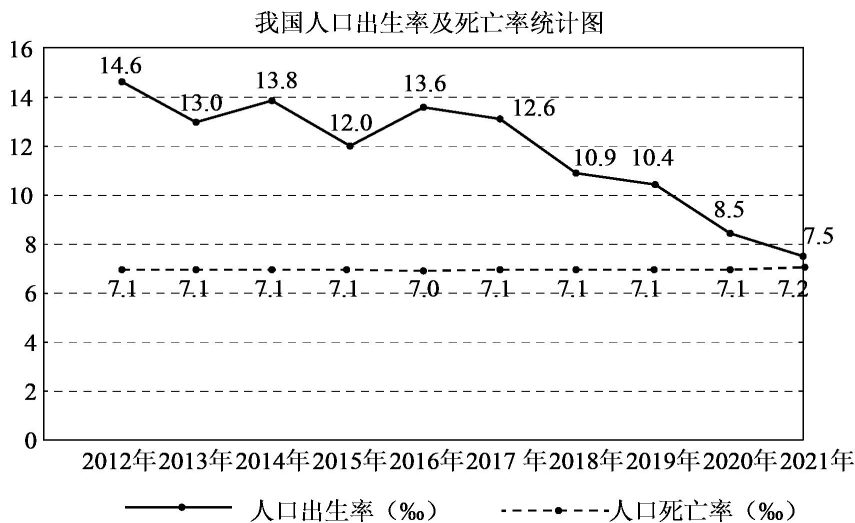
C 项，2 的对面是 6，点数之和不为 7，故 C 项错误；

D 项，1 的对面是 6，2 的对面是 5，3 的对面是 4，相对面的点数之和都为 7，故 D 项正确；

故选：D。

【点睛】本题主要考查了立体图形的侧面展开图的知识，解答时，找准相对面是解答本题的关键。没有共同边的两个面即为相对的面。

6. 我国近十年的人口出生率及人口死亡率如图所示。



已知人口自然增长率=人口出生率—人口死亡率，下列判断错误的是 ()

- A. 与 2012 年相比，2021 年的人口出生率下降了近一半
- B. 近十年的人口死亡率基本稳定
- C. 近五年的人口总数持续下降
- D. 近五年的人口自然增长率持续下降

【答案】C

【解析】

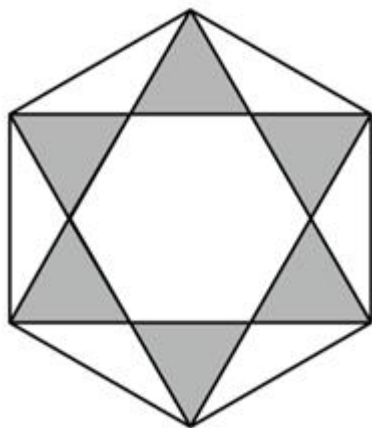
【分析】根据折线统计图逐项分析判断即可求解。

- 【详解】解：A. 与 2012 年相比，2021 年的人口出生率下降了近一半，故该选项正确，不符合题意；
- B. 近十年的人口死亡率基本稳定，故该选项正确，不符合题意；
- C. 近五年的人口总数持续上升，只是自然增长率在变小，故该选项不正确，符合题意；
- D. 近五年的人口自然增长率持续下降，故该选项正确，不符合题意。

故选 C.

【点睛】本题考查了折线统计图，从统计图获取信息是解题的关键.

7. 将一枚飞镖任意投掷到如图所示的正六边形镖盘上，若飞镖落在镖盘上各点的机会相等，则飞镖落在阴影区域的概率为 ()



A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

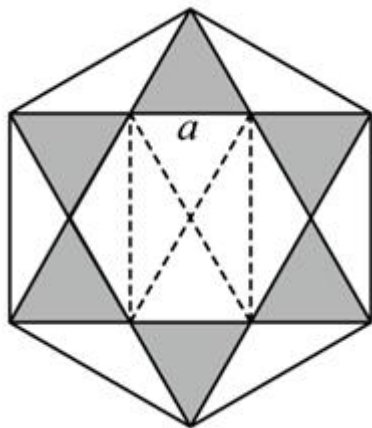
D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】如图，将阴影部分分割成图形中的小三角形，令小三角形的面积为 a ，分别表示出阴影部分的面积和正六边形的面积，根据概率公式求解即可.

【详解】解：如图，



根据题意得：图中每个小三角形的面积都相等，

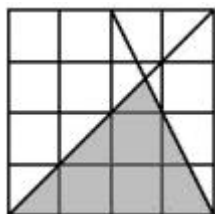
设每个小三角形的面积为 a ，则阴影的面积为 $6a$ ，正六边形的面积为 $18a$ ，

∴ 将一枚飞镖任意投掷到镖盘上，飞镖落在阴影区域的概率为 $\frac{6a}{18a} = \frac{1}{3}$ 。

故选：B

【点睛】本题主要考查几何概率，根据正六边形的性质得到图中每个小三角形的面积都相等是解题的关键。

8. 如图，若方格纸中每个小正方形的边长均为 1，则阴影部分的面积为（ ）



A. 5

B. 6

C. $\frac{16}{3}$

D. $\frac{17}{3}$

【答案】C

【解析】

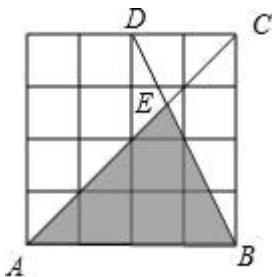
【分析】证明 $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ ，求得 $AE:CE$ ，再根据三角形的面积关系求得结果。

【详解】解：∵ $CD \parallel AB$ ，

∴ $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ ，

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CD} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = \frac{2}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = \frac{16}{3},$$



故选：C.

【点睛】本题主要考查了相似三角形的性质与判定，三角形的面积公式，关键在于证明三角形相似。

二、填空题（本大题共有 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。不需要写出解答过程， 请将答案直接填写在答题卡相应位置）

9. 因式分解： $x^2 - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $(x+1)(x-1)$

【解析】

【分析】平方差公式: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, 直接利用平方差公式分解因式即可.

【详解】解: $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$,

故答案为: $(x+1)(x-1)$

【点睛】本题考查的是利用平方差公式分解因式, 掌握“平方差公式: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ”是解本题的关键.

10. 正十二边形每个内角的度数为_____.

【答案】 150°

【解析】

【分析】首先求得每个外角的度数, 然后根据外角与相邻的内角互为邻补角即可求解.

【详解】试题分析: 正十二边形的每个外角的度数是: $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$,

则每一个内角的度数是: $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

故答案为 150° .

11. 方程 $\frac{3}{x} = \frac{2}{x-2}$ 的解是 $x = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 6

【解析】

【详解】试题分析: 两边同乘以 $x(x-2)$ 可得: $3(x-2) = 2x$, 解得: $x = 6$, 经检验: $x = 6$ 是方程的根.

12. 我国 2021 年粮食产量约为 13700 亿斤, 创历史新高, 其中 13700 亿斤用科学记数法表示为_____亿斤.

【答案】 1.37×10^4

【解析】

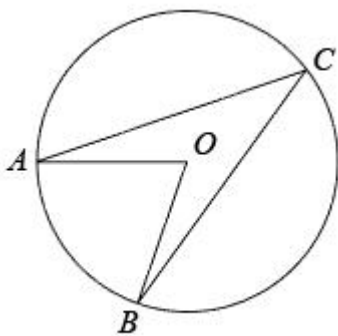
【分析】用科学记数法表示较大的数时, 一般形式为 $a \times 10^n$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数.

【详解】解: $13700 = 1.37 \times 10^4$.

故答案为: 1.37×10^4 .

【点睛】本题考查了科学记数法, 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原来的数, 变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数, 确定 a 与 n 的值是解题的关键.

13. 如图, A 、 B 、 C 点在圆 O 上, 若 $\angle ACB = 36^\circ$, 则 $\angle AOB = \underline{\hspace{1cm}}$.



【答案】 72°##72 度

【解析】

【分析】 利用一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半即可得出结论.

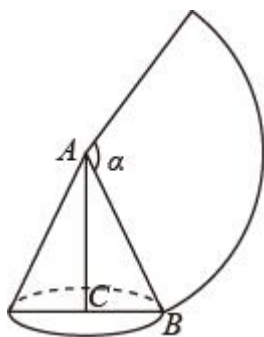
【详解】 解: $\because \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$, $\angle ACB = 36^\circ$,

$\therefore \angle AOB = 2 \times \angle ACB = 72^\circ$.

故答案为: 72° .

【点睛】 本题主要考查了圆周角定理, 利用一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半解答是解题的关键.

14. 如图, 圆锥的母线 $AB = 6$, 底面半径 $CB = 2$, 则其侧面展开图扇形的圆心角 $\alpha =$ _____.



【答案】 120° .

【解析】

【分析】 根据圆锥的侧面展开图为一扇形, 这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长, 扇形的半径等于圆锥的母线长和弧长公式得到 $\frac{\alpha\pi \times 6}{180} = 2\pi \cdot 2$, 然后解方程即可.

【详解】 解: 根据题意得 $\frac{\alpha\pi \times 6}{180} = 2\pi \cdot 2$,

解得 $\alpha = 120$,

即侧面展开图扇形的圆心角为 120° .

故答案为 120° .

【点睛】本题考查圆的周长公式，弧长公式，方程思想在初中数学的学习中非常重要，是中考的热点，在各种题型中均有出现，要特别注意.

15. 若一元二次方程 $x^2 + x - c = 0$ 没有实数根，则 c 的取值范围是_____.

【答案】 $c < -\frac{1}{4}$ ## $c < -0.25$

【解析】

【分析】根据一元二次方程根的判别式进行判断即可求解.

【详解】解： $\because$ 一元二次方程 $x^2 + x - c = 0$ 没有实数根，

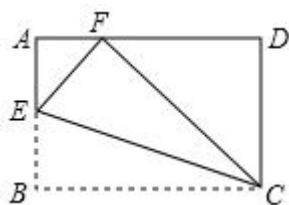
$$\therefore \Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-c) < 0,$$

$$\text{解得 } c < -\frac{1}{4},$$

$$\text{故答案为: } c < -\frac{1}{4}.$$

【点睛】本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, a, b, c 为常数) 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ，理解根的判别式对应的根的三种情况是解题的关键. 当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程没有实数根.

16. 如图，将矩形纸片 $ABCD$ 沿 CE 折叠，使点 B 落在边 AD 上的点 F 处. 若点 E 在边 AB 上， $AB = 3$ ， $BC = 5$ ，则 $AE =$ _____.



【答案】 $\frac{4}{3}$ ## $1\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】由折叠性质可得 $CF = BC = 5$ ， $BE = EF$ ，由矩形性质有 $CD = AB = 3$ ， $BC = AD = 5$ ，勾股定理求得 DF ， AF . 设 $BE = EF = x$ ，则 $AE = AB - BE$ ，在直角三角形 AEF 中，根据勾股定理，建立方程，解方程即可求解.

【详解】解：由折叠性质可得 $CF = BC = 5$ ， $BE = EF$ ，

由矩形性质有 $CD = AB = 3$ ， $BC = AD = 5$ ，

$$\therefore \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore DF = \sqrt{CF^2 - CD^2} = 4,$$

$$\text{所以 } AF = AD - DF = 5 - 4 = 1,$$

所以 $BE=EF=x$, 则 $AE=AB-BE=3-x$, 在直角三角形 AEF 中:

$$AE^2 + AF^2 = EF^2,$$

$$\therefore (3-x)^2 + 1^2 = x^2,$$

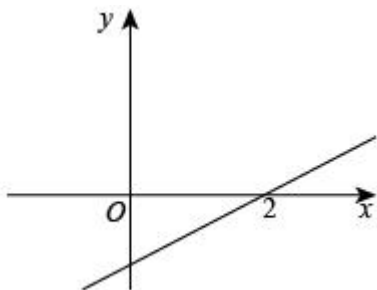
$$\text{解得 } x = \frac{5}{3},$$

$$\therefore AE = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{4}{3}.$$

【点睛】 本题考查了图形折叠的性质, 勾股定理, 矩形的性质, 在直角三角形 AEF 中运用勾股定理建立方程求解是关键.

17. 若一次函数 $y=kx+b$ 的图像如图所示, 则关于 $kx + \frac{3}{2}b > 0$ 的不等式的解集为_____.



【答案】 $x > -3$

【解析】

【分析】 根据函数图像得出 $b = -2k$, 然后解一元一次不等式即可求解.

【详解】 解: $\because$ 根据图像可知 $y=kx+b$ 与 x 轴交于点 $(2,0)$, 且 $k > 0$,

$$\therefore 2k + b = 0,$$

$$\text{解得 } b = -2k,$$

$$\therefore kx + \frac{3}{2}b > 0,$$

$$\therefore x > -\frac{3b}{2k},$$

$$\text{即 } x > \frac{-3(2k)}{2k},$$

$$\text{解得 } x > -3,$$

$$\text{故答案为: } x > -3.$$

【点睛】 本题考查了一次函数与坐标轴的交点问题, 解一元一次不等式, 求得一次函数与坐标轴的交点是解题的关键.

18. 若二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象上有且只有三个点到 x 轴的距离等于 m , 则 m 的值为_____.

【答案】4

【解析】

【分析】由抛物线解析式可得抛物线对称轴为直线 $x=1$, 顶点为 $(1, -4)$, 由图象上恰好只有三个点到 x 轴的距离为 m 可得 $m=4$.

【详解】解: $\because y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$,

$\therefore$ 抛物线开口向上, 抛物线对称轴为直线 $x=1$, 顶点为 $(1, -4)$,

$\therefore$ 顶点到 x 轴的距离为 4,

$\therefore$ 函数图象有三个点到 x 轴的距离为 m ,

$\therefore m=4$,

故答案为: 4.

【点睛】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征, 能够理解题意是解题的关键.

三、解答题 (本大题共有 10 小题, 共 86 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

19. 计算:

$$(1) (-1)^{2022} + |\sqrt{3} - 3| - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \sqrt{9};$$

$$(2) \left(1 + \frac{2}{x}\right) \div \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2}.$$

【答案】(1) $4 - \sqrt{3}$

$$(2) \frac{x}{x+2}$$

【解析】

【分析】(1) 先用乘方、绝对值、负整数次幂、算术平方根化简, 然后再计算即可;

(2) 按照分式混合运算法则计算即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } (-1)^{2022} + |\sqrt{3} - 3| - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \sqrt{9}$$

$$= 1 + 3 - \sqrt{3} - 3 + 3$$

$$= 4 - \sqrt{3}.$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}
 \text{解: } & \left(1 + \frac{2}{x}\right) \div \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2} \\
 &= \frac{x+2}{x} \div \frac{(x+2)^2}{x^2} \\
 &= \frac{x+2}{x} \times \frac{x^2}{(x+2)^2} \\
 &= \frac{x}{x+2}.
 \end{aligned}$$

【点睛】 本题主要考查了实数的混合运算、分式的混合运算、负整数次幂等知识点，灵活运用相关运算法则成为解答本题的关键.

20. (1) 解方程: $x^2 - 2x - 1 = 0$;

(2) 解不等式组:
$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 1, \\ \frac{1+x}{3} < x - 1. \end{cases}$$

【答案】 (1) $x_1 = 1 - \sqrt{2}, x_2 = 1 + \sqrt{2}$; (2) $x > 2$

【解析】

【分析】 (1) 根据配方法解一元二次方程即可求解;

(2) 分别求出每一个不等式的解集, 根据口诀: 同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集.

【详解】 (1) 解: $x^2 - 2x + 1 = 2$,

$$(x-1)^2 = 2,$$

$$\therefore x-1 = \pm\sqrt{2},$$

$$\therefore x_1 = 1 - \sqrt{2}, x_2 = 1 + \sqrt{2};$$

(2) 解:
$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 1 \text{ ①} \\ \frac{1+x}{3} < x - 1 \text{ ②} \end{cases},$$

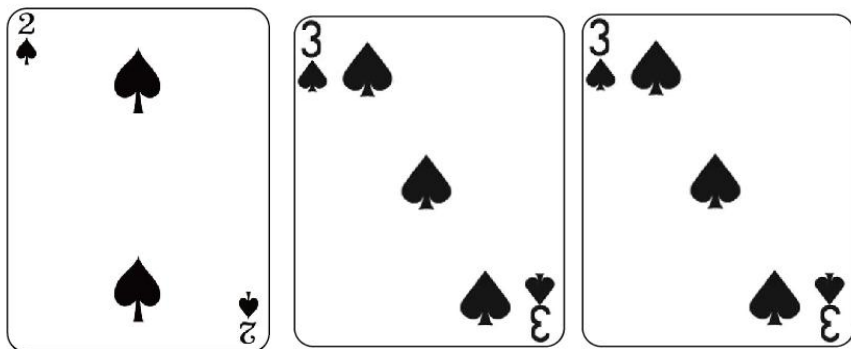
解不等式①得: $x \geq 1$,

解不等式②得: $x > 2$,

$\therefore$ 不等式组的解集为: $x > 2$.

【点睛】 本题考查了解一元一次不等式组，解一元二次方程，正确的计算是解题的关键.

21. 如图，将下列 3 张扑克牌洗匀后数字朝下放在桌面上.



(1) 从中随机抽取 1 张，抽得扑克牌上的数字为 3 的概率为_____；

(2) 从中随机抽取 2 张，用列表或画树状图的方法，求抽得 2 张扑克牌的数字不同的概率.

【答案】 (1) $\frac{2}{3}$

(2) $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 直接由概率公式求解即可；

(2) 列表或画树状图，共有 6 种等可能的结果，其中抽到 2 张扑克牌的数字不同的结果有 4 种，再由概率公式求解即可.

【小问 1 详解】

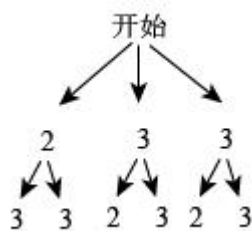
解： 根据题意，3 张扑克牌中，数字为 2 的扑克牌有一张，数字为 3 的扑克牌有两张，

∴ 从中随机抽取 1 张，抽得扑克牌上的数字为 3 的概率为 $\frac{2}{3}$ ，

故答案为： $\frac{2}{3}$ ；

【小问 2 详解】

解： 画树状图如下：



如图，共有 6 种等可能的结果，其中抽到 2 张扑克牌的数字不同的结果有 4 种，

∴抽得 2 张扑克牌的数字不同的概率为 $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

【点睛】 本题考查用列表或画树状图求概率，列表法或画树状图法可以不重复不遗漏地列出所有可能的结果，适合两步或两步以上完成的事件，解题的关键是能准确利用列表法或画树状图法找出总情况数及所求情况数.

22. 《孙子算经》是中国古代重要的数学著作，该书第三卷记载：“今有兽六首四足，禽四首二足，上有七十六首，下有四十六足，问禽、兽各几何？”译文：今有一种 6 头 4 脚的兽与一种 4 头 2 脚的鸟，若兽与鸟共有 76 个头与 46 只脚. 问兽、鸟各有多少？

根据译文，解决下列问题：

(1) 设兽有 x 个，鸟有 y 只，可列方程组为_____；

(2) 求兽、鸟各有多少.

【答案】 (1)
$$\begin{cases} 6x + 4y = 76 \\ 4x + 2y = 46 \end{cases}$$

(2) 兽有 8 只，鸟有 7 只.

【解析】

【分析】 (1) 根据“兽与鸟共有 76 个头与 46 只脚”，即可得出关于 x 、 y 的二元一次方程组；

(2) 解方程组，即可得出结论.

【小问 1 详解】

解：∵兽与鸟共有 76 个头，

$$\therefore 6x + 4y = 76;$$

∵兽与鸟共有 46 只脚，

$$\therefore 4x + 2y = 46.$$

∴可列方程组为
$$\begin{cases} 6x + 4y = 76 \\ 4x + 2y = 46 \end{cases}.$$

故答案为：
$$\begin{cases} 6x + 4y = 76 \\ 4x + 2y = 46 \end{cases};$$

【小问 2 详解】

解：原方程组可化简为
$$\begin{cases} 3x + 2y = 38 \text{ ①} \\ 2x + y = 23 \text{ ②} \end{cases},$$

由②可得 $y = 23 - 2x$ ③，

将③代入①得 $3x + 2(23 - 2x) = 38$,

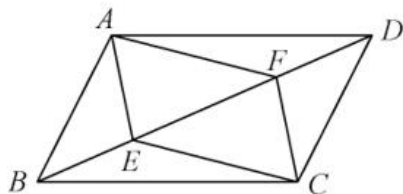
解得 $x=8$,

$$\therefore y=23-2x=23-2\times 8=7.$$

答: 曾有 8 只, 鸟有 7 只.

【点睛】 本题考查了二元一次方程组的应用, 找准等量关系, 正确列出二元一次方程组是解题的关键.

23. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 在对角线 BD 上, 且 $BE=DF$. 求证:



(1) $\triangle ABE \cong \triangle CDF$;

(2) 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据平行四边形的性质可得 $AB \parallel CD$, $AB = CD$, 根据平行线的性质可得 $\angle ABE = \angle CDF$, 结合已知条件根据 SAS 即可证明 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$;

(2) 根据 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ 可得 $AE = CF$, $\angle AEB = \angle CFD$, 根据邻补角的意义可得 $\angle AEF = \angle CFE$, 可得 $AE \parallel CF$, 根据一组对边平行且相等即可得出.

【小问 1 详解】

证明: 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB \parallel CD, AB = CD,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CDF,$$

又 $BE = DF$,

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF \text{ (SAS)};$$

【小问 2 详解】

证明: $\because \triangle ABE \cong \triangle CDF$,

$$\therefore AE = CF, \angle AEB = \angle CFD$$

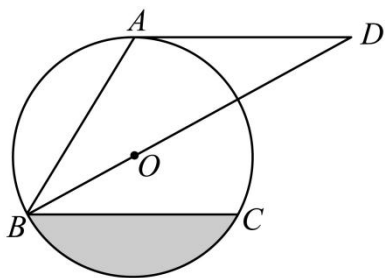
$$\therefore \angle AEF = \angle CFE$$

$$\therefore AE \parallel CF,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质与判定, 全等三角形的性质与判定, 掌握平行四边形的性质与判定是解题的关键.

24. 如图, 如图, 点 A 、 B 、 C 在圆 O 上, $\angle ABC = 60^\circ$, 直线 $AD \parallel BC$, $AB = AD$, 点 O 在 BD 上.



(1) 判断直线 AD 与圆 O 的位置关系, 并说明理由;

(2) 若圆的半径为 6, 求图中阴影部分的面积.

【答案】(1) 直线 AD 与圆 O 相切, 理由见解析

(2) $12\pi - 9\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 连接 OA , 根据 $AD \parallel BC$ 和 $AB = AD$, 可得 $\angle DBC = \angle ABD = \angle D = 30^\circ$, 从而得到 $\angle BAD = 120^\circ$, 再由 $OA = OB$, 可得 $\angle BAO = \angle ABD = 30^\circ$, 从而得到 $\angle OAD = 90^\circ$, 即可求解;

(2) 连接 OC , 作 $OH \perp BC$ 于 H , 根据垂径定理可得 $OH = \frac{1}{2}OB = 3$, 进而得到 $BC = 2BH = 6\sqrt{3}$, 再

根据阴影部分的面积为 $S_{\text{扇形}BOC} - S_{\triangle BOC}$, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 直线 AD 与圆 O 相切, 理由如下:

如图, 连接 OA ,

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle D = \angle DBC$,

$\because AB = AD$,

$\therefore \angle D = \angle ABD$,

$\because \angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \angle DBC = \angle ABD = \angle D = 30^\circ$,

$\therefore \angle BAD = 120^\circ$,

$\because OA = OB$,

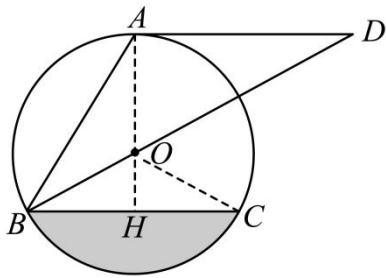
$\therefore \angle BAO = \angle ABD = 30^\circ$,

$\therefore \angle OAD = 90^\circ$,

$\therefore OA \perp AD$,

$\because OA$ 是圆的半径,

$\therefore$ 直线 AD 与圆 O 相切,



【小问 2 详解】

解: 如图, 连接 OC , 作 $OH \perp BC$ 于 H ,

$$\because OB=OC=6,$$

$$\therefore \angle OCB = \angle OBC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 120^\circ,$$

$$\therefore OH = \frac{1}{2}OB = 3,$$

$$\therefore BH = \sqrt{BO^2 - OH^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore BC = 2BH = 6\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{扇形 } BOC \text{ 的面积为 } \frac{120 \times 6^2 \times \pi}{360} = 12\pi,$$

$$\therefore S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2}BC \cdot OH = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 3 = 9\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{阴影部分的面积为 } S_{\text{扇形}BOC} - S_{\triangle BOC} = 12\pi - 9\sqrt{3}.$$

【点睛】本题主要考查了切线的判定, 求扇形面积, 垂径定理, 熟练掌握切线的判定定理, 并根据题意得到阴影部分的面积为 $S_{\text{扇形}BOC} - S_{\triangle BOC}$ 是解题的关键.

25. 如图, 下列装在相同的透明密封盒内的古钱币, 其密封盒上分别标有古钱币的尺寸及质量, 例如: 钱币“文星高照”密封盒上所标“45.4*2.8mm, 24.4g”是指该枚古钱币的直径为 45.4mm, 厚度为 2.8mm, 质量为 24.4g. 已知这些古钱币的材质相同.

45.4*2.8mm. 24.4g

48.1*2.4mm. 24.0g

45.1*2.3mm. 13.0g

44.6*2.1mm. 20.0g

45.5*2.3mm. 21.7g



文星高照

状元及第

鹿鹤同春

顺风大吉

连中三元

根据图中信息, 解决下列问题.

(1) 这 5 枚古钱币, 所标直径的平均数是_____ mm, 所标厚度的众数是_____ mm, 所标质量的中位数是_____ g;

(2) 由于古钱币无法从密封盒内取出, 为判断密封盒上所标古钱币的质量是否有错, 桐桐用电子秤测得每枚古钱币与其密封盒的总质量如下:

名称	文星高照	状元及第	鹿鹤同春	顺风大吉	连中三元
总质量/g	58.7	58.1	55.2	54.3	55.8

请你应用所学的统计知识, 判断哪枚古钱币所标的质量与实际质量差异较大, 并计算该枚古钱币的实际质量约为多少克.

【答案】(1) 45.74, 2.3, 21.7;

(2) “鹿鹤同春” 的实际质量约为 21.0 克.

【解析】

【分析】(1) 根据平均数、众数和中位数的定义求解即可;

(2) 根据题中所给数据求出每一枚古钱币的密封盒质量, 即可判断出哪枚古钱币所标的质量与实际质量差异较大, 计算其余四个密封盒的平均数, 即可求得所标质量有错的古钱币的实际质量.

【小问 1 详解】

解: 平均数: $\frac{1}{5} \times (45.4 + 48.1 + 45.1 + 44.6 + 45.5) = 45.74\text{mm}$;

这 5 枚古钱币的厚度分别为: 2.8mm, 2.4mm, 2.3mm, 2.1mm, 2.3mm,

其中 2.3mm 出现了 2 次, 出现的次数最多,

$\therefore$ 这 5 枚古钱币的厚度的众数为 2.3mm;

将这 5 枚古钱币的重量按从小到大的顺序排列为: 13.0g, 20.0g, 21.7g, 24.0g, 24.4g,

$\therefore$ 这 5 枚古钱币质量的中位数为 21.7g;

故答案为: 45.74, 2.3, 21.7;

【小问 2 详解】

名称	文星高照	状元及第	鹿鹤同春	顺风大吉	连中三元
总质量/g	58.7	58.1	55.2	54.3	55.8
盒标质量	24.4	24.0	13.0	20.0	21.7
盒子质量	34.3	34.1	42.2	34.3	34.1

∴“鹿鹤同春”密封盒的质量异常，故“鹿鹤同春”所标质量与实际质量差异较大.

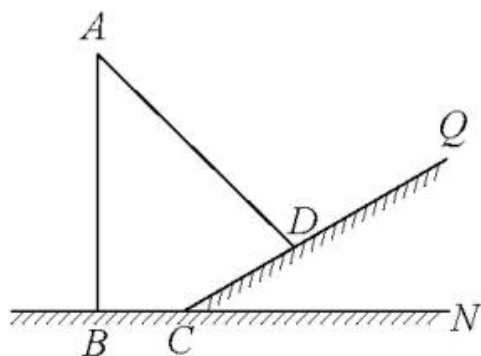
其余四个盒子质量的平均数为: $\frac{34.3+34.1+34.3+34.1}{4} = 34.2\text{g}$,

$$55.2 - 34.2 = 21.0\text{g}$$

故“鹿鹤同春”的实际质量约为 21.0 克.

【点睛】本题考查了平均数、中位数和众数的求解，平均数的应用，将一组数据按照由小到大（或由大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数；如果数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数；众数就是一组数据中出现次数最多的那个数据. 一组数据中，众数可能不止一个.

26. 如图，公园内有一个垂直于地面的立柱 AB ，其旁边有一个坡面 CQ ，坡角 $\angle QCN = 30^\circ$. 在阳光下，小明观察到在地面上的影长为 120cm ，在坡面上的影长为 180cm . 同一时刻，小明测得直立于地面长 60cm 的木杆的影长为 90cm （其影子完全落在地面上）. 求立柱 AB 的高度.

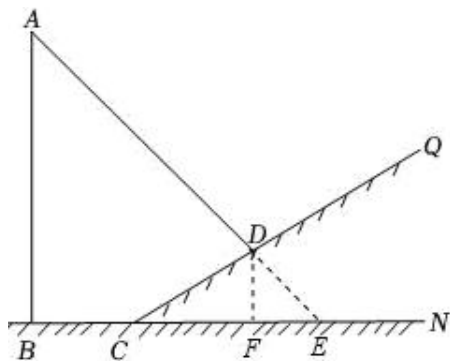


【答案】 $(170 + 60\sqrt{3})\text{cm}$

【解析】

【分析】延长 AD 交 BN 于点 E ，过点 D 作 $DF \perp BN$ 于点 F ，根据直角三角形的性质求出 DF ，根据余弦的定义求出 CF ，根据题意求出 EF ，再根据题意列出比例式，计算即可.

【详解】解：延长 AD 交 BN 于点 E ，过点 D 作 $DF \perp BN$ 于点 F ，



在 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中, $\angle CFD=90^\circ$, $\angle DCF=30^\circ$,

$$\text{则 } DF=\frac{1}{2}CD=90 \text{ (cm)}, CF=CD\cdot\cos\angle DCF=180\times\frac{\sqrt{3}}{2}=90\sqrt{3} \text{ (cm)},$$

$$\text{由题意得: } \frac{DF}{EF}=\frac{60}{90}, \text{ 即 } \frac{90}{EF}=\frac{60}{90},$$

$$\text{解得: } EF=135,$$

$$\therefore BE=BC+CF+EF=120+90\sqrt{3}+135=(255+90\sqrt{3})\text{cm},$$

$$\text{则 } \frac{AB}{255+90\sqrt{3}}=\frac{60}{90},$$

$$\text{解得: } AB=170+60\sqrt{3},$$

答: 立柱 AB 的高度为 $(170+60\sqrt{3})\text{cm}$.

【点睛】此题考查了解直角三角形的应用-坡度坡角问题、平行投影的应用, 解题的关键是数形结合, 正确作出辅助线, 利用锐角三角函数和成比例线段计算.

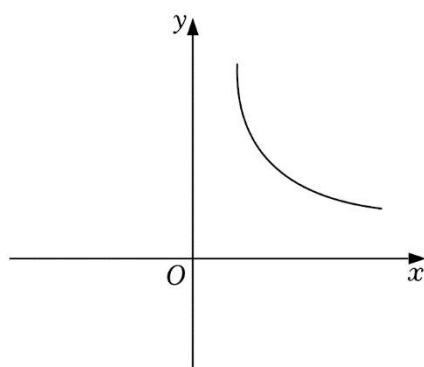
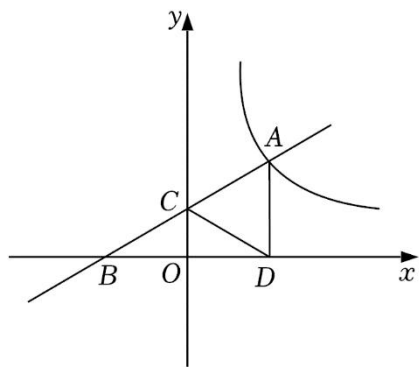
27. 如图, 一次函数 $y=kx+b(k>0)$ 的图像与反比例函数 $y=\frac{8}{x}(x>0)$ 的图像交于点 A , 与 x 轴交于点 B , 与 y 轴交于点 C , $AD\perp x$ 轴于点 D , $CB=CD$, 点 C 关于直线 AD 的对称点为点 E .

(1) 点 E 是否在这个反比例函数的图像上? 请说明理由;

(2) 连接 AE 、 DE , 若四边形 $ACDE$ 为正方形.

①求 k 、 b 的值;

②若点 P 在 y 轴上, 当 $|PE-PB|$ 最大时, 求点 P 的坐标.



备用图

【答案】(1) 点 E 在这个反比例函数的图像上, 理由见解析

(2) ① $k=1$, $b=2$; ② 点 P 的坐标为 $(0, -2)$

【解析】

【分析】(1) 设点 A 的坐标为 $(m, \frac{8}{m})$ ，根据轴对称的性质得到 $AD \perp CE$ ， AD 平分 CE ，如图，连接 CE

交 AD 于 H ，得到 $CH = EH$ ，再结合等腰三角形三线合一得到 CH 为 $\triangle ACD$ 边 AD 上的中线，即

$AH = HD$ ，求出 $H(m, \frac{4}{m})$ ，进而求得 $E(2m, \frac{4}{m})$ ，于是得到点 E 在这个反比例函数的图像上；

(2) ①根据正方形的性质得到 $AD = CE$ ， AD 垂直平分 CE ，求得 $CH = \frac{1}{2}AD$ ，设点 A 的坐标为 $(m, \frac{8}{m})$ ，

得到 $m = 2$ （负值舍去），求得 $A(2, 4)$ ， $C(0, 2)$ ，把 $A(2, 4)$ ， $C(0, 2)$ 代入 $y = kx + b$ 得，解方程组即可得

到结论；②延长 ED 交 y 轴于 P ，根据已知条件得到点 B 与点 D 关于 y 轴对称，求得 $|PE - PD| = |PE - PB|$ ，

则点 P 即为符合条件的点，求得直线 DE 的解析式为 $y = x - 2$ ，于是得到结论。

【小问 1 详解】

解：点 E 在这个反比例函数的图像上。

理由如下：

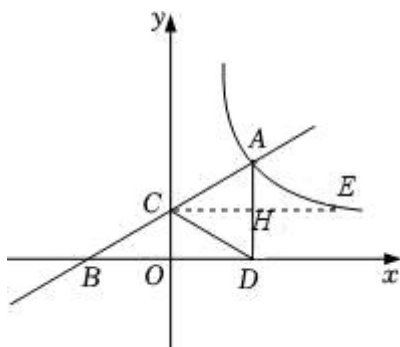
$\because$ 一次函数 $y = kx + b (k > 0)$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{8}{x} (x > 0)$ 的图像交于点 A，

$\therefore$ 设点 A 的坐标为 $(m, \frac{8}{m})$ ，

$\because$ 点 C 关于直线 AD 的对称点为点 E，

$\therefore AD \perp CE$ ， AD 平分 CE ，

连接 CE 交 AD 于 H ，如图所示：



$\therefore CH = EH$ ，

$\because AD \perp x$ 轴于 D ，

$\therefore CE \parallel x$ 轴， $\angle ADB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CDO + \angle ADC = 90^\circ$ ，

$$\therefore CB = CD,$$

$$\therefore \angle CBO = \angle CDO,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\angle ABD + \angle BAD = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CAD = \angle CDA,$$

$\therefore CH$ 为 $\triangle ACD$ 边 AD 上的中线, 即 $AH = HD$,

$$\therefore H\left(m, \frac{4}{m}\right),$$

$$\therefore E\left(2m, \frac{4}{m}\right),$$

$$\therefore 2m \times \frac{4}{m} = 8,$$

$\therefore$ 点 E 在这个反比例函数的图像上;

【小问 2 详解】

解: ① $\because$ 四边形 $ACDE$ 为正方形,

$\therefore AD = CE$, AD 垂直平分 CE ,

$$\therefore CH = \frac{1}{2}AD,$$

设点 A 的坐标为 $\left(m, \frac{8}{m}\right)$,

$$\therefore CH = m, \quad AD = \frac{8}{m},$$

$$\therefore m = \frac{1}{2} \times \frac{8}{m},$$

$$\therefore m = 2 \text{ (负值舍去)},$$

$$\therefore A(2, 4), \quad C(0, 2),$$

把 $A(2, 4)$, $C(0, 2)$ 代入 $y = kx + b$ 得 $\begin{cases} 2k + b = 4 \\ b = 2 \end{cases}$,

$$\therefore \begin{cases} k = 1 \\ b = 2 \end{cases};$$

② 延长 ED 交 y 轴于 P , 如图所示:

(4) 求 $\frac{CH}{CE}$ 的最大值.

【答案】(1) 45° (2) 9

(3) $PE=DG$, 理由见解析

(4) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 先说明 $\angle B=45^\circ$, 再说明 DE 是 $\triangle CBP$ 的中位线可得 $DE \parallel BP$, 然后由平行线的性质即可解答;

(2) 先说明 $\triangle EDF$ 和 $\triangle GFC$ 是等腰直角三角形可得 $DF=EF=\frac{\sqrt{2}}{2}DE$ 、 $GF=CF=\frac{\sqrt{2}}{2}CG$; 设 $AP=x$, 则

$BP=12-x$, $BP=12-x=2DE$, 然后通过三角形中位线、勾股定理、线段的和差用 x 表示出 AG , 再根据三角形的面积公式列出表达式, 最后运用二次函数求最值即可;

(3) 先证明 $\triangle GFD \cong \triangle CFE$, 可得 $DG=CE$, 进而可得 $PE=DG$; 由 $\triangle GFD \cong \triangle CFE$ 可得 $\angle ECF = \angle DGF$, 进而得到 $\angle GHE = \angle CFE = 90^\circ$, 即可说明 DG 、 PE 的位置关系;

(4) 先说明 $\triangle CEF \sim \triangle CDH$ 得到 $\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CH}$, 进而得到 $\frac{CH}{CE} = \frac{CF \cdot CD}{CE^2}$, 然后将已经求得的量代入可得 $\frac{CH}{CE} = \frac{12}{x+12 + \frac{288}{x+12} - 24}$, 然后根据 $a + \frac{1}{a} = \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 - 2 \geq 2$ 求最值即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 12$

$\therefore \angle B = \angle ACB = 45^\circ$

$\because$, D 、 E 分别为 BC 、 PC 的中点

$\therefore DE \parallel BP$, $DE = \frac{1}{2}BP$

$\therefore \angle EDC = \angle B = 45^\circ$.

【小问 2 详解】

解: 如图: 连接 PG

$\because \angle EDC = \angle ACB = 45^\circ$, $GF \perp DC$

$\therefore \triangle EDF$ 和 $\triangle GFC$ 是等腰直角三角形

$\therefore DF = EF = \frac{\sqrt{2}}{2}DE$, $GF = CF = \frac{\sqrt{2}}{2}CG$,

设 $AP=x$, 则 $BP=12-x$, $BP=12-x=2DE$

$$\therefore DE = \frac{12-x}{2}, \quad EF = \frac{12-x}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore Rt\triangle APC,$$

$$\therefore PC = \sqrt{AP^2 + AC^2} = \sqrt{x^2 + 144}$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 144}$$

$$\therefore Rt\triangle EFC$$

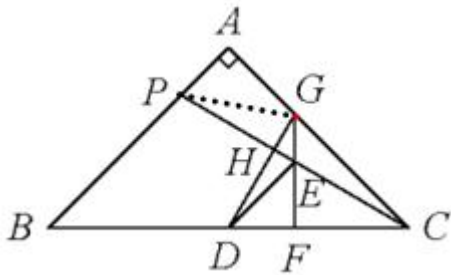
$$\therefore FC = FG = \sqrt{CE^2 - EF^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 144}\right)^2 - \left(\frac{12-x}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{(x+12)^2}{8}} = \frac{12+x}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore CG = \sqrt{2} CF = \frac{12+x}{2}$$

$$\therefore AG = 12 - CG = 12 - \frac{12+x}{2} = \frac{12-x}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle APG} = \frac{1}{2} AP \cdot AG = \frac{1}{2} x \cdot \frac{12-x}{2} = \frac{12x - x^2}{4} = \frac{-(x-6)^2 + 36}{4}$$

所以当 $x=6$ 时, $S_{\triangle APG}$ 有最大值 9.



【小问 3 详解】

解: $DG=PE$, $DG \perp PE$, 理由如下:

$$\therefore DF=EF, \quad \angle CFE = \angle GFD, \quad GF=CF$$

$$\therefore \triangle GFD \cong \triangle CFE (\text{SAS})$$

$$\therefore DG=CE$$

$\therefore E$ 是 PC 的中点

$$\therefore PE=CE$$

$$\therefore PE=DG;$$

$$\therefore \triangle GFD \cong \triangle CFE$$

$$\therefore \angle ECF = \angle DGF$$

$$\therefore \angle CEF = \angle PEG$$

$$\therefore \angle GHE = \angle EFC = 90^\circ, \quad \text{即 } DG \perp PE.$$

【小问 4 详解】

解: $\because \triangle GFD \cong \triangle CFE$

$$\therefore \angle CEF = \angle CDH$$

又 $\because \angle ECF = \angle DCH$

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle CDH$$

$$\therefore \frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CH}, \text{ 即 } CE \cdot CH = CF \cdot CF$$

$$\therefore \frac{CH}{CE} = \frac{CF \cdot CD}{CE^2}$$

$$\because FC = \frac{12+x}{2\sqrt{2}}, \quad CE = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+144}, \quad CD = \frac{1}{2}BC = \sqrt{12^2+12^2} = 6\sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{CH}{CE} = \frac{\frac{12+x}{2\sqrt{2}} \cdot 6\sqrt{2}}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+144}\right)^2} = 12 \times \frac{x+12}{x^2+144} = \frac{12}{x+12 + \frac{288}{x+12} - 24}$$

$$\leq \frac{12}{2\sqrt{288}-24} = \frac{12}{24\sqrt{2}-24} = \frac{1}{2\sqrt{2}-2} = \frac{2\sqrt{2}+2}{4} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$$\therefore \frac{CH}{CE} \text{ 的最大值为 } \frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

【点睛】 本题主要考查了三角形中位线、平行线的性质、二次函数求最值、全等三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质等知识点，综合应用所学知识成为解答本题的关键.

