

2024 年广西初中学业水平考试

数学

(全卷满分 120 分，考试时间 120 分钟)

注意事项：

1. 答题前，考生务必将姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上。
2. 考生作答时，请在答题卡上作答（答题注意事项见答题卡），在本试卷、草稿纸上作答无效。
3. 不能使用计算器。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分。在每小题给出的四个选项中只有一项是符合要求的，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。）

1. 下列选项记录了我国四个直辖市某年一月份的平均气温，其中气温最低的是（ ）

A.	北京 -4.6℃	B.	上海 5.8℃	C.	天津 -3.2℃	D.	重庆 8.1℃
----	---	----	--	----	---	----	--

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了温度的比较以及正负数的概念，熟练掌握概念是解决本题的关键。0℃ 以下记为负数，0℃ 以上记为正数，温度都小于 0℃ 时，绝对值最大的，温度最低。

【详解】解：∵ $|-4.6| = 4.6$ ， $|-3.2| = 3.2$ ， $4.6 > 3.2$ ，

∴ $-4.6 < -3.2 < 5.8 < 8.1$ ，

∴ 气温最低的是北京。

故选：A。

2. 端午节是中国传统节日，下列与端午节有关的文创图案中，成轴对称的是（ ）

A.		B.		C.		D.	
----	---	----	---	----	---	----	---

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查成轴对称的定义，掌握成轴对称的定义是解题的关键。把一个图形沿着某一条直线折叠，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形关于这条直线对称，这条直线叫作对称轴，折叠后重合的点是对应点，叫作对称点。根据两个图形成轴对称的定义，逐一判断选项即可。

【详解】A. 不是轴对称图形，故不符合题意；

B. 是轴对称图形，故符合题意；

C. 不是轴对称图形，故不符合题意；

D. 不是轴对称图形，故不符合题意；

故你：B.

3. 广西壮族自治区统计局发布的数据显示，2023 年全区累计接待国内游客 8.49 亿人次，将 849000000 用科学记数法表示为（ ）

A. 0.849×10^9

B. 8.49×10^8

C. 84.9×10^7

D. 849×10^6

【答案】B

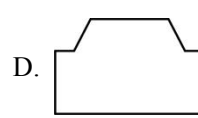
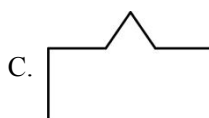
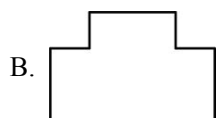
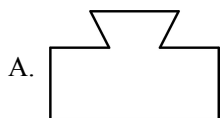
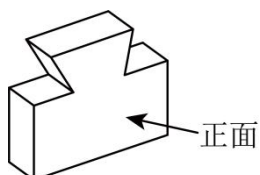
【解析】

【分析】本题考查科学记数法，根据科学记数法的表示方法： $a \times 10^n$ ($1 \leq |a| < 10$), n 为整数，进行表示即可.

【详解】解： $849000000 = 8.49 \times 10^8$ ；

故选 B.

4. 榫卯是我国传统建筑及家具的基本构件，燕尾榫是“万榫之母”，为了防止受拉力时脱开，榫头成梯台形，形似燕尾，如图是燕尾榫正面的带头部分，它的主视图是（ ）

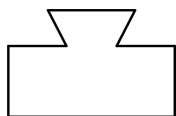


【答案】A

【解析】

【分析】本题考查三视图，根据主视图是从前往后看，得到的图形，进行判断即可.

【详解】解：由图可知：几何体的主视图为：



故选 A.

5. 不透明袋子中装有白球 2 个，红球 1 个，这些球除了颜色外无其他差别，从袋子中随机取出 1 个球，取

出白球的概率是 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】 D

【解析】

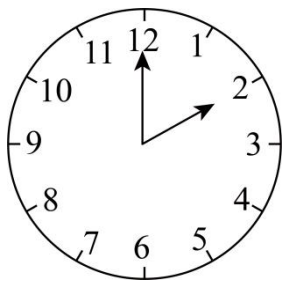
【分析】 本题考查求概率，直接利用概率公式进行计算即可.

【详解】 解：从袋子中随机取出 1 个球，有 $2+1=3$ 种等可能的结果，其中取出白球的情况有 2 种，

$$\therefore P = \frac{2}{3};$$

故选 D.

6. 如图，2 时整，钟表的时针和分针所成的锐角为 ()



- A. 20° B. 40° C. 60° D. 80°

【答案】 C

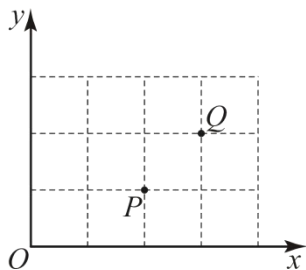
【解析】

【分析】 本题考查了钟面角，用 30° 乘以两针相距的份数是解题关键. 根据钟面的特点，钟面平均分成 12 份，每份是 30° ，根据时针与分针相距的份数，可得答案.

【详解】 解：2 时整，钟表的时针和分针所成的锐角是 $30^\circ \times 2 = 60^\circ$ ，

故选：C.

7. 如图，在平面直角坐标系中，点 O 为坐标原点，点 P 的坐标为 $(2,1)$ ，则点 Q 的坐标为 ()



- A. $(3,0)$ B. $(0,2)$ C. $(3,2)$ D. $(1,2)$

【答案】 C

【解析】

【分析】本题主要考查点的坐标，理解点的坐标意义是关键。根据点 P 的坐标可得出横、纵轴上一格代表一格单位长度，然后观察坐标系即可得出答案。

【详解】解：∵点 P 的坐标为 $(2,1)$ ，

∴点 Q 的坐标为 $(3,2)$ ，

故选：C。

8. 激光测距仪 L 发出的激光束以 $3 \times 10^5 \text{ km/s}$ 的速度射向目标 M ， ts 后测距仪 L 收到 M 反射回的激光束。则 L 到 M 的距离 $d \text{ km}$ 与时间 ts 的关系式为 ()

- A. $d = \frac{3 \times 10^5}{2} t$ B. $d = 3 \times 10^5 t$ C. $d = 2 \times 3 \times 10^5 t$ D. $d = 3 \times 10^6 t$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查列函数关系式，熟练掌握路程 = 速度 × 时间是解题的关键。根据路程 = 速度 × 时间列式即可。

【详解】解： $d = \frac{1}{2} \times 3 \times 10^5 \cdot t = \frac{3 \times 10^5}{2} t$ ，

故选：A。

9. 已知点 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上，若 $x_1 < 0 < x_2$ ，则有 ()

- A. $y_1 < 0 < y_2$ B. $y_2 < 0 < y_1$ C. $y_1 < y_2 < 0$ D. $0 < y_1 < y_2$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数的图象，熟练掌握反比例函数图象上点的坐标特征是解题的关键。根据点 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ 在反比例函数图象上，则满足关系式 $y = \frac{2}{x}$ ，横纵坐标的积等于 2，结合 $x_1 < 0 < x_2$ 即可得出答案。

【详解】解：∵点 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上，

∴ $x_1 y_1 = 2$ ， $x_2 y_2 = 2$ ，

∴ $x_1 < 0 < x_2$ ，

$$\therefore y_1 < 0, y_2 > 0,$$

$$\therefore y_1 < 0 < y_2.$$

故选：A.

10. 如果 $a+b=3$, $ab=1$, 那么 $a^3b+2a^2b^2+ab^3$ 的值为 ()

A. 0

B. 1

C. 4

D. 9

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查因式分解，代数式求值，先将多项式进行因式分解，利用整体代入法，求值即可.

【详解】解： $\because a+b=3, ab=1,$

$$\therefore a^3b+2a^2b^2+ab^3=ab(a^2+2ab+b^2)$$

$$=ab(a+b)^2$$

$$=1 \times 3^2$$

$$=9;$$

故选 D.

11. 《九章算术》是我国古代重要的数学著作，其中记载了一个问题，大致意思为：现有田出租，第一年 3 亩 1 钱，第二年 4 亩 1 钱，第三年 5 亩 1 钱. 三年共得 100 钱. 问：出租的田有多少亩？设出租的田有 x 亩，可列方程为 ()

A. $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 1$

B. $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 100$

C. $3x + 4x + 5x = 1$

D. $3x + 4x + 5x = 100$

【答案】B

【解析】

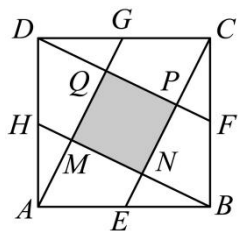
【分析】本题考查了一元一次方程的应用，根据“第一年 3 亩 1 钱，第二年 4 亩 1 钱，第三年 5 亩 1 钱. 三年共得 100 钱”列方程即可.

【详解】解：根据题意，得 $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 100,$

故选：B.

12. 如图，边长为 5 的正方形 $ABCD$ ， E, F, G, H 分别为各边中点，连接 AG, BH, CE, DF ，交

点分别为 M, N, P, Q ，那么四边形 $MNPQ$ 的面积为 ()



A. 1

B. 2

C. 5

D. 10

【答案】C

【解析】

【分析】先证明四边形 $AECG$ 是平行四边形，得出 $AG \parallel CE$ ，同理 $AF \parallel BH$ ，则可证四边形 $MNPQ$ 是平行四边形，利用平行线分线段成比例可得出 $DQ = PQ$ ， $AM = QM$ ，证明 $\triangle ADG \cong \triangle BAH$ (SAS) 得出 $\angle DAG = \angle ABH$ ，则可得出 $\angle QMN = \angle AMB = 90^\circ$ ，同理 $\angle AQD = 90^\circ$ ，得出平行四边形 $MNPQ$ 是矩形，证明 $\triangle ADQ \cong \triangle BAM$ (AAS)，得出 $DQ = AM$ ，进而得出 $DQ = AM = PQ = QM$ ，得出矩形 $MNPQ$ 是正方形，在 $\text{Rt}\triangle ADQ$ 中，利用勾股定理求出 $QM^2 = 5$ ，然后利用正方形的面积公式求解即可。

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB = BC = CD = DA$ ， $AB \parallel CD$ ， $AD \parallel BC$ ， $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = 90^\circ$ ，

$\because E, F, G, H$ 分别为各边中点，

$\therefore CG = DG = \frac{1}{2}CD = AH$ ， $AE = \frac{1}{2}AB$ ，

$\therefore DG = CG = AE$ ，

$\therefore$ 四边形 $AECG$ 是平行四边形，

$\therefore AG \parallel CE$ ，

同理 $DF \parallel BH$ ，

$\therefore$ 四边形 $MNPQ$ 是平行四边形，

$\because AG \parallel CE$ ，

$\therefore \frac{DQ}{PQ} = \frac{DG}{CG} = 1$ ，

$\therefore DQ = PQ$ ，

同理 $AM = QM$ ，

$\because DG = AH$ ， $\angle ADG = \angle BAH = 90^\circ$ ， $AD = BA$ ，

$$\therefore \triangle ADG \cong \triangle BAH \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle DAG = \angle ABH,$$

$$\because \angle DAG + \angle GAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABH + \angle GAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle QMN = \angle AMB = 90^\circ, \text{ 同理 } \angle AQD = 90^\circ,$$

$\therefore$ 平行四边形 $MNPQ$ 是矩形,

$$\because \angle AQD = \angle AMB = 90^\circ, \angle DAG = \angle ABH, AD = BA,$$

$$\therefore \triangle ADQ \cong \triangle BAM \text{ (AAS)},$$

$$\therefore DQ = AM,$$

$$\text{又 } DQ = PQ, AM = QM,$$

$$\therefore DQ = AM = PQ = QM,$$

$\therefore$ 矩形 $MNPQ$ 是正方形,

$$\text{在 Rt} \triangle ADQ \text{ 中, } AD^2 = DQ^2 + AQ^2,$$

$$\therefore 5^2 = QM^2 + (2QM)^2,$$

$$\therefore QM^2 = 5,$$

$\therefore$ 正方形 $MNPQ$ 的面积为 5,

故选: C.

【点睛】 本题考查了正方形的判定与性质, 全等三角形判定与性质, 平行线分线段成比例, 勾股定理等知识, 明确题意, 灵活运用相关知识求解是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 2 分, 共 12 分.)

13. 已知 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 为对顶角, $\angle 1 = 35^\circ$, 则 $\angle 2 = \underline{\quad\quad}^\circ$.

【答案】 35

【解析】

【分析】 本题主要考查了对顶角性质, 根据对顶角相等, 得出答案即可.

【详解】 解: $\because \angle 1$ 与 $\angle 2$ 为对顶角, $\angle 1 = 35^\circ$,

$$\therefore \angle 2 = \angle 1 = 35^\circ.$$

故答案为: 35.

14. 写一个比 $\sqrt{3}$ 大的整数是__.

【答案】 2(答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题考查实数大小比较，估算无理数的大小是解题的关键.

先估算出 $\sqrt{3}$ 的大小，再找出符合条件的整数即可.

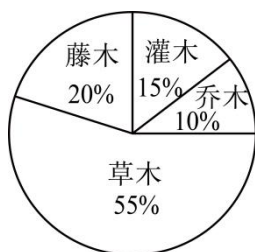
【详解】 解： $\because 1 < 3 < 4$,

$$\therefore 1 < \sqrt{3} < 2,$$

$\therefore$ 符合条件的数可以是：2(答案不唯一).

故答案为：2.

15. 八桂大地孕育了丰富的药用植物. 某县药材站把当地药市交易的400种药用植物按“草本、藤本、灌木、乔木”分为四类，绘制成如图所示的统计图，则藤本类有_____种.



【答案】 80

【解析】

【分析】 本题考查了扇形统计图，用400乘以藤本类的百分比即可求解，看懂统计图是解题的关键.

【详解】 解：由扇形统计图可得，藤本类有 $400 \times 20\% = 80$ 种，

故答案为：80.

16. 不等式 $7x + 5 < 5x + 1$ 的解集为_____.

【答案】 $x < -2$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次不等式，根据解一元一次不等式的步骤解答即可求解，掌握解一元一次不等式的步骤是解题的关键.

【详解】 解：移项得， $7x - 5x < 1 - 5$,

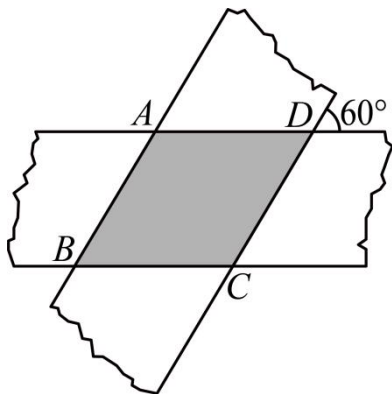
合并同类项得， $2x < -4$,

系数化为1得， $x < -2$,

故答案为： $x < -2$.

17. 如图，两张宽度均为3cm的纸条交叉叠放在一起，交叉形成的锐角为 60° ，则重合部分构成的四边形

$ABCD$ 的周长为 _____ cm.



【答案】 $8\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的判定，菱形的判定和性质，菱形的周长，过点 A 作 $AM \perp BC$ 于 M ， $AN \perp CD$ 于 N ，由题意易得四边形 $ABCD$ 是平行四边形，进而由平行四边形的面积可得 $AM = AN$ ，即可得到四边形 $ABCD$ 是菱形，再解 $\text{Rt}\triangle ADN$ 可得 $AD = \frac{AN}{\sin 60^\circ} = 2\sqrt{3}\text{cm}$ ，即可求解，得出四边形 $ABCD$ 是菱形是解题的关键.

【详解】 解：过点 A 作 $AM \perp BC$ 于 M ， $AN \perp CD$ 于 N ，则 $\angle AND = 90^\circ$ ，

$\because$ 两张纸条的对边平行，

$\therefore AB \parallel CD$ ， $AD \parallel BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

又 $\because$ 两张纸条的宽度相等，

$\therefore AM = AN$ ，

$\therefore S_{\square ABCD} = BC \cdot AM = CD \cdot AN$ ，

$\therefore BC = CD$ ，

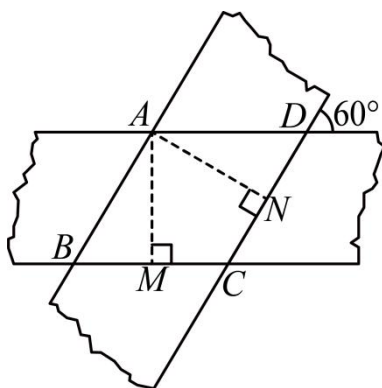
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

在 $\text{Rt}\triangle ADN$ 中， $\angle ADN = 60^\circ$ ， $AN = 3\text{cm}$ ，

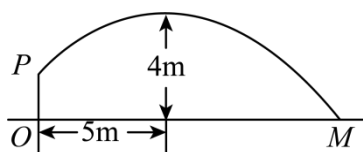
$$\therefore AD = \frac{AN}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}\text{cm}，$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的周长为 $2\sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3}\text{cm}$ ，

故答案为： $8\sqrt{3}$.



18. 如图，壮壮同学投掷实心球，出手（点 P 处）的高度 OP 是 $\frac{7}{4}\text{m}$ ，出手后实心球沿一段抛物线运行，到达最高点时，水平距离是 5m ，高度是 4m 。若实心球落地点为 M ，则 $OM = \underline{\hspace{2cm}}\text{m}$ 。



【答案】 $\frac{35}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查的是二次函数的实际应用，设抛物线为 $y = a(x-5)^2 + 4$ ，把点 $\left(0, \frac{7}{4}\right)$ ，代入即可求出解析式；当 $y = 0$ 时，求得 x 的值，即为实心球被推出的水平距离 OM 。

【详解】 解：以点 O 为坐标原点，射线 OM 方向为 x 轴正半轴，射线 OP 方向为 y 轴正半轴，建立平面直角坐标系，

$\therefore$ 出手后实心球沿一段抛物线运行，到达最高点时，水平距离是 5m ，高度是 4m 。

设抛物线解析式为： $y = a(x-5)^2 + 4$ ，

把点 $\left(0, \frac{7}{4}\right)$ 代入得： $25a + 4 = \frac{7}{4}$ ，

解得： $a = -\frac{9}{100}$ ，

$\therefore$ 抛物线解析式为： $y = -\frac{9}{100}(x-5)^2 + 4$ ；

当 $y = 0$ 时， $-\frac{9}{100}(x-5)^2 + 4 = 0$ ，

解得， $x_1 = -\frac{5}{3}$ （舍去）， $x_2 = \frac{35}{3}$ ，

即此次实心球被推出的水平距离 OM 为 $\frac{35}{3}\text{m}$ 。

故答案为： $\frac{35}{3}$

三、解答题（本大题共 8 小题，共 72 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

19. 计算： $(-3) \times 4 + (-2)^2$

【答案】 -8

【解析】

【分析】 本题主要考查了有理数的混合运算. 先算乘法和乘方，再算加法即可.

【详解】 解： 原式 $= -12 + 4$
 $= -8$.

20. 解方程组： $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查的是二元一次方程组的解法，直接利用加减消元法解方程组即可.

【详解】 解： $\begin{cases} x + 2y = 3 \text{①} \\ x - 2y = 1 \text{②} \end{cases}$,

① + ② 得： $2x = 4$,

解得： $x = 2$,

把 $x = 2$ 代入①得：

$$y = \frac{1}{2},$$

∴ 方程组的解为： $\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$.

21. 某中学为了解七年级女同学定点投篮水平，从中随机抽取 20 名女同学进行测试，每人定点投篮 5 次，进球数统计如下表：

进球数	0	1	2	3	4	5
人数	1	8	6	3	1	1

- (1) 求被抽取的 20 名女同学进球数的众数、中位数、平均数；
- (2) 若进球数为 3 以上（含 3）为“优秀”，七年级共有 200 名女同学，请估计七年级女同学中定点投篮水平为“优秀”的人数.

【答案】 (1) 众数为 1、中位数为 2、平均数为 1.9

(2) 估计为“优秀”等级的女生约为 50 人

【解析】

【分析】 (1) 根据平均数、中位数、众数的定义求解即可；

(2) 算出样本的优秀率，再估计总体的优秀人数.

【小问 1 详解】

解：女生进球数的平均数为 $\frac{1}{20} \times (0 \times 1 + 1 \times 8 + 2 \times 6 + 3 \times 3 + 4 \times 1 + 5 \times 1) = 1.9$ (个),

女生进球数的中位数是第 10 个和第 11 个成绩的平均数，即 $\frac{2+2}{2} = 2$ (个),

女生进球个数为 1 个的人最多，故众数是 1 个；

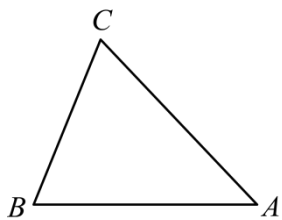
【小问 2 详解】

解： $200 \times \frac{3+1+1}{20} = 50$ (人),

答：估计为“优秀”等级的女生约为 50 人.

【点睛】 本题考查了中位数，众数，平均数，用样本估计总体，掌握中位数，平均数、众数的定义以及优秀率的求法是解题的关键.

22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 45^\circ$ ， $AC > BC$.



(1) 尺规作图：作线段 AB 的垂直平分线 l ，分别交 AB ， AC 于点 D ， E ：（要求：保留作图痕迹，不写作法，标明字母）

(2) 在 (1) 所作的图中，连接 BE ，若 $AB = 8$ ，求 BE 的长.

【答案】 (1) 见详解 (2) $4\sqrt{2}$

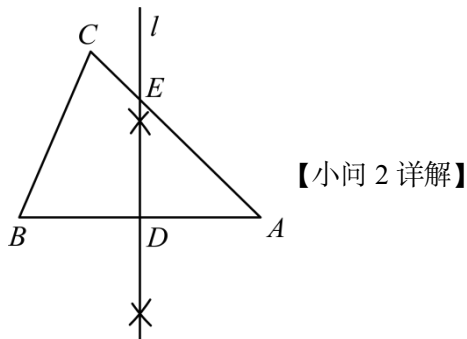
【解析】

【分析】 (1) 分别以 A 、 B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 为半径画弧，分别交 AB ， AC 于点 D ， E ，作直线 DE ，则直线 l 即为所求.

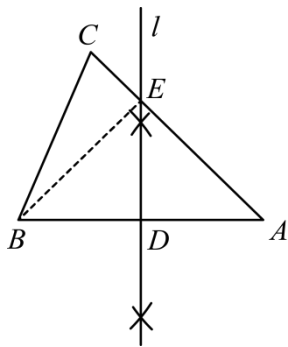
(2) 连接 BE ，由线段垂直平分线的性质可得出 $BE = AE$ ，由等边对等角可得出 $\angle EBA = \angle A = 45^\circ$ ，由三角形内角和得出 $\angle BEA = 90^\circ$ ，则得出 $\triangle ABE$ 为等腰直角三角形，再根据正弦的定义即可求出 BE 的长.

【小问 1 详解】

解：如下直线 l 即为所求.



连接 BE 如下图：



$\because DE$ 为线段 AB 的垂直平分线，

$\therefore BE = AE$ ，

$\therefore \angle EBA = \angle A = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle BEA = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABE$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore \sin A = \frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore BE = AB \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

【点睛】 本题主要考查了作线段的垂线平分线，线段的垂线平分线的性质，等腰三角形的性质，三角形内角和定理以及正弦的定义．掌握线段的垂直平分线的性质是解题的关键．

23. 综合与实践

在综合与实践课上，数学兴趣小组通过洗一套夏季校服，探索清洗衣物的节约用水策略．

【洗衣过程】

步骤一：将校服放进清水中，加入洗衣液，充分浸泡揉搓后拧干；

步骤二：将拧干后的校服放进清水中，充分漂洗后拧干。重复操作步骤二，直至校服上残留洗衣液浓度达到洗衣目标。

假设第一次漂洗前校服上残留洗衣液浓度为 0.2%，每次拧干后校服上都残留 0.5kg 水。

浓度关系式： $d_{\text{后}} = \frac{0.5d_{\text{前}}}{0.5 + w}$ ，其中 $d_{\text{前}}$ 、 $d_{\text{后}}$ 分别为单次漂洗前、后校服上残留洗衣液浓度； w 为单次漂洗

所加清水量（单位：kg）

【洗衣目标】 经过漂洗使校服上残留洗衣液浓度不高于 0.01%

【动手操作】 请按要求完成下列任务：

- (1) 如果只经过一次漂洗，使校服上残留洗衣液浓度降为 0.01%，需要多少清水？
- (2) 如果把 4kg 清水均分，进行两次漂洗，是否能达到洗衣目标？
- (3) 比较 (1) 和 (2) 的漂洗结果，从洗衣用水策略方面，说说你的想法。

【答案】 (1) 只经过一次漂洗，使校服上残留洗衣液浓度降为 0.01%，需要 9.5kg 清水。

- (2) 进行两次漂洗，能达到洗衣目标；
- (3) 两次漂洗的方法值得推广学习

【解析】

【分析】 本题考查的是分式方程的实际应用，求解代数式的值，理解题意是关键；

(1) 把 $d_{\text{后}} = 0.01\%$ ， $d_{\text{前}} = 0.2\%$ 代入 $d_{\text{后}} = \frac{0.5d_{\text{前}}}{0.5 + w}$ ，再解方程即可；

(2) 分别计算两次漂洗后的残留洗衣液浓度，即可得到答案；

(3) 根据 (1) (2) 的结果得出结论即可。

【小问 1 详解】

解：把 $d_{\text{后}} = 0.01\%$ ， $d_{\text{前}} = 0.2\%$ 代入 $d_{\text{后}} = \frac{0.5d_{\text{前}}}{0.5 + w}$

得 $0.01\% = \frac{0.5 \times 0.2\%}{0.5 + w}$ ，

解得 $w = 9.5$ 。经检验符合题意；

∴ 只经过一次漂洗，使校服上残留洗衣液浓度降为 0.01%，需要 9.5kg 清水。

【小问 2 详解】

解：第一次漂洗：

把 $w = 2\text{kg}$, $d_{\text{前}} = 0.2\%$ 代入 $d_{\text{后}} = \frac{0.5d_{\text{前}}}{0.5 + w}$,

$$\therefore d_{\text{后}} = \frac{0.5 \times 0.2\%}{0.5 + 2} = 0.04\%,$$

第二次漂洗:

把 $w = 2\text{kg}$, $d_{\text{前}} = 0.04\%$ 代入 $d_{\text{后}} = \frac{0.5d_{\text{前}}}{0.5 + w}$,

$$\therefore d_{\text{后}} = \frac{0.5 \times 0.04\%}{0.5 + 2} = 0.008\%,$$

而 $0.008\% < 0.01\%$,

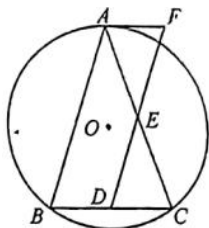
$\therefore$ 进行两次漂洗, 能达到洗衣目标;

【小问3 详解】

解: 由 (1) (2) 的计算结果发现: 经过两次漂洗既能达到洗衣目标, 还能大幅度节约用水,

$\therefore$ 从洗衣用水策略方面来讲, 采用两次漂洗的方法值得推广学习.

24. 如图, 已知 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, $AB = AC$. 点 D, E 分别是 BC, AC 的中点, 连接 DE 并延长至点 F , 使 $DE = EF$, 连接 AF .



(1) 求证: 四边形 $ABDF$ 是平行四边形;

(2) 求证: AF 与 $\odot O$ 相切;

(3) 若 $\tan \angle BAC = \frac{3}{4}$, $BC = 12$, 求 $\odot O$ 的半径.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析 (3) 10

【解析】

【分析】(1) 先证明 $BD = CD$, $DE = EF$, 再证明 $\triangle AEF \cong \triangle CED$, 可得 $AF = CD$, $\angle F = \angle EDC$, 再进一步解答即可;

(2) 如图, 连接 AD , 证明 $AD \perp BC$, 可得 AD 过圆心, 结合 $AF \parallel BD$, 证明 $AF \perp AD$, 从而可得结论;

(3) 如图, 过 B 作 $BQ \perp AC$ 于 Q , 连接 OB , 设 $BQ = 3x$, 则 $AQ = 4x$, 可得 $CQ = AC - AQ = x$, 求

解 $x = \frac{12}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$, 可得 $AB = 5x = 6\sqrt{10}$, 求解 $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 18$, 设 $\odot O$ 半径为 r , 可得

$OD = 18 - r$, 再利用勾股定理求解即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 点 D, E 分别是 BC, AC 的中点,

$\therefore BD = CD, AE = CE,$

又 $\because \angle AEF = \angle CED, DE = EF,$

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle CED,$

$\therefore AF = CD, \angle F = \angle EDC,$

$\therefore AF = BD, AF \parallel BD,$

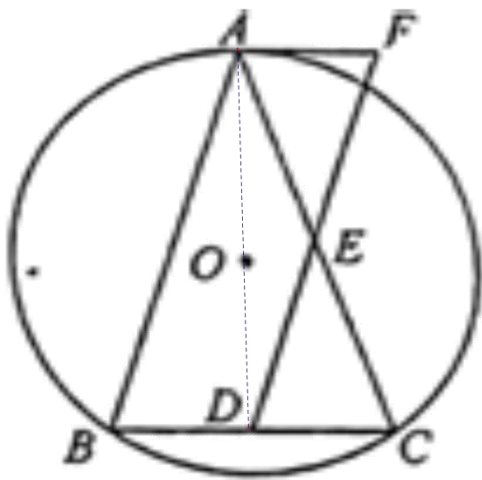
$\therefore$ 四边形 $ABDF$ 是平行四边形;

【小问 2 详解】

证明: 如图, 连接 AD ,

$\because AB = AC, D$ 为 BC 中点,

$\therefore AD \perp BC,$



$\therefore AD$ 过圆心,

$\because AF \parallel BD,$

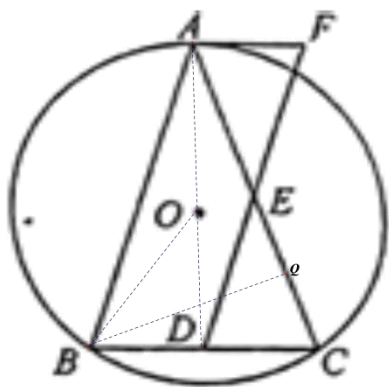
$\therefore AF \perp AD,$

而 OA 为半径,

$\therefore AF$ 为 $\odot O$ 的切线;

【小问 3 详解】

解: 如图, 过 B 作 $BQ \perp AC$ 于 Q , 连接 OB ,



$$\therefore \tan \angle BAC = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{BQ}{AQ} = \frac{3}{4},$$

设 $BQ = 3x$ ，则 $AQ = 4x$ ，

$$\therefore AC = AB = \sqrt{AQ^2 + BQ^2} = 5x,$$

$$\therefore CQ = AC - AQ = x,$$

$$\therefore BC = \sqrt{BQ^2 + CQ^2} = \sqrt{10}x,$$

$$\therefore \sqrt{10}x = 12 ,$$

$$\therefore x = \frac{12}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{5},$$

$$\therefore AB = 5x = 6\sqrt{10},$$

$$\because AB = AC, \quad BC = 12, \quad AD \perp BC,$$

$$\therefore BD = CD = 6,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 18,$$

设 $\odot O$ 半径为 r ,

$$\therefore OD = 18 - r,$$

$$\therefore r^2 = (18 - r)^2 + 6^2,$$

解得: $r = 10$,

$\therefore \odot O$ 的半径为 10.

【点睛】本题考查的是全等三角形的判定与性质，等腰三角形的性质，勾股定理的应用，平行四边形的判定与性质，切线的判定，垂径定理的应用，做出合适的辅助线是解本题的关键.

25. 课堂上，数学老师组织同学们围绕关于 x 的二次函数 $y = x^2 + 2ax + a - 3$ 的最值问题展开探究.

【经典回顾】二次函数求最值的方法.

(1) 老师给出 $a = -4$ ，求二次函数 $y = x^2 + 2ax + a - 3$ 的最小值.

①请你写出对应的函数解析式；

②求当 x 取何值时，函数 y 有最小值，并写出此时的 y 值；

【举一反三】老师给出更多 a 的值，同学们即求出对应的函数在 x 取何值时， y 的最小值. 记录结果，并整理成下表：

a	...	-4	-2	0	2	4	...
x	...	*	2	0	-4	-2	...
y 的最小值	...	*	-9	-3	-5	-15	...

注：*为②的计算结果.

【探究发现】老师：“请同学们结合学过的函数知识，观察表格，谈谈你的发现.”

甲同学：“我发现，老师给了 a 值后，我们只要取 $x = -a$ ，就能得到 y 的最小值.”

乙同学：“我发现， y 的最小值随 a 值的变化而变化，当 a 由小变大时， y 的最小值先增大后减小，所以我猜想 y 的最小值中存在最大值.”

(2) 请结合函数解析式 $y = x^2 + 2ax + a - 3$ ，解释甲同学的说法是否合理？

(3) 你认为乙同学的猜想是否正确？若正确，请求出此最大值；若不正确，说明理由.

【答案】(1) ① $y = x^2 - 8x - 7$ ；②当 $x = 4$ 时， y 有最小值为 -23 (2) 见解析 (3) 正确， $-\frac{11}{4}$

【解析】

【分析】本题考查二次函数的图象和性质，熟练掌握二次函数的图象和性质，是解题的关键：

(1) ①把 $a = -4$ 代入解析式，写出函数解析式即可；②将一般式转化为顶点式，进行求解即可；

(2) 将一般式转化为顶点式，根据二次函数的性质进行解释即可；

(3) 将一般式转化为顶点式，表示出 y 的最大值，再利用二次函数求最值即可.

【详解】解：(1) ①把 $a = -4$ 代入 $y = x^2 + 2ax + a - 3$ ，得：

$$y = x^2 + 2 \cdot (-4)x + (-4) - 3 = x^2 - 8x - 7;$$

$$\therefore y = x^2 - 8x - 7;$$

$$\textcircled{2} \because y = x^2 - 8x - 7 = (x-4)^2 - 23,$$

$\therefore$ 当 $x=4$ 时, y 有最小值为 -23 ;

$$(2) \because y = x^2 + 2ax + a - 3 = (x+a)^2 - a^2 + a - 3,$$

$\therefore$ 抛物线的开口向上,

$\therefore$ 当 $x=-a$ 时, y 有最小值;

$\therefore$ 甲的说法合理;

(3) 正确;

$$\because y = x^2 + 2ax + a - 3 = (x+a)^2 - a^2 + a - 3,$$

$\therefore$ 当 $x=-a$ 时, y 有最小值为 $-a^2 + a - 3$,

$$\text{即: } y_{\min} = -a^2 + a - 3 = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{11}{4},$$

$\therefore$ 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $y_{\min}$ 有最大值, 为 $-\frac{11}{4}$.

26. 如图 1, $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 6$. AC 的垂直平分线分别交 AC , AB 于点 M , O , CO 平分 $\angle ACB$.

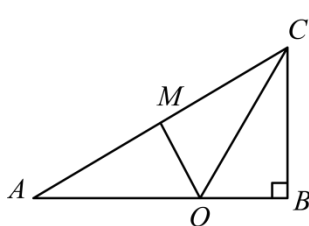


图1

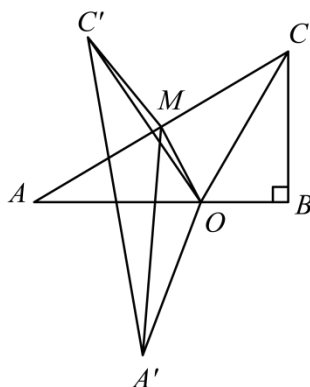


图2

(1) 求证: $\triangle ABC \sim \triangle CBO$;

(2) 如图 2, 将 $\triangle AOC$ 绕点 O 逆时针旋转得到 $\triangle A'OC'$, 旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$). 连接 $A'M$, $C'M$

①求 $\triangle A'MC'$ 面积的最大值及此时旋转角 α 的度数, 并说明理由;

②当 $\triangle A'MC'$ 是直角三角形时, 请直接写出旋转角 α 的度数.

【答案】(1) 见解析 (2) ① $8\sqrt{3}$, $\alpha = 180^\circ$; ② 120° 或 240°

【解析】

【分析】(1) 利用线段垂直平分线的性质得出 $OA = OC$, 利用等边对等角得出 $\angle A = \angle ACO$, 结合角平分

线定义可得出 $\angle A = \angle ACO = \angle OCB$ ，最后根据相似三角形的判定即可得证；

(2) 先求出 $\angle A = \angle ACO = \angle OCB = 30^\circ$ ，然后利用含 30° 的直角三角形性质求出 $BO = 2$ ， $AO = 4$ ， $MO = 2$ ，利用勾股定理求出 $AM = 2\sqrt{3}$ ， $AC = 4\sqrt{3}$ ，取 $A'C'$ 中点 M' ，连接 OM' ， MM' ，作 $MN \perp A'C'$ 于 N ，由旋转的性质知 $\triangle AOC \cong \triangle A'OC'$ ， OM' 为 OM 旋转 α 所得线段，则 $OM' \perp A'C'$ ， $A'C' = AC = 4\sqrt{3}$ ， $OM' = OM = 2$ ，根据点到直线的距离，垂线段最短知 $MN \leq MM'$ ，三角形三边关系得出 $MN \leq OM + OM'$ ，故当 M 、 O 、 M' 三点共线，且点 O 在线段 MM' 时， MN 取最大值，最大值为 $2 + 2 = 4$ ，此时 $\alpha = 180^\circ$ ，最后根据三角形面积公式求解即可；

②先利用三角形三边关系判断出 $MC' < A'C'$ ， $MA' < A'C'$ ，则当 $\triangle A'MC'$ 为直角三角形时，只有 $\angle A'MC' = 90^\circ$ ，然后分 A 和 C' 重合， A' 和 C 重合，两种情况讨论即可。

【小问 1 详解】

证明： $\because MO$ 垂直平分 AC ，

$$\therefore OA = OC,$$

$$\therefore \angle A = \angle ACO,$$

$$\because CO \text{ 平分 } \angle ACB$$

$$\therefore \angle ACO = \angle OCB,$$

$$\therefore \angle A = \angle OCB,$$

$$\text{又 } \angle B = \angle B;$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle CBO;$$

【小问 2 详解】

解：① $\because \angle B = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle A + \angle ACO + \angle OCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle ACO = \angle OCB = 30^\circ,$$

$$\therefore BO = \frac{1}{2}CO = \frac{1}{2}AO,$$

$$\text{又 } AB = AO + BO = 6,$$

$$\therefore BO = 2, \quad AO = 4,$$

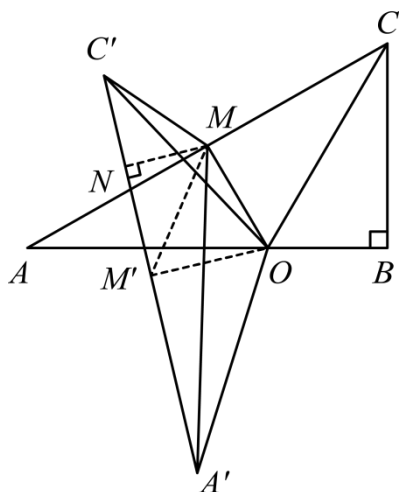
$$\because MO \text{ 垂直平分 } AC,$$

$$\therefore OM = \frac{1}{2}AO = 2, \quad AC = 2AM,$$

$$\therefore AM = \sqrt{AO^2 - MO^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AC = 4\sqrt{3},$$

取 $A'C'$ 中点 M' ，连接 OM' ， MM' ，作 $MN \perp A'C'$ 于 N ，



由旋转的性质知 $\triangle AOC \cong \triangle A'OC'$ ， OM' 为 OM 旋转 α 所得线段，

$$\therefore OM' \perp A'C', \quad A'C' = AC = 4\sqrt{3}, \quad OM' = OM = 2,$$

根据垂线段最短知 $MN \leq MM'$ ，

$$\text{又 } MM' \leq OM + OM',$$

$\therefore$ 当 M 、 O 、 M' 三点共线，且点 O 在线段 MM' 时， MN 取最大值，最大值为 $2 + 2 = 4$ ，

此时 $\alpha = 180^\circ$ ，

$$\therefore \triangle A'MC' \text{ 面积的最大值为 } \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3};$$

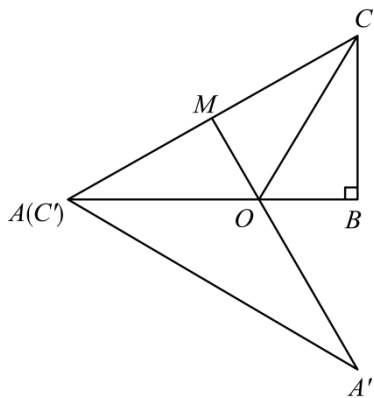
$$\textcircled{2} \because MC' \leq MO + OC' = 2 + 4 = 6, \quad 4\sqrt{3} = A'C',$$

$$\therefore MC' < A'C',$$

同理 $MA' < A'C'$

$\therefore \triangle A'MC'$ 为直角三角形时，只有 $\angle A'MC' = 90^\circ$ ，

当 A 和 C' 重合时，如图，



$$\because \triangle AOC \cong \triangle A'OA$$

$$\therefore \angle A' = \angle CAO = 30^\circ, \quad \angle OAA' = \angle OCA = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle A'OA = 120^\circ,$$

$$\because \angle AMO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOM = 60^\circ,$$

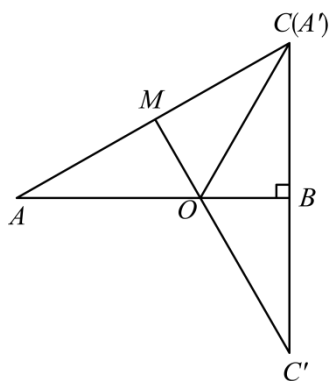
$$\therefore \angle A'OA + \angle AOM = 180^\circ,$$

$\therefore A'、O、M$ 三点共线,

$\therefore \triangle A'MC'$ 为直角三角形,

此时旋转角 $\alpha = \angle A'OA = 120^\circ$;

当 A' 和 C 重合时, 如图,



同理 $\angle OCC' = \angle CAO = 30^\circ$, $\angle C' = \angle OCA = 30^\circ$,

$$\therefore \angle COC' = 120^\circ,$$

$$\because AO = CO, \angle AOM = 60^\circ$$

$$\therefore \angle COM = \angle AOM = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle COM + \angle COC' = 180^\circ,$$

$\therefore C'、O、M$ 三点共线,

又 $\angle AMO = 90^\circ$

$\therefore \triangle A'MC'$ 为直角三角形,

此时旋转角 $\alpha = 360^\circ - \angle A'OA = 240^\circ$;

综上, 旋转角 α 的度数为 120° 或 240° 时, $\triangle A'MC'$ 为直角三角形.

【点睛】 本题考查了线段垂直平分线的性质, 含 30° 的直角三角形的性质, 勾股定理, 旋转的性质等知识, 明确题意, 正确画出图形, 添加辅助线, 合理分类讨论是解题的关键.