

南京市 2022 年初中学业水平考试

数学

一、选择题

1. 实数 -3 的相反数是 ()

- A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据相反数的定义判断即可；

【详解】解： -3 的相反数是 3 ，

故选：A.

【点睛】本题考查了相反数：只有符号不同的两个数互为相反数；掌握其定义是解题关键.

2. 计算 $(a^2)^3$ ，正确结果是 ()

- A. a^5 B. a^6
C. a^8 D. a^9

【答案】B

【解析】

【详解】由幂的乘方与积的乘方法则可知， $(a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$.

故选 B.

3. 估计 12 的算术平方根介于 ()

- A. 1 和 2 之间 B. 2 和 3 之间 C. 3 和 4 之间 D. 4 和 5 之间

【答案】C

【解析】

【分析】首先根据 $\sqrt{9} < \sqrt{12} < \sqrt{16}$ ，即可得出 12 的算术平方根介于 3 和 4 之间.

【详解】 $\because \sqrt{9} < \sqrt{12} < \sqrt{16}$ ，

$\therefore 3 < \sqrt{12} < 4$.

$\therefore$ 估计 12 的算术平方根介于 3 和 4 之间.

故选 C.

【点睛】 本题主要考查了无理数大小的估算，得出 $\sqrt{12}$ 接近的有理数是解题的关键.

4. 反比例函数 $y = \frac{k^2}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的图像位于 ()

- A. 第一、三象限 B. 第二、四象限 C. 第一、二象限 D. 第三、四象限

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据 $k^2 \geq 0$ 及反比例函数 $y = \frac{k^2}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的性质即可解答.

【详解】 解: $\because k^2 \geq 0$ 且 $k \neq 0$,

$\therefore k^2 > 0$,

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{k^2}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的图象位于第一、三象限,

故选: A.

【点睛】 本题考查了反比例函数的性质, 掌握反比例函数的性质是解题的关键.

5. 已知实数 a , b , $a > b$, 下列结论中一定正确的是 ()

- A. $|a| > |b|$ B. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ C. $a^2 > b^2$ D. $a^3 > b^3$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据不等式的性质逐项分析即可.

【详解】 解: A、由 $a > b$ 不一定有 $|a| > |b|$, 例如 $a = 0$, $b = -1$, 满足 $a > b$, 但是 $|a| = 0 < |b| = 1$, 故此选项不符合题意;

B、当 $ab = 0$ 时, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 无意义, 故此选项不符合题意;

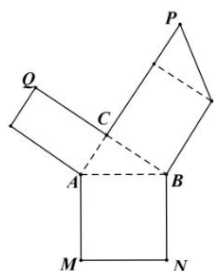
C、由 $a > b$ 不一定有 $a^2 > b^2$, 例如 $a = 0$, $b = -1$, 满足 $a > b$, 但是 $a^2 = 0 < b^2 = 1$, 故此选项不符合题意;

D、由 $a > b$ 可以得到 $a^3 > b^3$, 故此选项符合题意;

故选 D.

【点睛】 本题考查了不等式的性质: ①把不等式的两边都加(或减去)同一个整式, 不等号的方向不变; ②不等式两边都乘(或除以)同一个正数, 不等号的方向不变; ③不等式两边都乘(或除以)同一个负数, 不等号的方向改变.

6. 直三棱柱的表面展开图如图所示， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ， $AB = 5$ ，四边形 $AMNB$ 是正方形，将其折叠成直三棱柱后，下列各点中，与点 C 距离最大的是（ ）



- A. 点 M B. 点 N C. 点 P D. 点 Q

【答案】B

【解析】

【分析】根据勾股定理的逆定理判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形，折叠成直三棱柱后，运用勾股定理计算比较大可即可.

【详解】 $\because AC = 3$ ， $BC = 4$ ， $AB = 5$ ，

$$\therefore 3^2 + 4^2 = 5^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，

$\because$ 四边形 $AMNB$ 是正方形，将其折叠成直三棱柱，

$\therefore$ 直棱柱的高 $AM = AB = 5$ ，

$$\therefore CM = \sqrt{AC^2 + AM^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}, \quad CN = \sqrt{BC^2 + BN^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}, \quad CP = \sqrt{34},$$

$$CQ = AM = 5,$$

$$\because \sqrt{41} > \sqrt{34} > \sqrt{25},$$

$\therefore$ 选 B.

【点睛】本题考查了几何体的展开与折叠，勾股定理及其逆定理，熟练掌握展开图与折叠的意义是解题的关键.

二、填空题

7. 地球与月球的平均距离大约 384000km，用科学记数法表示这个距离为__km.

【答案】 3.84×10^5

【解析】

【分析】根据科学记数法的概念可知：用科学记数法可将一个数表示 $a \times 10^n$ 的形式.

【详解】 $384000 = 3.84 \times 10^5$.

故答案是： 3.84×10^5 .

【点睛】考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

8. 若 $\frac{2}{x-3}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \neq 3$

【解析】

【分析】直接利用分式有意义则分母不等于零即可得出答案.

【详解】解： $\frac{2}{x-3}$ 在实数范围内有意义，

故 $x-3 \neq 0$,

解得： $x \neq 3$.

故答案为： $x \neq 3$.

【点睛】此题主要考查了分式有意义的条件，正确掌握相关定义是解题关键.

9. 计算 $\sqrt{18} - \sqrt{8}$ 的结果为_____.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】先把 $\sqrt{18}$ 和 $\sqrt{8}$ 化为最简二次根式，然后合并同类二次根式.

【详解】解：原式 $= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

故答案为 $\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了二次根式的加减法：先把二次根式化为最简二次根式，然后合并同类二次根式.

10. 方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x_1=1, x_2=3$

【解析】

【分析】利用十字相乘法分解因式解方程即可.

【详解】解： $\because x^2 - 4x + 3 = 0$,

$\therefore (x-1)(x-3) = 0$,

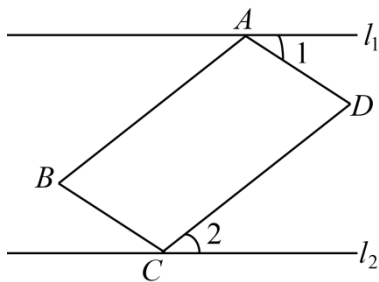
$\therefore x-1=0$ 或 $x-3=0$,

解得 $x_1=1, x_2=3$,

故答案为： $x_1=1$, $x_2=3$.

【点睛】 本题考查了解一元二次方程-因式分解法：就是先把方程的右边化为 0，再把左边通过因式分解化为两个一次因式的积的形式，那么这两个因式的值就都有可能为 0，这就能得到两个一元一次方程的解，这样也就把原方程进行了降次，把解一元二次方程转化为解一元一次方程的问题了（数学转化思想）.

11. 如图， $ABCD$ 的顶点 A 、 C 分别在直线 l_1 , l_2 上, $l_1 \parallel l_2$, 若 $\angle 1 = 33^\circ$, $\angle B = 65^\circ$, 则 $\angle 2 =$ _____.



【答案】 32° ##32 度

【解析】

【分析】 根据平行四边形的性质得到 $\angle B = \angle CDA = 65^\circ$ ，再利用平行线的性质得到 $\angle 1 + \angle 2 = \angle CDA$ 即可解答.

【详解】 解：过点 D 作 $DE \parallel l_2$,

$$\therefore \angle 2 = \angle EDC$$

$$\because l_1 \parallel l_2,$$

$$\therefore DE \parallel l_1,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle ADE,$$

$$\therefore \angle CDA = \angle 1 + \angle 2,$$

$\because$ 在 $ABCD$ 中,

$$\therefore \angle B = \angle CDA,$$

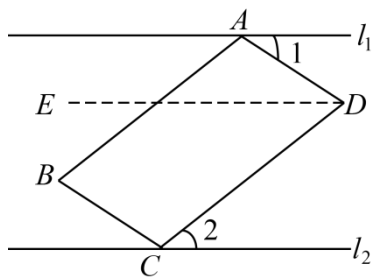
$$\because \angle B = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle CDA = 65^\circ,$$

$$\because \angle 1 = 33^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle CDA - \angle 1 = 32^\circ,$$

故答案为： 32° .



【点睛】 本题考查了平行线的性质，平行四边形的性质，掌握平行线的性质是解题的关键.

12. 若 $2^4 + 2^4 = 2^a$ ， $3^5 + 3^5 + 3^5 = 3^b$ ，则 $a + b =$ _____.

【答案】 11

【解析】

【分析】 根据同底数幂的乘法运算法则得到 $2^4 + 2^4 = 2^5$ ， $3^5 + 3^5 + 3^5 = 3^6$ 即可解答.

【详解】 解： $\because 2^4 + 2^4 = 2^a$ ， $3^5 + 3^5 + 3^5 = 3^b$ ，

$$\therefore 2^4 \times 2 = 2^a, \quad 3^5 \times 3 = 3^b,$$

$$\therefore 2^5 = 2^a, 3^6 = 3^b,$$

$$\therefore a = 5, \quad b = 6,$$

$$\therefore a + b = 11,$$

故答案为： 11.

【点睛】 本题考查了同底数幂的乘法运算法则，有理数的加法运算法则，掌握同底数幂的乘法运算法则是解题的关键.

13. 已知二次函数 $y = ax^2 - 2ax + c$ (a 、 c 为常数， $a \neq 0$) 的最大值为 2，写出一组符合条件的 a 和 c 的值：_____.

【答案】 $a = -2$ ， $c = 0$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 根据最值公式得到 $\frac{4ac - (-2a)^2}{4a} = 2$ ，即可得到 $c - a = 2$ ，据此写出一组符合条件的 a 和 c 的值

即可.

【详解】 解： $\because$ 二次函数 $y = ax^2 - 2ax + c$ 的最大值为 2，

$$\therefore \frac{4ac - (-2a)^2}{4a} = 2,$$

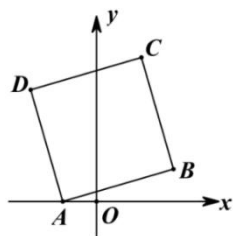
$$\therefore c - a = 2,$$

故 $a = -2$ 时, $c = 0$,

故答案为: $a = -2$, $c = 0$ (答案不唯一).

【点睛】 本题考查了二次函数的最值, 熟知二次函数的最值公式是解题的关键.

14. 在平面直角坐标系中, 正方形 $ABCD$ 如图所示, 点 A 的坐标 $(-1, 0)$, 点 D 的坐标是 $(-2, 4)$, 则点 C 的坐标是_____.



【答案】 $(2, 5)$

【解析】

【分析】 由全等三角形的判定得到 $\triangle CDE \cong \triangle DAF$, 再利用全等三角形的性质得到 $CE = DF = 4$, $DE = AF = 1$ 即可解答.

【详解】 解: 作 $CF \perp y$ 轴, $DE \perp x$ 轴于点 E , CE 与 FD 交于点 E ,

$\because$ 点 A 的坐标 $(-1, 0)$, 点 D 的坐标是 $(-2, 4)$,

$\therefore OF = 2$, $AF = 2 - 1 = 1$, $DF = 4$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore CD = AD$, $\angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore \angle DEC = \angle AFD = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADF + \angle DAF = 90^\circ = \angle ADF + \angle CDE$,

$\therefore \angle CDE = \angle DAF$,

在 $\triangle CDE$ 和 $\triangle DAF$ 中,

$$\begin{cases} \angle E = \angle AFD \\ \angle CDE = \angle DAF, \\ CD = AD \end{cases}$$

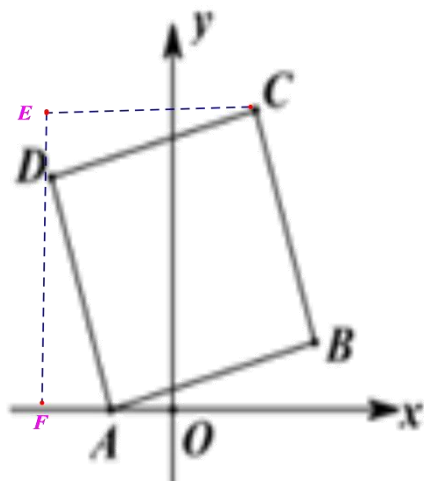
$\therefore \triangle CDE \cong \triangle DAF (AAS)$,

$\therefore CE = DF = 4$, $DE = AF = 1$,

$\therefore EF = 1 + 4 = 5$,

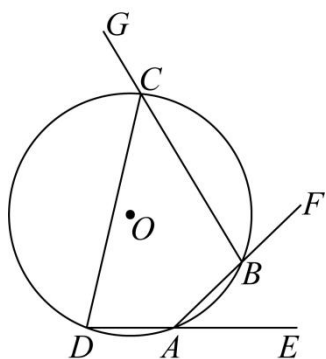
$\therefore$ 点 $C(2, 5)$,

故答案为 $(2,5)$.



【点睛】本题考查正方形的性质，全等三角形的判定与性质，坐标与图形，正确添加辅助线是解题的关键.

15. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，它的 3 个外角 $\angle EAB$ ， $\angle FBC$ ， $\angle GCD$ 的度数之比为 $1:2:4$ ，则 $\angle D =$ _____.

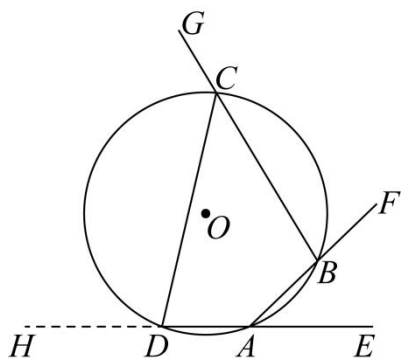


【答案】 72° ##72 度

【解析】

【分析】根据圆内接四边形的对角互补以及外角的性质可求出 $\angle CDH$ ，再根据平角的定义求解.

【详解】解：如图，延长 ED 到 H ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,

$\therefore \angle ABC + \angle ADC = \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$,

$$\therefore \angle FBC + \angle HDC = \angle EAB + \angle GCD = 180^\circ,$$

$$\because \angle EAB, \angle FBC, \angle GCD \text{ 的度数之比为 } 1:2:4,$$

$$\therefore \angle EAB, \angle FBC, \angle GCD, \angle CDH \text{ 的度数之比为 } 1:2:4:3,$$

$$\because \angle EAB + \angle FBC + \angle GCD + \angle CDH = 360^\circ,$$

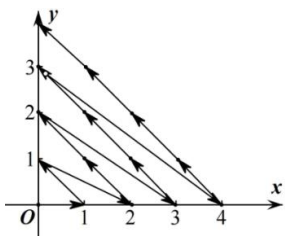
$$\therefore \angle CDH = 360^\circ \times \frac{3}{1+2+4+3} = 108^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle CDH = 72^\circ.$$

故答案为： 72° .

【点睛】 本题考查圆内接四边形，解题的关键是掌握圆内接四边形的对角互补，外角和是 360° 度.

16. 如图，在平面直角坐标系，横、纵坐标均为整数的点案如下规律依序排列： $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(3,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(0,3)$, $(4,0)$, $(3,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$, ...按这个规律，则 $(6,7)$ 是第 _____ 个点.



【答案】 99

【解析】

【分析】 先根据点的坐标，找出规律，再计算求解.

【详解】 解：横纵坐标和是 0 的有 1 个点，

横纵坐标和是 1 的有 2 个点，

横纵坐标和是 2 的有 3 个点，

横纵坐标和是 3 的有 4 个点，

.....,

横纵坐标和是 n 的有 $(n+1)$ 个点，

$$6+7=13,$$

$$\therefore 1+2+.....+12+13 = \frac{1}{2} \times 13 \times (13+1) = 91,$$

$\therefore$ 横纵坐标和是 13 的有 14 点，分别为： $(13,0)$ 、 $(12,1)$ 、 $(11,2)$ 、 $(10,3)$ 、 $(9,4)$ 、 $(8,5)$ 、 $(7,6)$ 、 $(6,7)$ 、

$(5,8)$ 、 $(4,9)$ 、 $(3,10)$ 、 $(2,11)$ 、 $(1,12)$ 、 $(0,13)$ 、

$\therefore (6, 7)$ 是第 $91 + 8 = 99$ 个点,

故答案为: 99.

【点睛】 本题考查了点的坐标, 找到坐标的排列规律是解题的关键.

三、解答题

17. 先化简, 再求值: $\frac{a+b}{ab} \div \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)$, 其中 $a=3$, $b=2$.

【答案】 $\frac{1}{a-b}$, 1

【解析】

【分析】 利用分式的混合运算, 化简原式, 再把 $a=3$, $b=2$ 代入化简后的式子, 计算即可.

【详解】 解: 原式 $= \frac{a+b}{ab} \div \frac{a^2-b^2}{ab}$,

$$= \frac{a+b}{ab} \cdot \frac{ab}{(a+b)(a-b)},$$

$$= \frac{1}{a-b}.$$

当 $a=3$, $b=2$ 时, 原式 $= \frac{1}{3-2} = 1$.

【点睛】 本题考查了分式的化简求值: 先把各分式的分子或分母因式分解, 再进行约分, 接着进行分式的加减运算, 得到最简分式或整式 (若有括号, 先把括号内通分, 除法运算转化为乘法运算); 然后把满足条件的字母的值代入进行计算得到对应分式的值. 熟练掌握分式的化简求值方法是本题的关键.

18. 解不等式组:
$$\begin{cases} 3(x-2) \leq x-4 \\ \frac{1+2x}{3} > x-1 \end{cases}.$$

【答案】 $x \leq 1$

【解析】

【分析】 根据解一元一次不等式组的步骤即可解答.

【详解】 解:
$$\begin{cases} 3(x-2) \leq x-4 \text{ ①} \\ \frac{1+2x}{3} > x-1 \text{ ②} \end{cases}$$

由①得: $3x-6 \leq x-4$

解得: $x \leq 1$

由②得: $1+2x > 3x-3$,

解得： $x < 4$ ，

∴ 原不等式组的解集为： $x \leq 1$ 。

【点睛】 本题考查了解一元一次不等式组的步骤，掌握解一元一次不等式组步骤是解题的关键。

19. 某文印店用 2660 元购进一批白色复印纸和彩色复印纸，白色复印纸每箱 80 元，彩色复印纸每箱 180 元，购买白色复印纸得箱数是彩色复印纸得箱数得 5 倍少 3 箱，求购买的白色复印纸得箱数和彩色复印纸得箱数。

【答案】 购买的白色复印纸 22 箱，彩色复印纸 5 箱

【解析】

【分析】 设购买的白色复印纸 x 箱，彩色复印纸 y 箱，根据总价是 2660 元、购买白色复印纸得箱数是彩色复印纸得箱数得 5 倍少 3 箱，列二元一次方程组，即可求解。

【详解】 解： 设购买的白色复印纸 x 箱，彩色复印纸 y 箱。

$$\text{由题意得：} \begin{cases} x = 5y - 3 \\ 80x + 180y = 2660 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x = 22 \\ y = 5 \end{cases}$$

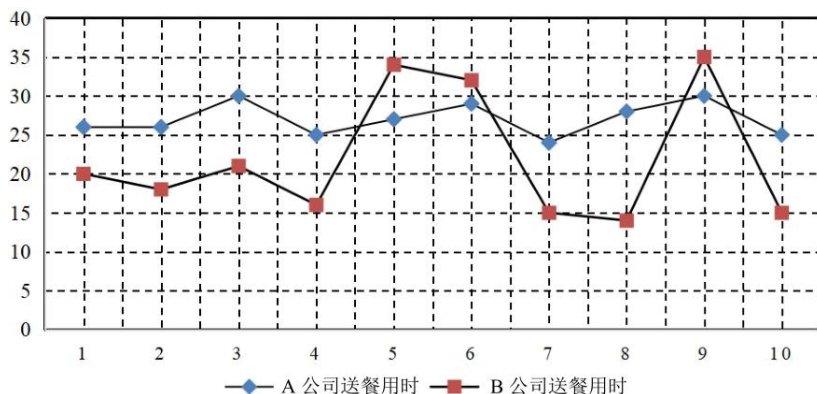
答： 购买的白色复印纸 22 箱，彩色复印纸 5 箱。

【点睛】 本题考查二元一次方程组的实际应用，解题的关键是根据所给数量关系正确列出方程组。

20. 某企业餐厅，有 A 、 B 两家公司可选择，该企业现连续 10 个工作日选择 A 公司，接着连续 10 个工作日选择 B 公司，记录送餐用时（单位： min ）如下表：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A 公司送餐用时	26	26	30	25	27	29	24	28	30	25
B 公司送餐用时	20	18	21	16	34	32	15	14	35	15

根据上表数据绘制的折线统计图如图所示：



- (1) 根据上述信息，请你帮该企业选择合适的公司订餐，并简述理由；
- (2) 如果某工作日该企业希望送餐用时不超过 20min，应选择哪家公司？请简述理由。

【答案】(1) 选择 A 公司，理由见解析（答案不唯一）

(2) 选择 B 公司，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 根据两个公司各自的优点进行判断即可；

(2) 根据表格中的数据进行选择即可。

【小问 1 详解】

解：选择 A 公司；

理由如下：A 公司送餐用时稳定，基本在 25min–30min 之间，而 B 公司送餐时间不稳定，忽快忽慢，不利于员工用餐；

选择 B 公司。

理由如下：A 公司平均用时 27min，而 B 公司平均用时 22min，B 公司平均花时更短。（言之有理即可）

【小问 2 详解】

解：选择 B 公司。

理由如下：从各自 10 个工作日送餐情况看，A 公司的送餐时间没有低于 20min 的，而 B 公司虽然有 4 次超过 30 分钟，但是其余 6 次都不超过 20min，所以选择 B 公司。

【点睛】本题主要考查了数据的处理和应用，解题的关键是根据表格中的数据作出正确的选择。

21. 甲城市有 2 个景点 A、B，乙城市由 3 个景点 C、D、E，从中随机选取景点游览，求下列事件的概率：

- (1) 选取 1 个景点，恰好在甲城市；
- (2) 选取 2 个景点，恰好在同一个城市。

【答案】(1) $\frac{2}{5}$

(2) $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】(1) 根据概率计算公式求解即可；

(2) 先列举出所有的等可能性的结果数，再找到恰好在同一个城市的结果数，最后依据概率计算公式求解即可。

【小问 1 详解】

解：随机选取 1 个景点，有 5 种等可能结果：A、B、C、D、E，其中恰好在甲城市的为 A、B 占 2 种，

$\therefore$ 恰好在甲城市的概率 $= \frac{2}{5}$ ，即随机选取 1 个景点，恰好在甲城市的概率为 $\frac{2}{5}$ 。

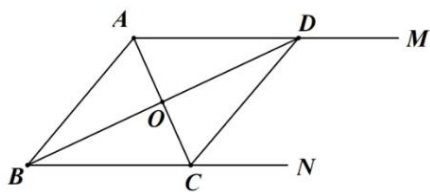
【小问 2 详解】

解：随机选取 2 个景点，共有 10 种等可能结果： AB 、 AC 、 AD 、 AE 、 BC 、 BD 、 BE 、 CD 、 CE 、 DE ，其中满足恰好在同一个城市的为： AB 、 CD 、 CE 、 DE ，占其中 4 种，

$\therefore$ 恰好在同一个城市的概率 $= \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ 即随机选取 2 个景点，恰好在同一个城市的概率为 $\frac{2}{5}$ 。

【点睛】本题主要考查了简单的概率计算，列举法求解概率，熟知概率的相关知识是解题的关键。

22. 如图， $AM \parallel BN$ ， AC 平分 $\angle BAM$ ，交 BN 于点 C ，过点 B 作 $BD \perp AC$ ，交 AM 于点 D ，垂足为 O ，连接 CD ，求证：四边形 $ABCD$ 是菱形。



【答案】见解析

【解析】

【分析】先证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形，再根据邻边 $BA = BC$ ，即可证明平行四边形 $ABCD$ 是菱形。

【详解】解：证明： $\because AC$ 平分 $\angle BAM$ ， $AM \parallel BN$ ，

$$\therefore \angle 1 = \angle 2, \angle 2 = \angle 3.$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3.$$

$$\therefore BA = BC.$$

又 $\because BD \perp AC$ 于点 O ，

$$\therefore OA = OC.$$

在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle COB$ 中，

$$\begin{cases} \angle 2 = \angle 3 \\ OA = OC \\ \angle AOD = \angle COB \end{cases},$$

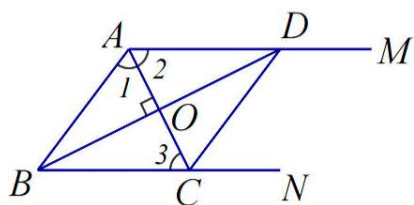
$$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COB (ASA).$$

$$\therefore OD = OB.$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形。

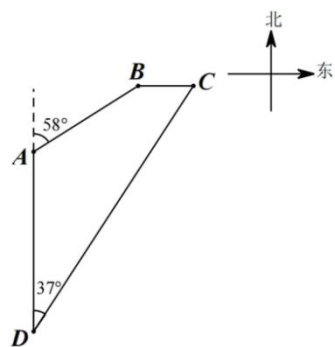
又 $\because BA = BC$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形。



【点睛】本题主要考查了菱形的判定，涉及平行四边形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，角平分线的性质，平行线的性质等知识，熟练掌握菱形的判定方法是解题的关键.

23. 如图，灯塔 B 位于港口 A 的北偏东 58° 方向，且 A 、 B 之间的距离为 30km ，灯塔 C 位于灯塔 B 的正东方向，且 B 、 C 之间的距离为 10km ，一艘轮船从港口 A 出发，沿正南方向航行到达 D 处，测得灯塔 C 位于北偏东 37° 方向上，这时， D 处距离港口 A 有多远（结果取整数）？（参考数据： $\sin 58^\circ \approx 0.85$ ， $\cos 58^\circ \approx 0.53$ ， $\tan 58^\circ \approx 1.60$ ， $\sin 37^\circ \approx 0.60$ ， $\cos 37^\circ \approx 0.80$ ， $\tan 37^\circ \approx 0.75$ ）



【答案】 D 处距离港口 A 约 31km

【解析】

【分析】过点 B 作 $BH \perp DA$ 的延长线于点 H ，在 $\triangle ABH$ 中，求得 HB, AH ，在 $\triangle DHC$ 中，求得 DH ，根据 $AD = DH - AH$ ，即可求解.

【详解】解：过点 B 作 $BH \perp DA$ 的延长线于点 H

$$\text{在 } \triangle ABH \text{ 中, } \sin \angle HAB = \frac{HB}{AB}, \quad \cos \angle HAB = \frac{AH}{AB}$$

$$\because AB = 30\text{km}, \quad \angle HAB = 58^\circ, \quad \sin 58^\circ \approx 0.85, \quad \cos 58^\circ \approx 0.53$$

$$\therefore HB = 0.85 \times 30 = 25.5, \quad AH = 0.53 \times 30 = 15.9$$

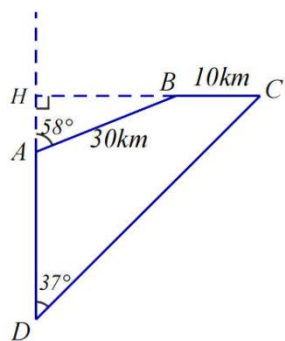
$$\text{在 } \triangle DHC \text{ 中, } \tan \angle D = \frac{CH}{DH}$$

$$\because \angle D = 37^\circ, \quad \tan 37^\circ \approx 0.75, \quad CH = HB + BC = 25.5 + 10 = 35.5$$

$$\therefore DH = \frac{CH}{\tan \angle D} = \frac{35.5}{0.75} \approx 47.33$$

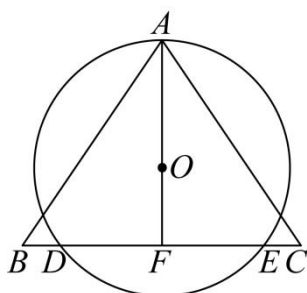
$$\therefore AD = DH - AH = 47.33 - 15.9 = 31.43 \approx 31$$

$\therefore D$ 处距离港口 A 约 31km .



【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用，构造直角三角形是解题的关键.

24. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 、 E 在 BC 上， $BD = CE$ ，过 A 、 D 、 E 三点作 $\odot O$ ，连接 AO 并延长，交 BC 于点 F 。



- (1) 求证： $AF \perp BC$ ；
- (2) 若 $AB = 10$ ， $BC = 12$ ， $BD = 2$ ，求 $\odot O$ 的半径长.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\odot O$ 的半径为 5

【解析】

【分析】 (1) 连接 AD 、 AE 、 OD 、 OE ，先证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，得到 $AD = AE$ ，再由 $OD = OE$ ，可得 AO 垂直平分 DE ，即 $AF \perp BC$ ，

(2) 设求 $\odot O$ 的半径为 x ，由 (1) 可知 F 为 BC 中点，则 $BF = CF = \frac{1}{2}BC = 6$ ，利用勾股定理求出 $AF = 8$ ，再求出 $DF = 4$ ， $OF = 8 - x$ ， $OD = x$ ，由勾股定理建立方程 $x^2 = 4^2 + (8 - x)^2$ ，解得 $x = 5$ ，则 $\odot O$ 的半径为 5.

【小问 1 详解】

证明：连接 AD 、 AE 、 OD 、 OE ，

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，

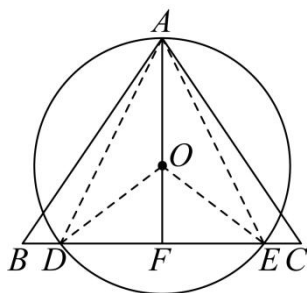
$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle B = \angle C, \\ BD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (\text{SAS}),$$

$$\therefore AD = AE,$$

$$\text{又} \because OD = OE,$$

$$\therefore AO \text{ 垂直平分 } DE, \text{ 即 } AF \perp BC,$$



【小问 2 详解】

解：设求 $\odot O$ 的半径为 x ，

由 (1) 可知 $AF \perp BC$ ，

$\therefore F$ 为 DE 中点， F 为 BC 中点，

$$\therefore BF = CF = \frac{1}{2}BC = 6,$$

$$\text{在 } \triangle ABF \text{ 中, } AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

$$\text{在 } \triangle DOF \text{ 中, } DF = BF - DB = 6 - 2 = 4, OF = AF - AO = 8 - x, OD = x,$$

$$\therefore OD^2 = DF^2 + OF^2$$

$$\therefore x^2 = 4^2 + (8 - x)^2,$$

解得 $x = 5$ ，

$\therefore \odot O$ 的半径为 5.

【点睛】本题主要考查了三线合一定理，线段垂直平分线的性质与判定，全等三角形的性质与判定，勾股定理，圆的基本性质等等，灵活运用所学知识是解题的关键.

25. 某蔬菜基地有甲、乙两个用于灌溉的水池，他们的最大容量均为 3000m^3 ，原有水量分别为 1200m^3 、 300m^3 ，现向甲、乙同时注水，直至两水池均注满为止，已知每分钟向甲、乙的注水量之和恒定为 100m^3 ，若其中某一水池注满，则停止向该水池注水，改为向另一水池单独注水，设注水第 $x \text{ min}$ 时，甲、乙水池的水量分别为 $y_1 \text{ m}^3$ 、 $y_2 \text{ m}^3$.

- (1) 若每分钟向甲注水 40m^3 ，分别写出 y_1 、 y_2 与 x 之间的函数表达式；
- (2) 若每分钟向甲注水 50m^3 ，画出 y_2 与 x 之间的函数图像；
- (3) 若每分钟向甲注水 $a\text{m}^3$ ，则甲比乙提前 3min 注满，求 a 的值.

【答案】(1) $y_1 = 1200 + 40x(0 \leq x \leq 45)$ ， $y_2 = 300 + 60x(0 \leq x \leq 45)$

(2) 见解析 (3) $a = \frac{300}{7}$

【解析】

【分析】(1) 根据题目列函数表达式即可；

(2) 根据给出的每分钟向甲注水 50m^3 ，可计算出甲 36 分钟先注满，乙需要 54 分钟，所以在甲注满后，乙的注水速度将改变；

(3) 根据甲注水的时间=乙注水的时间（乙多注水三分钟的量减掉）列分式方程，从而求得结果.

【小问 1 详解】

解：由题意可得：若每分钟向甲注水 40m^3 ，则每分钟向乙注水 60m^3 ， $\frac{3000-1200}{40} = \frac{3000-300}{60} = 45$ ，

两个水池同时注满. $y_1 = 1200 + 40x(0 \leq x \leq 45)$ ， $y_2 = 300 + 60x(0 \leq x \leq 45)$

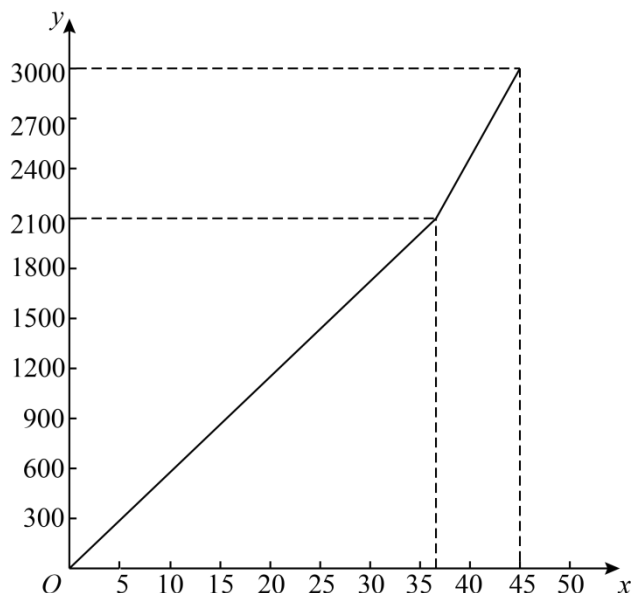
【小问 2 详解】

解：若每分钟向甲注水 50m^3 ，则每分钟向乙注水 50m^3 ，

$\frac{3000-1200}{50} = 36 < \frac{3000-300}{50}$ ，所以此种情况，甲先注满，然后单独向乙注水，

$$y_2 = \begin{cases} 300 + 50x(0 \leq x \leq 36) \\ 100x - 1500(36 < x \leq 45) \end{cases}$$

图像如图所示：



【小问 3 详解】

解：由于甲比乙提前 3 min 注满，所以后 3 min，乙每分钟注入 100m^3 ，所以在甲注满时，乙只注入到

$$2700\text{m}^3, \text{ 所以 } \frac{3000 - 1200}{a} = \frac{2700 - 300}{100 - a},$$

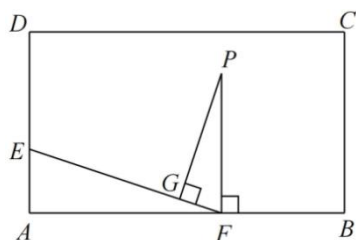
$$\text{解得 } a = \frac{300}{7},$$

经检验， $a = \frac{300}{7}$ 符合题意，是方程的解，

$$\text{所以 } a = \frac{300}{7}.$$

【点睛】 本题考查一次函数的应用，一次函数的图像、分式方程等，通过给定的条件列出一一次函数，通过给定的点来列出对应的函数图像.

26. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 10$ ， $BC = 6$ ， E 是 AD 上一点， $AE = 2$ ， F 是 AB 上的动点，连接 EF ， G 是 EF 上一点，且 $\frac{GF}{EF} = k$ (k 为常数， $k \neq 0$)，分别过点 F 、 G 作 AB 、 EF 的垂线相交于点 P ，设 AF 的长为 x ， PF 的长为 y .



(1) 若 $k = \frac{1}{2}$ ， $x = 4$ ，则 y 的值为_____；

(2) 求 y 与 x 之间的函数表达式；

(3) 在点 F 从点 A 到点 B 的整个运动过程中，若线段 CD 上存在点 P ，则 k 的值应满足什么条件？直接写出 k 的取值范围.

【答案】 (1) 5 (2) $y = \frac{k}{2}x^2 + 2k$

(3) $\frac{3}{26} \leq k \leq 1$

【解析】

【分析】 (1) 根据 $\angle AEF = \angle PFG$ ，得 $\cos \angle PFG = \cos \angle AEF$ ，则 $\frac{AE}{EF} = \frac{FG}{PF}$ ，代入计算即可；

(2) 利用 $\triangle AEF \sim \triangle GFP$ ，得 $\frac{AE}{GF} = \frac{EF}{PF}$ ，再由 $\frac{GF}{EF} = k$ ，得 $GF = kEF$ ，即可证明结论；

(3) 根据点 P 在 CD 上，可得 $k = \frac{12}{x^2 + 4}$ ，再由点 G 在 EF 上，可得 $k \leq 1$ ，进而解决问题.

【小问 1 详解】

解： $\because EF \perp AD$ ，

$$\therefore \angle AFE = 90^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle AFP = 180^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel FP,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle PFG,$$

$$\because AE = 2, AF = x = 4,$$

$$\therefore EF = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\because k = \frac{1}{2},$$

$$\therefore FG = \frac{1}{2}EF = \sqrt{5},$$

$$\because \cos \angle PFG = \cos \angle AEF,$$

$$\therefore \frac{AE}{EF} = \frac{FG}{PF},$$

$$\therefore \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{PF},$$

$$\therefore PF = 5,$$

故答案为：5；

【小问 2 详解】

解： $\because \angle AFE + \angle GFP = 90^\circ$ ， $\angle AFE + \angle AEF = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle AEF = \angle GFP,$$

又 $\because \angle A = \angle PGF = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle GFP$,

$$\therefore \frac{AE}{GF} = \frac{EF}{PF},$$

在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中, $AE = 2$, $AF = x$,

$$\therefore EF = \sqrt{AE^2 + AF^2} = \sqrt{2^2 + x^2} = \sqrt{4 + x^2},$$

$$\text{又} \because \frac{GF}{EF} = k,$$

$$\therefore GF = kEF = k\sqrt{4 + x^2},$$

$$\therefore \frac{2}{k\sqrt{4 + x^2}} = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{y} \text{ 即 } y = \frac{k}{2}(x^2 + 4) = \frac{k}{2}x^2 + 2k;$$

【小问 3 详解】

解: 若点 P 在 CD 上, 则 $y = PF = BC = 6$,

$$\text{由 (2) 得 } k = \frac{2y}{x^2 + 4},$$

$$\therefore k = \frac{12}{x^2 + 4},$$

$\therefore$ 点 F 从点 A 到点 B 运动,

$$\therefore 0 \leq x \leq 10,$$

$$\therefore 4 \leq x^2 + 4 \leq 104,$$

$$\therefore \frac{3}{26} \leq \frac{12}{x^2 + 4} \leq 3 \text{ 即 } \frac{3}{26} \leq k \leq 3,$$

又 $\because G$ 是 EF 上一点,

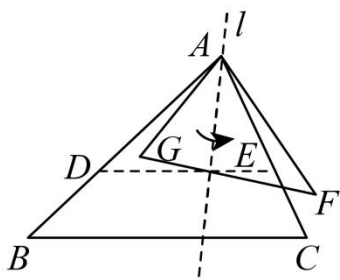
$$\therefore k \leq 1,$$

$$\therefore \frac{3}{26} \leq k \leq 1.$$

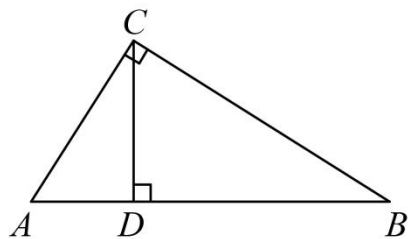
【点睛】本题是相似形综合题, 主要考查了相似三角形的判定与性质, 勾股定理, 三角函数等知识, 熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键.

27. 在平面内, 先将一个多边形以自身的一个顶点为位似中心放大或缩小, 再将所得多边形沿过该点的直线翻折, 我们称这种变换为自位似轴对称变换, 变换前后的图形成自位似轴对称.

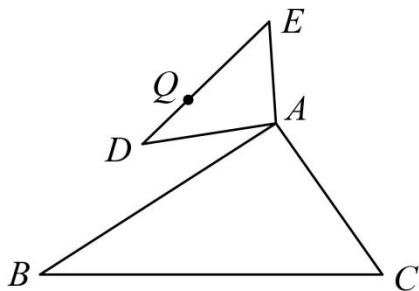
例如: 如图①, 先将 $\triangle ABC$ 以点 A 为位似中心缩小, 得到 $\triangle ADE$, 再将 $\triangle ADE$ 沿过点 A 的直线 l 翻折, 得到 $\triangle AFG$, 则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AFG$ 成自位似轴对称.



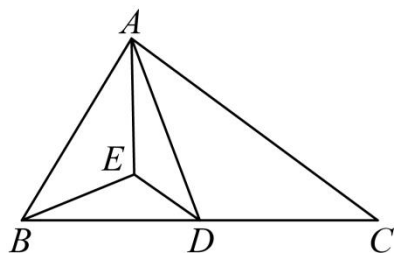
图①



图②



图③



图④

(1) 如图②，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC < BC$ ， $CD \perp AB$ ，垂足为 D ，下列 3 对三角形：① $\triangle ABC$ 与 $\triangle ACD$ ；② $\triangle BAC$ 与 $\triangle BCD$ ；③ $\triangle DAC$ 与 $\triangle DCB$ ．其中成自位似轴对称的是_____（填写所有符合条件的序号）；

(2) 如图③，已知 $\triangle ABC$ 经过自位似轴对称变换得到 $\triangle ADE$ ， Q 是 DE 上一点，用直尺和圆规作点 P ，使 P 与 Q 是该变换前后的对应点（保留作图痕迹，写出必要的文字说明）；

(3) 如图④，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 BC 的中点， E 是 $\triangle ABC$ 内一点， $\angle ABE = \angle C$ ， $\angle BAE = \angle CAD$ ，连接 DE ，求证： $DE \parallel AC$ ．

【答案】(1) ①② (2) 见解析

(3) 见解析

【解析】

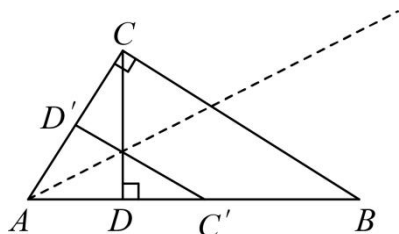
【分析】(1) 根据题中定义作出图形，即可得出结论；

(2) 先根据题意和轴对称性质作出 $\triangle ADE$ 轴对称前的 $\triangle AD'E'$ ，即 $\triangle ABC$ 以点 A 为位似中心缩小的 $\triangle AD'E'$ ，在 $D'E'$ 作出 Q 对应的 Q' ，进而作出点 Q' 对应的点 P 即可；

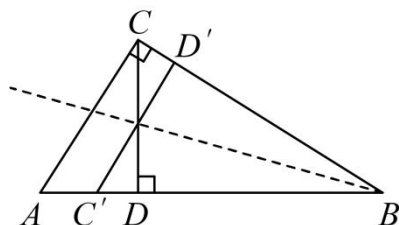
(3) 延长 BE 交 AC 于点 F ，证明 $\triangle ABE \sim \triangle ACD$ 和 $\triangle ABF \sim \triangle ACB$ 得到 $\frac{BE}{CD} = \frac{BF}{BC}$ ，进而得到 $\frac{BE}{BF} = \frac{BD}{BC}$ ，证明 $\triangle BDE \sim \triangle BCF$ 得到 $\angle BDE = \angle C$ ，利用平行线的判定即可得出结论．

【小问 1 详解】

解：① $\triangle ABC$ 与 $\triangle ACD$ 成自位似轴对称，对称轴为 $\angle BAC$ 的角平分线所在的直线，如图；



② $\triangle BAC$ 与 $\triangle BCD$ 成自位似轴对称，对称轴为 $\angle ABC$ 平分线所在的直线，如图，



③ $\triangle DAC$ 与 $\triangle DCB$ 不成自位似轴对称，

故答案为：①②；

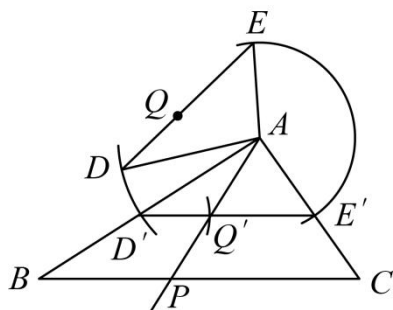
【小问 2 详解】

解：如图，

1) 分别在 AC 和 AB 上截取 $AE' = AE$ ， $AD' = AD$ ，

2) 连接 $D'E'$ ，在 $D'E'$ 上截取 $D'Q' = DQ$ ，

3) 连接 AQ' 并延长交 BC 于 P ，则点 P 即为所求；



【小问 3 详解】

证明：延长 BE 交 AC 于点 F ，

$$\therefore \angle ABE = \angle C, \angle BAE = \angle CAD,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD},$$

$$\therefore \angle BAF = \angle CAB,$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BF}{BC},$$

$$\therefore \frac{BE}{CD} = \frac{BF}{BC},$$

$\therefore D$ 是 BC 中点,

$$\therefore BD = CD,$$

$$\therefore \frac{BE}{BD} = \frac{BF}{BC},$$

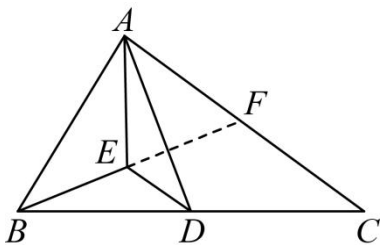
$$\therefore \frac{BE}{BF} = \frac{BD}{BC},$$

又 $\therefore \angle DBE = \angle CBF$,

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle BCF,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle C,$$

$$\therefore DE \parallel AC.$$



【点睛】本题考查位似和轴对称的性质、相似三角形的判定与性质，理解

题中所给定义，熟练掌握轴对称性质和相似三角形的判定与性质是解答的关键.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】