

菏泽市二〇二二年初中学业水平考试（中考）数学试题

注意事项:

1. 本试题共 24 道题，满分 120 分，考试时间 120 分钟.
2. 请把答案写在答题卡上，选择题用 2B 铅笔填涂，非选择题用 0.5 毫米黑色签字笔书写在答题卡的指定区域内，写在其他区域不得分.

一、选择题（本大题共 8 个小题，每小题 3 分，共 24 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的，请把正确选项的序号涂在答题卡的相应位置.）

1. 2022 的相反数是（ ）

- A. 2022 B. -2022 C. $\frac{1}{2022}$ D. $-\frac{1}{2022}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据相反数的定义直接求解.

【详解】解：实数 2022 的相反数是 -2022，

故选：B.

【点睛】本题主要考查相反数的定义，解题的关键是熟练掌握相反数的定义.

2. 2022 年 3 月 11 日，新华社发文总结 2021 年中国取得的科技成就. 主要包括：北斗全球卫星导航系统平均精度 2~3 米；中国高铁运营里程超 40000000 米；“奋斗者”号载人潜水器最深下潜至 10909 米；中国嫦娥五号带回月壤重量 1731 克. 其中数据 40000000 用科学记数法表示为（ ）

- A. 0.4×10^8 B. 4×10^7 C. 4.0×10^8 D. 4×10^6

【答案】B

【解析】

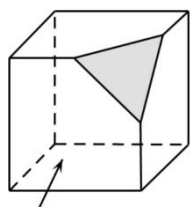
【分析】把比较大的数写成 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq a < 10$ ， n 为正整数即可得出答案.

【详解】解：40000000 = 4×10^7 ，

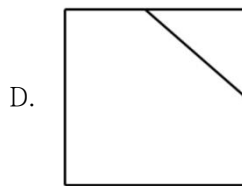
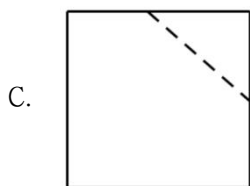
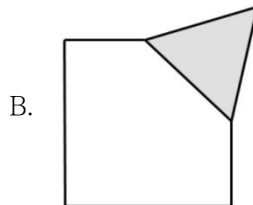
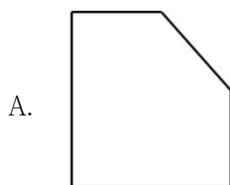
故选：B.

【点睛】本题考查了科学记数法表示较大的数，掌握 10 的指数比原来的整数位数少 1 是解题的关键.

3. 沿正方体相邻的三条棱的中点截掉一个角，得到如图所示的几何体，则他的主视图是（ ）



主视方向



【答案】D

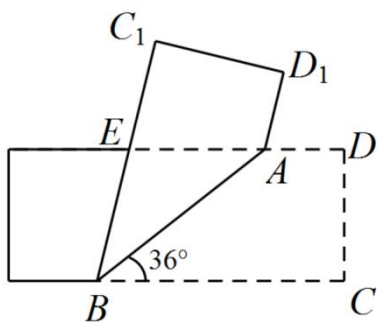
【解析】

【分析】找到从正面看所得到的图形即可，注意所有的看到的和看不到的棱都应表现在图中.

【详解】解：从几何体的正面看可得到一个正方形，正方形的右上角处有一个看得见的小三角形画为实线，故选：D.

【点睛】本题考查了三视图的知识，主视图是从物体的正面看得到的视图；注意看到的用实线表示，看不到的用虚线表示.

4. 如图所示，将一矩形纸片沿 AB 折叠，已知 $\angle ABC = 36^\circ$ ，则 $\angle D_1AD = (\quad)$



A. 48°

B. 66°

C. 72°

D. 78°

【答案】C

【解析】

【分析】由折叠及矩形的性质可得 $AD \parallel BC$, $\angle DAB = \angle D_1AB$ ，再根据平行线的性质求出

$\angle DAB = 144^\circ = \angle D_1AB$ ，根据周角的定义求解即可.

【详解】 $\because$ 将一矩形纸片沿 AB 折叠，

$\therefore AD \parallel BC, \angle DAB = \angle D_1AB$ ，

$\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = 36^\circ$ ，

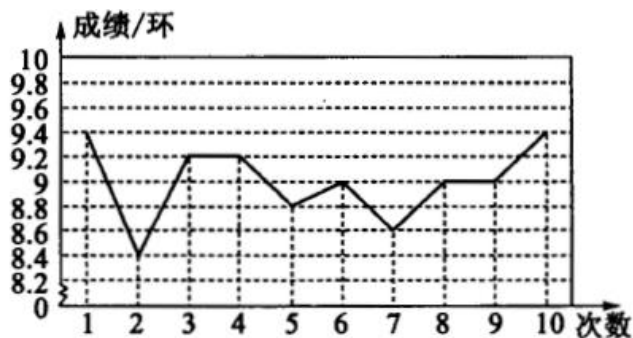
$\therefore \angle DAB = 144^\circ = \angle D_1AB$ ，

$\therefore \angle D_1AD = 360^\circ - 144^\circ - 144^\circ = 72^\circ$ ，

故选：C.

【点睛】本题考查了矩形的性质，折叠的性质及平行线的性质，熟练掌握知识点是解题的关键.

5. 射击比赛中，某队员的 10 次射击成绩如图所示，则下列结论错误的是（ ）



A. 平均数是 9 环

B. 中位数是 9 环

C. 众数是 9 环

D. 方差是 0.8

【答案】D

【解析】

【分析】分别求出平均数，中位数，众数以及方差即可求解

【详解】解：根据题意得：10 次射击成绩从小到大排列为 8.4，8.6，8.8，9，9，9，9.2，9.2，9.4，9.4，

A、平均数是 $\frac{1}{10}(9.4+8.4+9.2+9.2+8.8+9+8.6+9+9+9.4) = 9$ 环，故本选项正确，不符合题意；

B、中位数是 $\frac{9+9}{2} = 9$ 环，故本选项正确，不符合题意；

C、9 出现的次数最多，则众数是 9 环，故本选项正确，不符合题意；

D、方差是

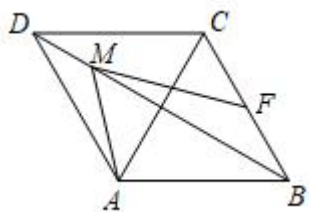
$$\frac{1}{10}[(9.4-9)^2 + (8.4-9)^2 + (9.2-9)^2 + (9.2-9)^2 + (8.8-9)^2 + (9-9)^2 + (9-9)^2 + (9-9)^2 + (9.2-9)^2 + (9.2-9)^2 + (9.4-9)^2 + (9.4-9)^2]$$

，故本选项错误，符合题意；

故选：D

【点睛】 本题考查了折线统计图，平均数，中位数，众数以及方差，解答本题的关键是掌握相关统计量的求法.

6. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = 2, \angle ABC = 60^\circ$, M 是对角线 BD 上的一个动点, $CF = BF$, 则 $MA + MF$ 的最小值为 ()



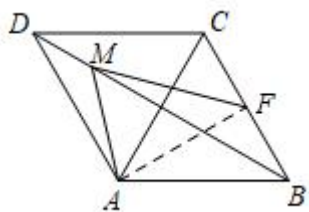
- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

【答案】 C

【解析】

【分析】 连接 AF , 则 AF 的长就是 $AM + FM$ 的最小值, 证明 $\triangle ABC$ 是等边三角形, AF 是高线, 利用三角函数即可求解.

【详解】 解: 连接 AF , 则 AF 的长就是 $AM + FM$ 的最小值.



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AB = BC$,

又 $\because \angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\because CF = BF$

$\therefore F$ 是 BC 的中点,

$\therefore AF \perp BC$.

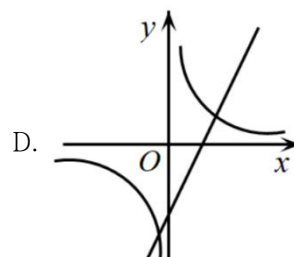
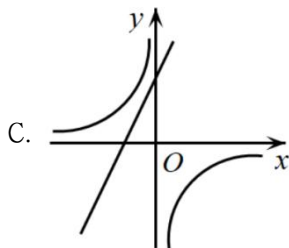
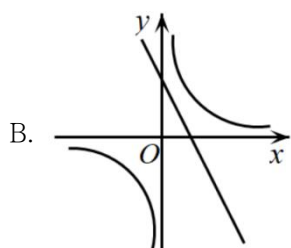
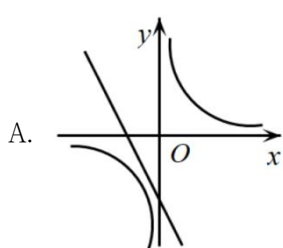
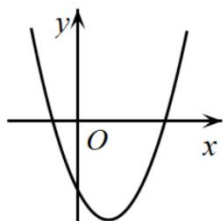
则 $AF = AB \cdot \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

即 $MA + MF$ 的最小值是 $\sqrt{3}$.

故选: C

【点睛】本题考查了菱形的性质, 等边三角形以及三角函数, 确定 AF 的长就是 $MA + MF$ 的最小值是关键.

7. 根据如图所示的二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象, 判断反比例函数 $y = \frac{a}{x}$ 与一次函数 $y = bx + c$ 的图象大致是 ()



【答案】A

【解析】

【分析】先根据二次函数的图象, 确定 a 、 b 、 c 的符号, 再根据 a 、 b 、 c 的符号判断反比例函数 $y = \frac{a}{x}$ 与一次函数 $y = bx + c$ 的图象经过的象限即可.

【详解】解: 由二次函数图象可知 $a > 0$, $c < 0$,

由对称轴 $x = -\frac{b}{2a} > 0$, 可知 $b < 0$,

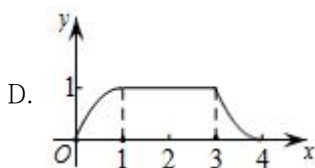
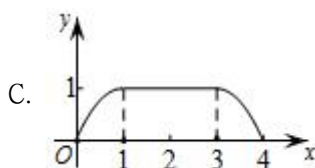
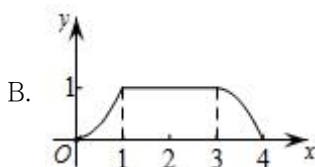
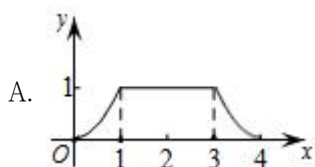
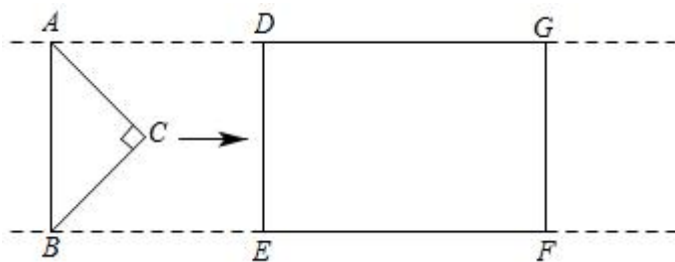
所以反比例函数 $y = \frac{a}{x}$ 的图象在一、三象限,

一次函数 $y = bx + c$ 经过二、三、四象限.

故选: A.

【点睛】本题主要考查二次函数图象的性质、一次函数的图象的性质、反比例函数图象的性质, 关键在于通过二次函数图象推出 a 、 b 、 c 的取值范围.

8. 如图, 等腰 $Rt\triangle ABC$ 与矩形 $DEFG$ 在同一水平线上, $AB = DE = 2$, $DG = 3$, 现将等腰 $Rt\triangle ABC$ 沿箭头所指方向水平平移, 平移距离 x 是自点 C 到达 DE 之时开始计算, 至 AB 离开 GF 为止. 等腰 $Rt\triangle ABC$ 与矩形 $DEFG$ 的重合部分面积记为 y , 则能大致反映 y 与 x 的函数关系的图象为 ()



【答案】 B

【解析】

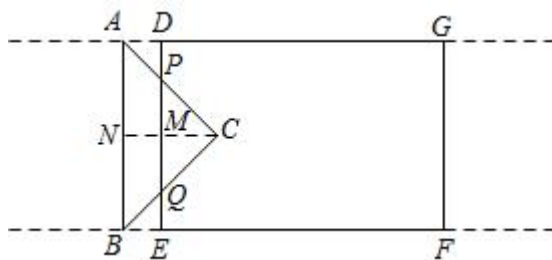
【分析】 根据平移过程，可分三种情况，当 $0 \leq x < 1$ 时，当 $1 \leq x < 3$ 时，当 $3 \leq x \leq 4$ 时，利用直角三角形的性质及面积公式分别写出各种情况下 y 与 x 的函数关系式，再结合函数图象即可求解.

【详解】 过点 C 作 $CM \perp AB$ 于 N ， $DG = 3$ ，

在等腰 $Rt\triangle ABC$ 中， $AB = 2$ ，

$\therefore CN = 1$ ，

①当 $0 \leq x < 1$ 时，如图， $CM = x$ ，

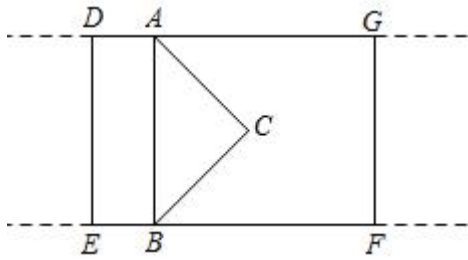


$\therefore PQ = 2x$ ，

$\therefore y = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot CM = \frac{1}{2} \times 2x \cdot x = x^2$ ，

$\therefore 0 \leq x < 1$ ， y 随 x 的增大而增大；

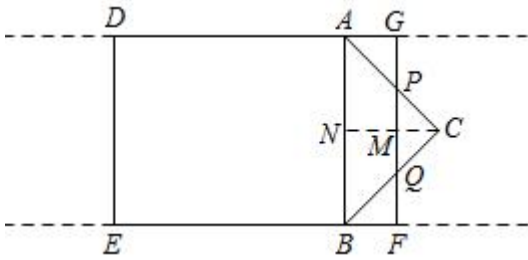
②当 $1 \leq x < 3$ 时，如图，



$$\therefore y = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1,$$

$\therefore$ 当 $1 \leq x < 3$ 时, y 是一个定值为 1;

③ 当 $3 \leq x \leq 4$ 时, 如图, $CM = x - 3$,



$$\therefore PQ = 2(x - 3),$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} AB \cdot CN - \frac{1}{2} PQ \cdot CM = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \frac{1}{2} \times 2 \times (x - 3)^2 = 1 - (x - 3)^2,$$

当 $x=3$, $y=1$, 当 $3 < x < 4$, y 随 x 的增大而减小, 当 $x=4$, $y=0$,

结合 ABCD 选项的图象,

故选: B.

【点睛】 本题考查了动点函数问题, 涉及二次函数的图象及性质, 能够准确理解题意并分情况讨论是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 3 分, 共 18 分, 只要求把最后结果填写在答题卡的相应区域内.)

9. 分解因式: $x^2 - 9y^2 =$ _____.

【答案】 $(x + 3y)(x - 3y)$

【解析】

【分析】 根据平方差公式分解因式即可得到答案.

【详解】 解: 原式 $= x^2 - (3y)^2 = (x + 3y)(x - 3y)$,

故答案为: $(x + 3y)(x - 3y)$.

【点睛】 本题主要考查了利用平方差公式分解因式, 熟记平方差公式是解题的关键.

10. 若 $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$ 在实数范围内有意义, 则实数 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x>3$

【解析】

【分析】 根据分式有意义条件和二次根式有意义的条件得 $x-3>0$, 求解即可.

【详解】 解: 由题意, 得

$$\begin{cases} \sqrt{x-3} \neq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$$

所以 $x-3>0$,

解得: $x>3$,

故答案为: $x>3$.

【点睛】 本题考查分式有意义条件和二次根式有意义的条件, 熟练掌握分式有意义条件: 分母不等于 0, 二次根式有意义的条件: 被开方数为非负数是解题的关键.

11. 如果正 n 边形的一个内角与一个外角的比是 3: 2, 则 $n =$ _____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 设多边形的一个内角为 $3x$ 度, 一个外角则为 $2x$ 度, 求得外角的度数, 然后根据多边形的外角和为 360° , 进而求出 n 的值.

【详解】 解: $\because$ 正 n 边形的一个内角度数与其外角度数的比是 3: 2,

$\therefore$ 设多边形的一个内角为 $3x$ 度, 一个外角则为 $2x$ 度,

$$\therefore 3x+2x = 180^\circ,$$

解得 $x = 36^\circ$,

$$\therefore \text{一个外角为 } 2x = 72^\circ,$$

$$360^\circ \div 72^\circ = 5,$$

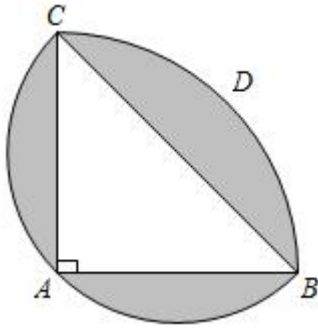
$$\therefore n = 5,$$

故答案为: 5.

【点睛】 本题考查了多边形的内角、外角的知识, 理解一个多边形的一个内角与它相邻外角互补是解题的关键.

12. 如图, 等腰 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB = AC = \sqrt{2}$, 以 A 为圆心, 以 AB 为半径作 $\widehat{BDC}$; 以 BC 为直径作 $\widehat{CAB}$. 则

图中阴影部分的面积是_____。(结果保留 π)



【答案】 $\pi - 2$

【解析】

【分析】由图可知：阴影部分的面积 = 半圆 CAB 的面积 - $\triangle ABC$ 的面积 + 扇形 ABC 的面积 - $\triangle ABC$ 的面积，可根据各自的面积计算方法求出面积即可。

【详解】解： $\because$ 等腰 $Rt\triangle ABC$ 中， $AB = AC = \sqrt{2}$

$\therefore BC = 2$

$$\therefore S_{\text{扇形} ACB} = \frac{90\pi \times 2}{360} = \frac{\pi}{2}, \quad S_{\text{半圆} CAB} = \frac{1}{2}\pi \times (1)^2 = \frac{\pi}{2}, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1;$$

$$\text{所以阴影部分的面积} = S_{\text{半圆} CAB} - S_{\triangle ABC} + S_{\text{扇形} ACB} - S_{\triangle ABC} = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} - 1 = \pi - 2.$$

故答案是： $\pi - 2$.

【点睛】本题主要考查了扇形和三角形的面积计算方法. 不规则图形的面积通常转化为规则图形的面积的和差.

13. 若 $a^2 - 2a - 15 = 0$ ，则代数式 $\left(a - \frac{4a-4}{a}\right) \cdot \frac{a^2}{a-2}$ 的值是_____.

【答案】 15

【解析】

【分析】先按分式混合运算法则化简分式，再把已知变形为 $a^2 - 2a = 15$ ，整体代入即可.

$$\text{【详解】解：} \left(a - \frac{4a-4}{a}\right) \cdot \frac{a^2}{a-2}$$

$$= \frac{(a-2)^2}{a} \cdot \frac{a^2}{a-2}$$

$$= a(a-2)$$

$$= a^2 - 2a,$$

$$\therefore a^2 - 2a - 15 = 0,$$

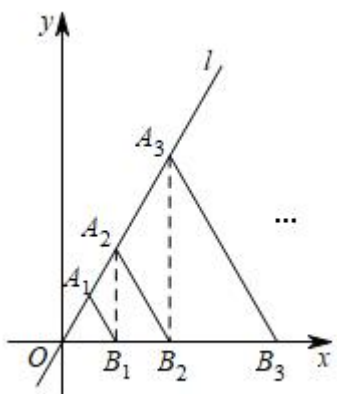
$$\therefore a^2 - 2a = 15,$$

$$\therefore \text{原式} = 15.$$

故答案为: 15.

【点睛】本题考查分式化简求值, 熟练掌握分式混合运算是解题的关键.

14. 如图, 在第一象限内的直线 $l: y = \sqrt{3}x$ 上取点 A_1 , 使 $OA_1 = 1$, 以 OA_1 为边作等边 $\triangle OA_1B_1$, 交 x 轴于点 B_1 ; 过点 B_1 作 x 轴的垂线交直线 l 于点 A_2 , 以 OA_2 为边作等边 $\triangle OA_2B_2$, 交 x 轴于点 B_2 ; 过点 B_2 作 x 轴的垂线交直线 l 于点 A_3 , 以 OA_3 为边作等边 $\triangle OA_3B_3$, 交 x 轴于点 B_3 ; …… 依次类推, 则点 A_{2022} 的横坐标为_____.



【答案】 2^{2020}

【解析】

【分析】根据一次函数图像上点的坐标特征和等边三角形的性质及等腰三角形的三线合一性质, 得出: 点 A_1 的横坐标为 $\frac{1}{2}$, 点 A_2 的横坐标为 1, 点 A_3 的横坐标为 2, 点 A_4 的横坐标为 4, 找出规律即可求解.

【详解】解: 过点 A_1 作 $A_1C \perp x$ 轴于点 C , 点 B_3 作 $B_3A_4 \perp x$ 轴交直线 l 于点 A_4 ,

$$\because \triangle OA_1B_1 \text{ 是等边三角形, } OA_1 = 1,$$

$$\therefore A_1B_1 = OB_1 = OA_1 = 1,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{2}OB_1 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{点 } A_1 \text{ 的横坐标为 } \frac{1}{2}, \text{ 即 } 2^{-1},$$

$$\because \triangle OA_2B_2 \text{ 是等边三角形, } A_2B_1 \perp x \text{ 轴, } OB_1 = 1,$$

$$\therefore \text{点 } A_2 \text{ 的横坐标为 } 1, \text{ 即 } 2^0, \quad OA_2 = A_2B_2$$

$$\therefore OB_2 = 2OB_1 = 2 \times 1 = 2,$$

$\therefore \triangle OA_3B_3$ 是等边三角形, $A_3B_3 \perp x$ 轴,

$\therefore$ 点 A_3 的横坐标为 2, 即 2^1 , $OA_3 = A_3B_3$

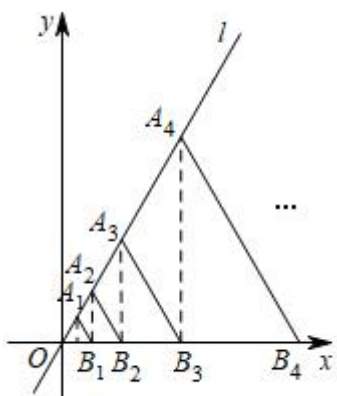
$$\therefore OB_3 = 2OB_2 = 2 \times 2 = 4,$$

$\therefore \triangle OA_4B_4$ 是等边三角形, $A_4B_4 \perp x$ 轴,

$\therefore$ 点 A_4 的横坐标为 4, 即 2^2 ,

以此类推, 点 A_n 的横坐标为 2^{n-2} ,

$\therefore$ 当 $n = 2022$ 时, 点 A_{2022} 的横坐标为 2^{2020} .



故答案为: 2^{2020}

【点睛】 本题考查一次函数图像上点的坐标特征, 等边三角形的性质, 等腰三角形的三线合一性质. 解题的关键是找出点 A_n 的横坐标的变化规律.

三、解答题 (本题共 78 分, 把解答或证明过程写在答题卡的相应区域内, 写在其他区域不得分.)

15. 计算: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 4\cos 45^\circ - \sqrt{8} + (2022 - \pi)^0$.

【答案】 3

【解析】

【分析】 先计算乘方和化简二次根式, 并把特殊三角函数值代入, 再合并同类二次根式, 即可求解.

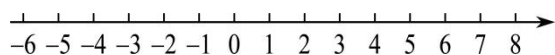
【详解】 解: 原式 $= 2 + 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} + 1$

$$=2+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+1$$

$$=3.$$

【点睛】本题考查实数的混合运算，熟练掌握负整指数幂与零指数幂运算法则，熟记特殊角三角函数值是解题的关键.

16. 解不等式组
$$\begin{cases} 3(x-1) \leq 2x-2, & \text{①} \\ \frac{x+3}{3} + 1 > \frac{x+2}{2}, & \text{②} \end{cases}$$
 并将其解集在数轴上表示出来.



【答案】 $x \leq 1$ ，图见解析

【解析】

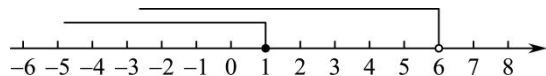
【分析】先分别求出不等式组中每一个不等式解集，再求出其公共解集即可求解，然后把解集用数轴表示出来即可.

【详解】解：解①得： $x \leq 1$,

解②得： $x < 6$,

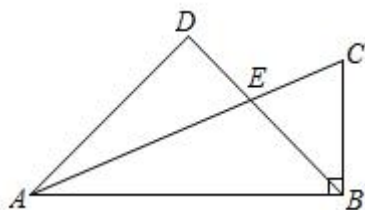
$\therefore x \leq 1$,

解集在数轴上表示为：



【点睛】本题考查了解一元一次不等式组：求解出两个不等式的解集，然后按照“同大取大，同小取小，大于小的小于大的取中间，小于小的大于大的无解”确定不等式组的解集. 也考查了用数轴表示不等式的解集.

17. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， E 是边 AC 上一点，且 $BE = BC$ ，过点 A 作 BE 的垂线，交 BE 的延长线于点 D ，求证： $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】先根据等腰三角形的性质得 $\angle C = \angle BEC$ ，又由对顶角相等可证得 $\angle AED = \angle C$ ，再由 $\angle D = \angle ABC = 90^\circ$ ，即可得出结论.

【详解】证明： $\because BE = BC$

$$\therefore \angle C = \angle BEC,$$

$$\because \angle BEC = \angle AED,$$

$$\therefore \angle AED = \angle C,$$

$$\therefore AD \perp BD,$$

$$\therefore \angle D = 90^\circ,$$

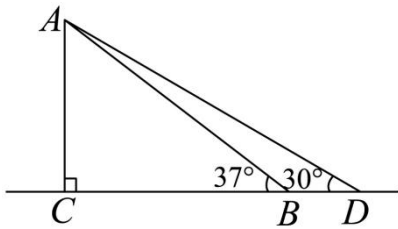
$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC.$$

【点睛】本题考查等腰三角形的性质，相似三角形的判定，熟练掌握等腰三角形的性质和相似三角形的判定定理是解题的关键.

18. 菏泽某超市计划更换安全性更高的手扶电梯，如图，把电梯坡面的坡角由原来的 37° 减至 30° ，已知原电梯坡面 AB 的长为 8 米，更换后的电梯坡面为 AD ，点 B 延伸至点 D ，求 BD 的长. (结果精确到 0.1 米. 参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.60, \cos 37^\circ \approx 0.80, \tan 37^\circ \approx 0.75, \sqrt{3} \approx 1.73$)



【答案】约为 1.9 米

【解析】

【分析】根据正弦的定义求出 AC ，根据余弦的定义求出 BC ，根据正切的定义求出 CD ，结合图形计算，得到答案.

【详解】解：在 $Rt\triangle ABC$ 中， $AB=8$ 米， $\angle ABC=37^\circ$ ，

$$\text{则 } AC = AB \cdot \sin \angle ABC \approx 8 \times 0.60 = 4.8 \text{ (米)},$$

$$BC = AB \cdot \cos \angle ABC \approx 8 \times 0.80 = 6.40 \text{ (米)},$$

在 $Rt\triangle ADC$ 中， $\angle ADC=30^\circ$ ，

$$\text{则 } CD = \frac{AC}{\tan \angle ADC} = \frac{4.8}{\tan 30^\circ} = \frac{4.8}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \approx 8.30 \text{ (米)},$$

$$\therefore BD = CD - BC = 8.30 - 6.40 \approx 1.9 \text{ (米)},$$

答： BD 的长约为 1.9 米.

【点睛】 本题考查的是解直角三角形的应用—坡度坡角问题，掌握锐角三角函数的定义是解题的关键.

19. 某健身器材店计划购买一批篮球和排球，已知每个篮球进价是每个排球进价的 1.5 倍，若用 3600 元购进篮球的数量比用 3200 元购进排球的数量少 10 个.

(1) 篮球、排球的进价分别为每个多少元?

(2) 该健身器材店决定用不多于 28000 元购进篮球和排球共 300 个进行销售，最多可以购买多少个篮球?

【答案】 (1) 每个篮球的进价为 120 元，每个排球的进价为 80 元.

(2) 100 个

【解析】

【分析】 (1) 设每个排球的进价为 x 元，则每个篮球的进价为 $1.5x$ 元，根据“用 3600 元购进篮球的数量比用 3200 元购进排球的数量少 10 个”得到方程；即可解得结果；

(2) 设健身器材店可以购进篮球 a 个，则购进排球 $(300 - a)$ 个，根据题意得不等式组即可得到结果.

【小问 1 详解】

设每个排球的进价为 x 元，则每个篮球的进价为 $1.5x$ 元

根据题意得 $\frac{3600}{1.5x} = \frac{3200}{x} - 10$.

解得 $x = 80$.

经检验 $x = 80$ 是原分式方程的解.

$\therefore 1.5x = 120$ (元).

$\therefore$ 篮球的进价为 120 元，排球的进价为 80 元

答：每个篮球的进价为 120 元，每个排球的进价为 80 元.

【小问 2 详解】

设该体育用品商店可以购进篮球 a 个，则购进排球 $(300 - a)$ 个，

根据题意，得 $120a + 80(300 - a) \leq 28000$.

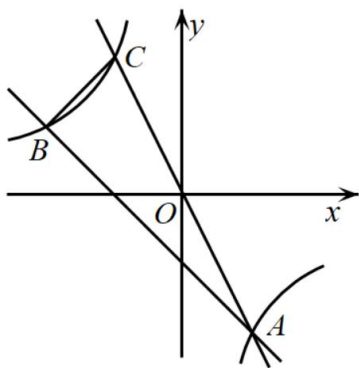
解得 $a \leq 100$.

答：该健身器材店最多可以购进篮球 100 个.

【点睛】 本题考查了一元一次不等式的应用，分式方程的应用，找准数量关系是解题的关键.

20. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = ax + b$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象都经过

$A(2, -4)$ 、 $B(-4, m)$ 两点.



(1) 求反比例函数和一次函数的表达式;

(2) 过 O 、 A 两点的直线与反比例函数图象交于另一点 C , 连接 BC , 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】 (1) 反比例函数的表达式为 $y = -\frac{8}{x}$; 一次函数的表达式为 $y = -x - 2$

(2) 12

【解析】

【分析】 (1) 由点 A 的坐标利用反比例函数图象上点的坐标特征即可求出 k 值, 从而得出反比例函数表达式, 再由点 B 的坐标和反比例函数表达式即可求出 m 值, 结合点 A 、 B 的坐标利用待定系数法即可求出一一次函数表达式;

(2) 利用分解图形求面积法, 利用 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}$, 求面积即可.

【小问 1 详解】

将 $A(2, -4)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得到 $-4 = \frac{k}{2}$, 即: $k = -8$.

$\therefore$ 反比例函数的表达式为: $y = -\frac{8}{x}$.

将 $B(-4, m)$ 代入 $y = -\frac{8}{x}$, 得: $m = -\frac{8}{-4} = 2$,

$\therefore B(-4, 2)$,

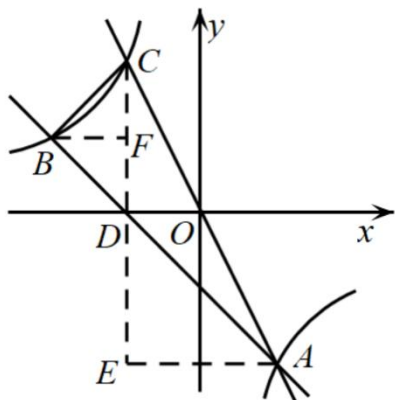
将 A, B 代入 $y = ax + b$, 得:

$$\begin{cases} 2a + b = -4 \\ -4a + b = 2 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$\therefore$ 一次函数的表达式为: $y = -x - 2$.

【小问 2 详解】

设 AB 交 x 轴于点 D , 连接 CD , 过点 A 作 $AE \perp CD$ 交 CD 延长线于点 E , 作 $BF \perp CD$ 交 CD 于点 F .



令 $y = -x - 2 = 0$, 则 $x = -2$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(-2, 0)$,

$\therefore$ 过 O 、 A 两点的直线与反比例函数图象交于另一点 C ,

$\therefore A(2, -4)$ 关于原点的对称性点 C 坐标: $(-2, 4)$,

$\therefore$ 点 C 、点 D 横坐标相同,

$\therefore CD \parallel y$ 轴,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}$$

$$= \frac{1}{2} CD \cdot AE + \frac{1}{2} CD \cdot BF$$

$$= \frac{1}{2} CD \cdot (AE + BF)$$

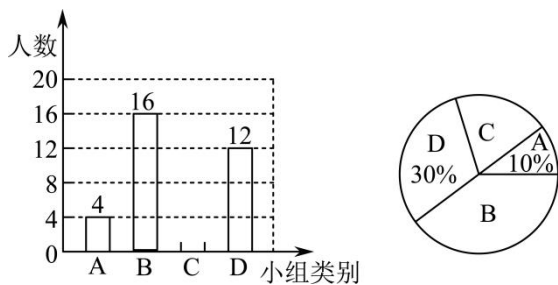
$$= \frac{1}{2} CD \cdot |x_A - x_B|$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 6$$

$$= 12.$$

【点睛】 本题考查了反比例函数与一次函数的交点坐标、反比例函数图象上点的坐标特征以及待定系数法求函数解析式, 解题的关键是: (1) 利用待定系数法求函数表达式; (2) 利用分割图形求面积法求出 $\triangle AOB$ 的面积. 本题属于基础题, 难度不大, 解决该题型题目时, 找出点的坐标利用待定系数法求出函数解析式是关键.

21. 为提高学生的综合素养, 某校开设了四个兴趣小组, A “健美操”、 B “跳绳”、 C “剪纸”、 D “书法” 为了了解学生对每个兴趣小组的喜爱情况, 随机抽取了部分同学进行调查, 并将调查结果绘制出上面不完整的统计图, 请结合图中的信息解答下列问题:



- (1) 本次共调查了_____名学生; 并将条形统计图补充完整;
- (2) C 组所对应的扇形圆心角为_____度;
- (3) 若该校共有学生 1400 人, 则估计该校喜欢跳绳的学生人数约是_____;
- (4) 现选出了 4 名跳绳成绩最好的学生, 其中有 1 名男生和 3 名女生. 要从这 4 名学生中任意抽取 2 名学生去参加比赛, 请用列表法或画树状图法, 求刚好抽到 1 名男生与 1 名女生的概率.

【答案】(1) 40, 图见解析

(2) 72 (3) 560

(4) $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 由 A 组人数及其所占百分比可得总人数, 总人数减去 A 、 B 、 D 人数求出 C 组人数即可补全图形;

(2) 用 360° 乘以 C 组人数所占比例即可;

(3) 总人数乘以样本中 B 组人数所占比例即可;

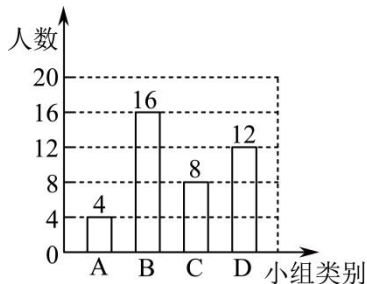
(4) 画树状图, 共有 12 种等可能的结果, 其中选出的 2 名学生恰好为一名男生、一名女生的结果有 6 种, 再由概率公式求解即可.

【小问 1 详解】

本次调查总人数为 $4 \div 10\% = 40$ (名),

C 组人数为 $40 - 4 - 16 - 12 = 8$ (名),

补全图形如下:



故答案为: 40;

【小问 2 详解】

$$\frac{8}{40} \times 360^\circ = 72^\circ,$$

故答案为: 72;

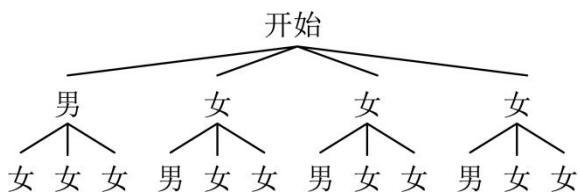
【小问 3 详解】

$$1400 \times \frac{16}{40} = 560 \text{ (人)},$$

故答案为: 560;

【小问 4 详解】

画树状图如下:

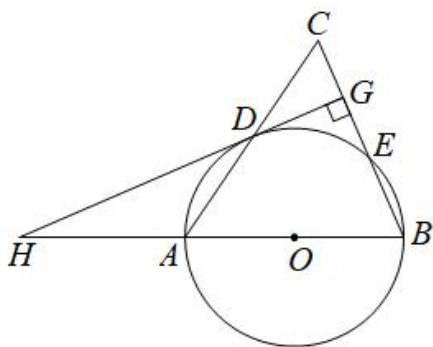


共有 12 种等可能的结果, 其中选出的 2 名学生恰好是 1 名男生与 1 名女生的结果共有 6 种,

$\therefore$ 选出的 2 名学生恰好是 1 名男生与 1 名女生的概率为 $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查了条形统计图和扇形统计图, 用样本估计总体及用列表法或树状图法求概率, 准确理解题意, 熟练掌握知识点是解题的关键.

22. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 以 AB 为直径作 $\odot O$ 交 AC 、 BC 于点 D 、 E , 且 D 是 AC 的中点, 过点 D 作 $DG \perp BC$ 于点 G , 交 BA 的延长线于点 H .



(1) 求证: 直线 HG 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $HA = 3, \cos B = \frac{2}{5}$, 求 CG 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{6}{5}$

【解析】

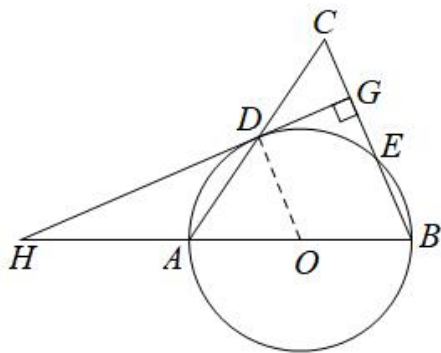
【分析】(1) 连接 OD , 利用三角形中位线的定义和性质可得 $OD \parallel BC$, 再利用平行线的性质即可证明;

(2) 先通过平行线的性质得出 $\angle HBG = \angle HOD$, 设 $OD = OA = OB = r$, 再通过解直角三角形求出半径

长度, 再利用三角形中位线定理和相似三角形的判定和性质分别求出 BC , BG 的长度, 即可求解.

【小问 1 详解】

连接 OD ,



$$\because DG \perp BC,$$

$$\therefore \angle BGH = 90^\circ,$$

$\because D$ 是 AC 的中点, AB 为直径,

$$\therefore OD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BGH = \angle ODH = 90^\circ,$$

$\therefore$ 直线 HG 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

由 (1) 得 $OD \parallel BC$,

$$\therefore \angle HBG = \angle HOD,$$

$$\because \cos \angle HBG = \frac{2}{5},$$

$$\therefore \cos \angle HOD = \frac{2}{5},$$

设 $OD = OA = OB = r$,

$$\because HA = 3,$$

$$\therefore OH = 3 + r,$$

在 $Rt\triangle HOD$ 中, $\angle HDO = 90^\circ$,

$$\therefore \cos \angle HOD = \frac{OD}{OH} = \frac{r}{3+r} = \frac{2}{5},$$

解得 $r = 2$,

$$\therefore OD = OA = OB = 2, OH = 5, BH = 7,$$

$\because D$ 是 AC 的中点, AB 为直径,

$$\therefore BC = 2OD = 4,$$

$$\therefore \angle BGH = \angle ODH = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ODH \sim \triangle BGH,$$

$$\therefore \frac{OH}{BH} = \frac{OD}{BG}, \text{ 即 } \frac{5}{7} = \frac{2}{BG},$$

$$\therefore BG = \frac{14}{5},$$

$$\therefore CG = BC - BG = 4 - \frac{14}{5} = \frac{6}{5}.$$

【点睛】本题考查了切线的判定，三角形中位线的性质，平行线的判定和性质，相似三角形的判定和性质及解直角三角形，熟练掌握知识点是解题的关键.

23. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 45^\circ$, $AD \perp BC$ 于点 D , 在 DA 上取点 E , 使 $DE = DC$, 连接 BE 、 CE .

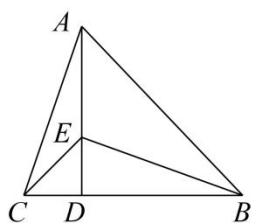


图 1

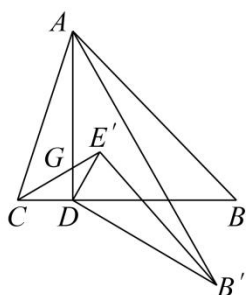


图 2

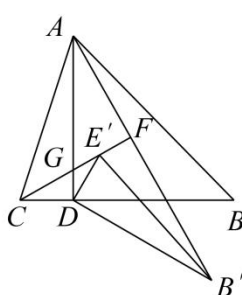


图 3

(1) 直接写出 CE 与 AB 的位置关系;

(2) 如图 2, 将 $\triangle BED$ 绕点 D 旋转, 得到 $\triangle B'E'D$ (点 B' , E' 分别与点 B , E 对应), 连接 CE' 、 AB' , 在 $\triangle BED$ 旋转的过程中 CE' 与 AB' 的位置关系与 (1) 中的 CE 与 AB 的位置关系是否一致? 请说明理由;

(3) 如图 3, 当 $\triangle BED$ 绕点 D 顺时针旋转 30° 时, 射线 CE' 与 AD 、 AB' 分别交于点 G 、 F , 若 $CG = FG$, $DC = \sqrt{3}$, 求 AB' 的长.

【答案】(1) $CE \perp AB$, 理由见解析

(2) 一致, 理由见解析

(3) $5\sqrt{3}$

【解析】

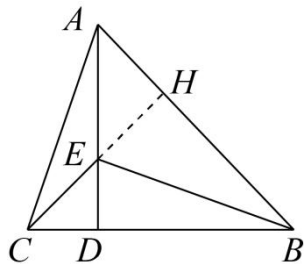
【分析】(1) 由等腰直角三角形的性质可得 $\angle ABC = \angle DAB = 45^\circ$, $\angle DCE = \angle DEC = \angle AEH = 45^\circ$, 可得结论;

(2) 通过证明 $\triangle ADB' \cong \triangle CDE'$, 可得 $\angle DAB' = \angle DCE'$, 由余角的性质可得结论;

(3) 由等腰直角的性质和直角三角形的性质可得 $AB' = \sqrt{3}AD$, 即可求解.

【小问 1 详解】

如图, 延长 CE 交 AB 于 H ,



$$\because \angle ABC=45^\circ, AD \perp BC,$$

$$\therefore \angle ADC=\angle ADB=90^\circ, \angle ABC=\angle DAB=45^\circ,$$

$$\therefore DE=CD,$$

$$\therefore \angle DCE=\angle DEC=\angle AEH=45^\circ,$$

$$\therefore \angle BHC=\angle BAD+\angle AEH=90^\circ,$$

$$\therefore CE \perp AB;$$

【小问 2 详解】

在 $\triangle BED$ 旋转的过程中 CE' 与 AB' 的位置关系与 (1) 中的 CE 与 AB 的位置关系是一致的, 理由如下:

如图 2, 延长 CE' 交 AB' 于 H ,

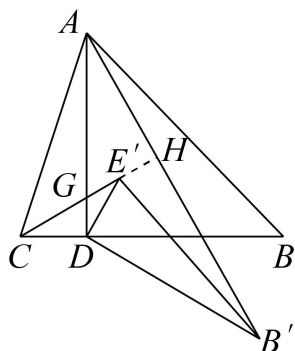


图 2

由旋转可得: $CD=DE'$, $B'D=AD$,

$$\therefore \angle ADC=\angle ADB=90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE'=\angle ADB',$$

$$\therefore \frac{CD}{DE'}=\frac{AD}{DB'}=1,$$

$$\therefore \triangle ADB' \sim \triangle CDE',$$

$$\therefore \angle DAB'=\angle DCE',$$

$$\begin{aligned} \because \angle DCE' + \angle DGC &= 90^\circ, \quad \angle DGC = \angle AGH, \\ \therefore \angle DAB' + \angle AGH &= 90^\circ, \\ \therefore \angle AHC &= 90^\circ, \\ \therefore CE' &\perp AB'; \end{aligned}$$

【小问3 详解】

如图3, 过点 D 作 $DH \perp AB'$ 于点 H ,

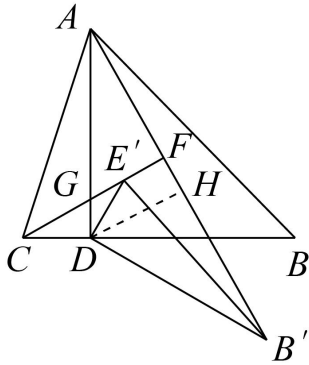


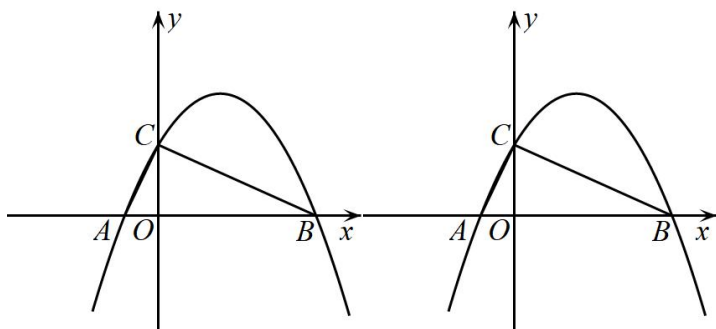
图 3

$$\begin{aligned} \because \triangle BED \text{ 绕点 } D \text{ 顺时针旋转 } 30^\circ, \\ \therefore \angle BDB' &= 30^\circ, BD' = BD = AD, \\ \therefore \angle ADB' &= 120^\circ, \angle DAB' = \angle AB'D = 30^\circ, \\ \because DH &\perp AB', AD = B'D, \\ \therefore AD &= 2DH, \quad AH = \sqrt{3} DH = B'H, \\ \therefore AB' &= \sqrt{3} AD, \\ \text{由 (2) 可知: } \triangle ADB' &\sim \triangle CDE', \\ \therefore \angle DAB' &= \angle DCE' = 30^\circ, \\ \because AD &\perp BC, \quad CD = \sqrt{3}, \\ \therefore DG &= 1, \quad CG = 2DG = 2, \\ \therefore CG &= FG = 2, \\ \because \angle DAB' &= 30^\circ, DH \perp AB', \\ \therefore AG &= 2GF = 4, \\ \therefore AD &= AG + DG = 4 + 1 = 5, \end{aligned}$$

$$\therefore AB' = \sqrt{3}AD = 5\sqrt{3}.$$

【点睛】本题是三角形综合题，考查了等腰三角形的性质，直角三角形的性质，旋转的性质，相似三角形的判定和性质等知识，证明三角形相似是解题的关键.

24. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与 x 轴交于 $A(-2, 0)$ 、 $B(8, 0)$ 两点，与 y 轴交于点 $C(0, 4)$ ，连接 AC 、 BC .



- (1) 求抛物线的表达式;
- (2) 将 $\triangle ABC$ 沿 AC 所在直线折叠，得到 $\triangle ADC$ ，点 B 的对应点为 D ，直接写出点 D 的坐标，并求出四边形 $OADC$ 的面积;
- (3) 点 P 是抛物线上的一动点，当 $\angle PCB = \angle ABC$ 时，求点 P 的坐标.

【答案】(1) $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$

(2) $D(-8, 8), 24$

(3) $P(6, 4)$ 或 $\left(\frac{34}{3}, -\frac{100}{9}\right)$

【解析】

【分析】(1) 直接利用待定系数法求抛物线解析式即可;

(2) 先利用勾股定理的逆定理证明 $\triangle ABC$ 为直角三角形，再根据折叠的性质得出点 B 、 C 、 D 三点共线，继而通过证明 $\triangle DBE \sim \triangle CBO$ ，利用相似三角形的性质即可得出点 D 的坐标，根据四边形 $OADC$ 的面积 $= S_{\triangle ADC} + S_{\triangle AOC} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle AOC}$ 进行求解即可;

(3) 分两种情况讨论：当点 P 在 x 轴上方时，当点 P 在 x 轴下方时，分别求解即可.

【小问 1 详解】

将 $A(-2, 0)$ ， $B(8, 0)$ ， $C(0, 4)$ 代入抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ ，得

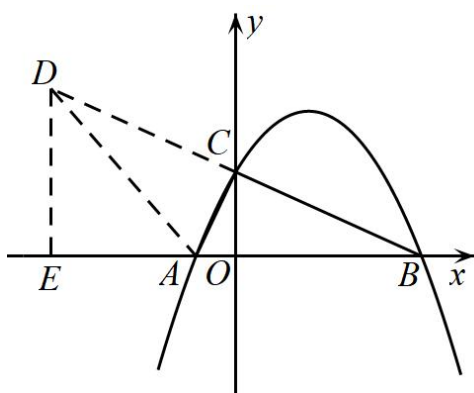
$$\begin{cases} 0 = 4a - 2b + c \\ 0 = 64a + 8b + c \\ 4 = c \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = 4 \end{cases},$$

所以, 抛物线的表达式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$;

【小问 2 详解】

如图, 过点 D 作 $DE \perp x$ 轴于 E ,

$$\therefore \angle DEB = \angle COB = 90^\circ,$$



$$\therefore A(-2, 0), B(8, 0), C(0, 4),$$

$$\therefore AB = 10, AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}, BC = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}, OB = 8, OC = 4, OA = 2,$$

$$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 为直角三角形且 } \angle ACB = 90^\circ,$$

将 $\triangle ABC$ 沿 AC 所在直线折叠, 得到 $\triangle ADC$, 点 B 的对应点为 D ,

此时, 点 B 、 C 、 D 三点共线, $BC = DC$, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC}$,

$$\therefore \angle DBE = \angle CBO,$$

$$\therefore \triangle DBE \sim \triangle CBO,$$

$$\therefore \frac{DB}{CB} = \frac{DE}{OC} = \frac{BE}{BO} = 2,$$

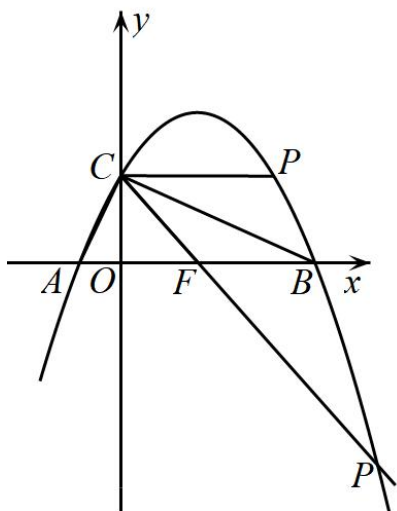
$$\therefore OB = OE = 8, DE = 2OC = 8,$$

$$\therefore D(-8, 8),$$

$\therefore$ 四边形 $OADC$ 的面积

$$= S_{\triangle ADC} + S_{\triangle AOC} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC + \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} + \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 24;$$

【小问3详解】



当点 P 在 x 轴上方时,

$$\therefore \angle PCB = \angle ABC,$$

$$\therefore CP \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的纵坐标为 } 4, \text{ 即 } 4 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4,$$

解得 $x = 6$ 或 0 (舍去)

$$\therefore P(6, 4);$$

当点 P 在 x 轴下方时, 设直线 CP 交 x 轴于 F ,

$$\therefore \angle PCB = \angle ABC,$$

$$\therefore CF = BF,$$

设 $OF = t$, 则 $CF = BF = 8 - t$,

在 $Rt\triangle COF$ 中, 由勾股定理得 $OC^2 + OF^2 = CF^2$,

$$\text{即 } 4^2 + t^2 = (8 - t)^2,$$

解得 $t = 3$,

$$\therefore F(3, 0),$$

$$\therefore C(0, 4),$$

$\therefore$ 设直线 CF 的解析式为 $y = kx + 4$,

$$\text{即 } 0 = 3k + 4, \text{ 解得 } k = -\frac{4}{3},$$

∴ 直线 CF 的解析式为 $y = -\frac{4}{3}x + 4$,

令 $-\frac{4}{3}x + 4 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$, 解得 $x = \frac{34}{3}$ 或 0 (舍去),

当 $x = \frac{34}{3}$ 时, $y = -\frac{1}{4} \times \left(\frac{34}{3}\right)^2 + \frac{3}{2} \times \frac{34}{3} + 4 = -\frac{100}{9}$

∴ $P\left(\frac{34}{3}, -\frac{100}{9}\right)$;

综上, $P(6, 4)$ 或 $\left(\frac{34}{3}, -\frac{100}{9}\right)$.

【点睛】 本题考查了二次函数的综合题目, 涉及待定系数法求二次函数解析式, 勾股定理的逆定理, 折叠的性质, 相似三角形的判定和性质, 求一次函数的解析式, 等腰三角形的性质等知识, 熟练掌握知识点并能够灵活运用是解题的关键.

