

参照秘密级管理★启用前

试卷类型: A

淄博市 2022 年初中学业水平考试

数 学 试 题

本试卷共 8 页, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

注意事项:

1. 答题前, 考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将区县、学校、姓名、考试号、座号填写在答题卡和试卷规定位置, 并核对条形码.
2. 选择题每小题选出答案后, 用 2B 铅笔涂黑答题卡对应题目的答案标号; 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号.
3. 非选择题必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答, 字体工整、笔迹清晰, 写在答题卡各题目指定区域内如需改动, 先划掉原来答案, 然后再写上新答案, 严禁使用涂改液、胶带纸、修正带修改, 不允许使用计算器.
4. 保证答题卡清洁、完整, 严禁折叠, 严禁在答题卡上做任何标记.
5. 评分以答题卡上的答案为依据, 不按以上要求作答的答案无效.

一、选择题: 本大题共 12 个小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 若实数 a 的相反数是 -1 , 则 $a+1$ 等于 ()

A. 2 B. -2 C. 0 D. $\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据相反数的定义即可求解.

【详解】解: $\because 1$ 的相反数是 -1 ,

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore a+1=2$$

故选: A.

【点睛】本题主要考查了相反数, 熟记相反数的定义是解题的关键.

2. 下列图案中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】根据中心对称图形与轴对称图形的概念，把一个图形绕某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形，进行判断即可.

【详解】解：A. 不是中心对称图形，也不是轴对称图形，故此选项不合题意；

B. 不是中心对称图形，是轴对称图形，故此选项不合题意；

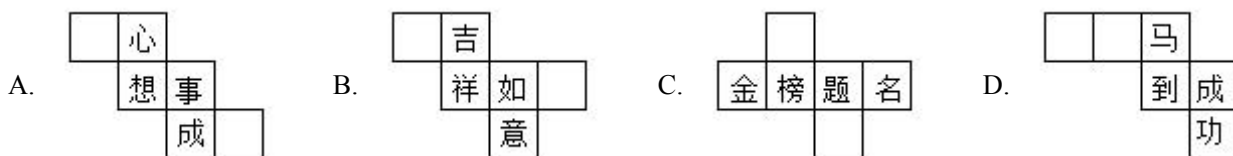
C. 不是中心对称图形，是轴对称图形，故此选项不合题意；

D. 既是轴对称图形，又是中心对称图形，故此选项符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查的是中心对称图形与轴对称图形的概念，正确掌握相关定义是解题关键.

3. 经过折叠可以围成正方体，且在正方体侧面上的字恰好环绕组成一个四字成语的图形是（ ）



【答案】C

【解析】

【分析】根据正方体侧面上的字恰好环绕组成一个四字成语，即是正方体的表面展开图，相对的面之间一定相隔一个正方形，且有两组相对的面，根据这一特点作答.

【详解】解：由正方体的表面展开图，相对的面之间一定相隔一个正方形可知，

A. “心”、“想”、“事”、“成”四个字没有相对的面，故不符合题意；

B. “吉”、“祥”、“如”、“意”四个字没有相对的面，故不符合题意；

C. “金”与“题”相对，“榜”、“名”是相对的面，故符合题意；

D. “马”、“到”、“成”、“功”四个字没有相对的面，故不符合题意；

故选：C.

【点睛】本题主要考查了正方体相对两个面上的文字，明确正方体的表面展开图，相对的面之间一定相隔

一个正方形是解题的关键.

4. 小红在“养成阅读习惯, 快乐阅读, 健康成长”读书大赛活动中, 随机调查了本校初二年级 20 名同学, 在近 5 个月内每人阅读课外书的数量, 数据如下表所示:

人数	3	4	8	5
课外书数量 (本)	12	13	15	18

则阅读课外书数量的中位数和众数分别是 ()

- A. 13, 15 B. 14, 15 C. 13, 18 D. 15, 15

【答案】D

【解析】

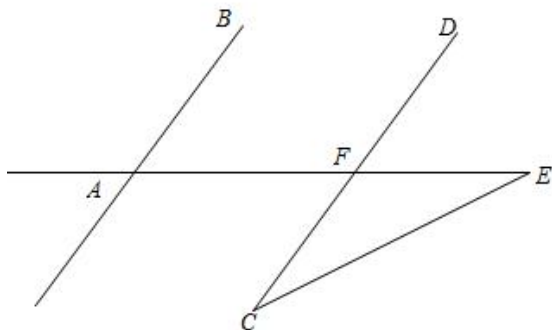
【分析】利用中位数, 众数的定义即可解决问题.

【详解】解: 中位数为第 10 个和第 11 个的平均数 $\frac{15+15}{2}=15$, 众数为 15.

故选: D.

【点睛】本题考查了中位数和众数, 解题的关键是掌握平均数、中位数和众数的概念.

5. 某城市几条道路的位置关系如图所示, 道路 $AB \parallel CD$, 道路 AB 与 AE 的夹角 $\angle BAE = 50^\circ$. 城市规划部门想新修一条道路 CE , 要求 $CF = EF$, 则 $\angle E$ 的度数为 ()



- A. 23° B. 25° C. 27° D. 30°

【答案】B

【解析】

【分析】先根据平行线的性质, 由 $AB \parallel CD$ 得到 $\angle BAE = \angle DFE = 50^\circ$, 然后根据三角形外角性质计算 $\angle E$ 的度数.

【详解】解: $\because AB \parallel CD$, $\angle BAE = 50^\circ$,

$\therefore \angle BAE = \angle DFE = 50^\circ$,

$\because CF = EF$,

$$\therefore \angle C = \angle E,$$

$$\because \angle DFE = \angle C + \angle E = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle E = 25^\circ.$$

故选: B.

【点睛】本题考查了平行线的性质, 等腰三角形的性质, 以及三角形的外角性质, 熟练掌握平行线的性质是解题的关键.

6. 下列分数中, 和 π 最接近的是 ()

A. $\frac{355}{113}$

B. $\frac{223}{71}$

C. $\frac{157}{50}$

D. $\frac{22}{7}$

【答案】A

【解析】

【分析】把分数化小数, 用分数的分子除以分母即得小数商, 除不尽时通常保留三位小数, 据此先分别把每个选项中的分数化成小数, 进而比较得解

【详解】A. $\frac{355}{113} \approx 3.1416;$

B. $\frac{223}{71} \approx 3.1408;$

C. $\frac{157}{50} \approx 3.14;$

D. $\frac{22}{7} \approx 3.1428;$

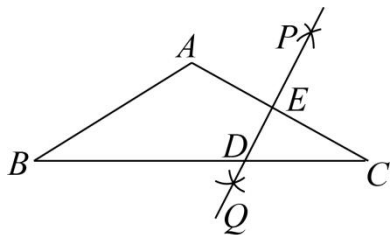
因为 $\pi \approx 3.1416,$

故和 π 最接近的是 $\frac{355}{113},$

故选择:A

【点睛】本题主要考查有理数大小的比较, 熟练掌握分数化为小数的方法是解题的关键

7. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle A=120^\circ$. 分别以点 A 和 C 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}AC$ 的长度为半径作弧, 两弧相交于点 P 和点 Q , 作直线 PQ 分别交 BC , AC 于点 D 和点 E . 若 $CD=3$, 则 BD 的长为 ()



A. 4

B. 5

C. 6

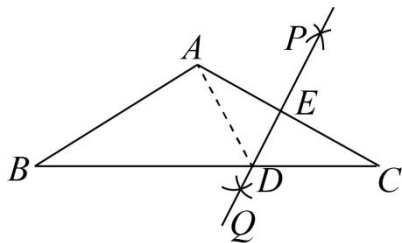
D. 7

【答案】C

【解析】

【分析】连接 AD ，由作图知： DE 是线段 AC 的垂直平分线，得到 $AD=CD=3$ ， $\angle DAC=\angle C=30^\circ$ ，求得 $\angle BAD=90^\circ$ ，再利用含 30° 度角的直角三角形的性质即可求解。

【详解】解：连接 AD ，



由作图知： DE 是线段 AC 的垂直平分线，

$$\therefore AD=CD=3,$$

$$\therefore \angle DAC=\angle C,$$

$$\because AB=AC, \angle A=120^\circ,$$

$$\therefore \angle B=\angle C=30^\circ, \text{ 则 } \angle DAC=\angle C=30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD=120^\circ-\angle DAC=90^\circ,$$

$$\therefore BD=2AD=6,$$

故选：C.

【点睛】本题考查了作图-基本作图：熟练掌握 5 种基本作图是解决问题的关键. 也考查了线段垂直平分线的性质，等腰三角形的性质，含 30° 度角的直角三角形的性质.

8. 计算 $(-2a^3b)^2 - 3a^6b^2$ 的结果是 ()

A. $-7a^6b^2$

B. $-5a^6b^2$

C. a^6b^2

D. $7a^6b^2$

【答案】C

【解析】

【分析】先根据积的乘方法则计算，再合并同类项.

【详解】解：原式 $= 4a^6b^2 - 3a^6b^2 = a^6b^2$ ，

故选：C.

【点睛】本题主要考查了积的乘方，合并同类项，解题的关键是掌握相应的运算法则.

9. 为扎实推进“五育”并举工作，加强劳动教育，某校投入 2 万元购进了一批劳动工具. 开展课后服务后，学生的劳动实践需求明显增强，需再次采购一批相同的劳动工具，已知采购数量与第一次相同，但采购单价比第一次降低 10 元，总费用降低了 15%. 设第二次采购单价为 x 元，则下列方程中正确的是 ()

- A. $\frac{20000}{x} = \frac{20000 \times (1-15\%)}{x-10}$
- B. $\frac{20000}{x-10} = \frac{20000 \times (1-15\%)}{x}$
- C. $\frac{20000}{x} = \frac{20000 \times (1-15\%)}{x+10}$
- D. $\frac{20000}{x+10} = \frac{20000 \times (1-15\%)}{x}$

【答案】D

【解析】

【分析】设第二次采购单价为 x 元，则第一次采购单价为 $(x+10)$ 元，根据单价=总价÷数量，结合总费用降低了 15%，采购数量与第一次相同，即可得出关于 x 的分式方程。

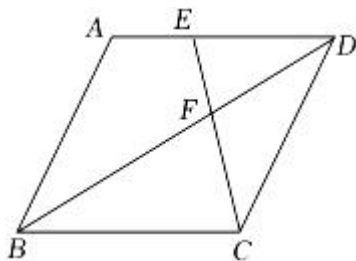
【详解】解：设第二次采购单价为 x 元，则第一次采购单价为 $(x+10)$ 元，

依题意得： $\frac{20000}{x+10} = \frac{20000 \times (1-15\%)}{x}$ ，

故选：D.

【点睛】本题考查了由实际问题抽象出分式方程，找到关键描述语，找到合适的等量关系是解决问题的关键。

10. 如图, 在边长为 4 的菱形 $ABCD$ 中, E 为 AD 边的中点, 连接 CE 交对角线 BD 于点 F . 若 $\angle DEF = \angle DFE$, 则这个菱形的面积为 ()



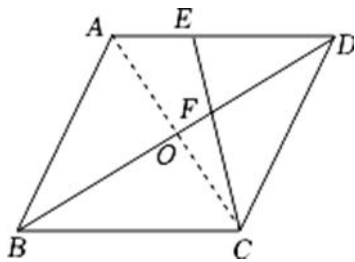
- A. 16 B. $6\sqrt{7}$ C. $12\sqrt{7}$ D. 30

【答案】B

【解析】

【分析】连接 AC 交 BD 于 O ，如图，根据菱形的性质得到 $AD \parallel BC$ ， $CB = CD = AD = 4$ ， $AC \perp AB$ ， $BO = OD$ ， $OC = AO$ ，再利用 $\angle DEF = \angle DFE$ 得到 $DF = DE = 2$ ，证明 $\angle BCF = \angle BFC$ 得到 $BF = BC = 4$ ，则 $BD = 6$ ，所以 $OB = OD = 3$ ，接着利用勾股定理计算出 OC ，从而得到 $AC = 2\sqrt{7}$ ，然后根据菱形的面积公式计算它的面积。

【详解】解：连接 AC 交 BD 于 O ，如图，



∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

∴ $AD \parallel BC$, $CB = CD = AD = 4$, $AC \perp AB$, $BO = OD$, $OC = AO$,

∵ E 为 AD 边的中点,

∴ $DE = 2$,

∴ $\angle DEF = \angle DFE$,

∴ $DF = DE = 2$,

∴ $DE \parallel BC$,

∴ $\angle DEF = \angle BCF$,

∴ $\angle DFE = \angle BFC$,

∴ $\angle BCF = \angle BFC$,

∴ $BF = BC = 4$,

∴ $BD = BF + DF = 4 + 2 = 6$,

∴ $OB = OD = 3$,

在 $\text{Rt}\triangle BOC$ 中, $OC = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$,

∴ $AC = 2OC = 2\sqrt{7}$,

∴ 菱形 $ABCD$ 的面积 $= \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} \times 6 = 6\sqrt{7}$.

故选: B.

【点睛】 本题考查了菱形的性质: 菱形具有平行四边形的一切性质; 菱形的四条边都相等; 菱形的两条对角线互相垂直, 并且每一条对角线平分一组对角; 菱形面积 $= \frac{1}{2} ab$ (a 、 b 是两条对角线的长度).

11. 若二次函数 $y = ax^2 + 2$ 的图象经过 $P(1, 3)$, $Q(m, n)$ 两点, 则代数式 $n^2 - 4m^2 - 4n + 9$ 的最小值为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 A

【解析】

【分析】先求得 $a=1$ ，推出 $m^2 = n-2$ ，原式化简得 $(n-4)^2 + 1$ ，利用偶次方的非负性，即可求解.

【详解】解：∵ 二次函数 $y = ax^2 + 2$ 的图象经过 $P(1, 3)$,

$$\therefore 3 = a + 2,$$

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore \text{二次函数的解析式为 } y = x^2 + 2,$$

∵ 二次函数 $y = ax^2 + 2$ 的图象经过 $Q(m, n)$,

$$\therefore n = m^2 + 2 \text{ 即 } m^2 = n - 2,$$

$$\therefore n^2 - 4m^2 - 4n + 9$$

$$= n^2 - 4(n - 2) - 4n + 9$$

$$= n^2 - 8n + 17$$

$$= (n - 4)^2 + 1,$$

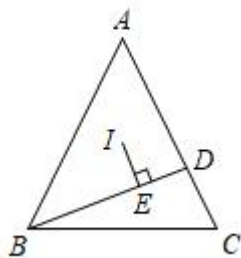
$$\therefore (n - 4)^2 \geq 0,$$

$$\therefore n^2 - 4m^2 - 4n + 9 \text{ 的最小值为 } 1,$$

故选: A.

【点睛】本题考查了配方法的应用，待定系数法求二次函数的解析式，二次函数的性质，非负数的性质，利用待定系数法求得二次函数的解析式是解题的关键.

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 在 AC 边上，过 $\triangle ABD$ 的内心 I 作 $IE \perp BD$ 于点 E . 若 $BD = 10$ ， $CD = 4$ ，则 BE 的长为 ()



A. 6

B. 7

C. 8

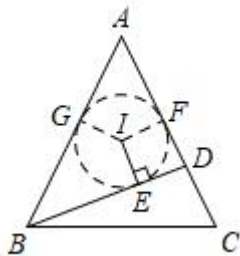
D. 9

【答案】B

【解析】

【分析】过点 I 作 $IF \perp AD, IG \perp AB$ ，根据切线长定理设 $AG = AF = a, DE = DF = b$ ，进而结合已知条件表示出 AB, AC ，求得 DE 的长，进而即可求解。

【详解】解：如图，过点 I 作 $IF \perp AD, IG \perp AB$ ，



$\therefore I$ 是 $\triangle ABD$ 的内心,

$$\therefore AG = AF, BG = BE, DE = DF.$$

设 $AG = AF = a, DE = DF = b$,

$$\therefore BD = 10,$$

$$\therefore BE = BG = 10 - b,$$

$$\therefore AB = AG + BG = a + 10 - b, AC = AD + DC = a + b + 4,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore a+10-b = a+b+4,$$

解得 $b = 3$,

$$\therefore BE = BD - DE = 10 - 3 = 7.$$

故选 B.

【点睛】 本题考查了三角形内心的性质，切线长定理，掌握切线长定理是解题的关键.

二、填空题：本大题共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分。请直接填写最后结果。

13. 要使式子 $\sqrt{x-5}$ 有意义, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq 5$

【解析】

【分析】根据 $\sqrt{a} (a \geq 0)$ ，二次根式有意义，则被开方数是非负数，即可.

【详解】 $\because$ 式子 $\sqrt{x-5}$ 有意义

$$\therefore x - 5 \geq 0$$

$$\therefore x \geq 5$$

故答案为: $x \geq 5$.

【点睛】本题考查二次根式的知识, 解题的关键是掌握二次根式有意义, 则被开方数是非负数, $\sqrt{a} (a \geq 0)$.

14. 分解因式: $x^3 - 9x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x(x+3)(x-3)$

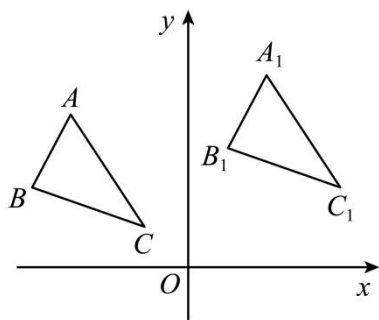
【解析】

【分析】先提取公因式 x 后继续应用平方差公式分解即可.

【详解】 $x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x+3)(x-3)$.

故答案为: $x(x+3)(x-3)$

15. 如图, 在平面直角坐标系中, 平移 $\triangle ABC$ 至 $\triangle A_1B_1C_1$ 的位置. 若顶点 $A(-3, 4)$ 的对应点是 $A_1(2, 5)$, 则点 $B(-4, 2)$ 的对应点 B_1 的坐标是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $(1, 3)$

【解析】

【分析】根据点 A 和点 A_1 的坐标可得出平移规律, 从而进一步可得出结论.

【详解】解: $\because$ 顶点 $A(-3, 4)$ 的对应点是 $A_1(2, 5)$,

又 $-3+5=2, 4+1=5$

$\therefore$ 平移 $\triangle ABC$ 至 $\triangle A_1B_1C_1$ 的规律为: 将 $\triangle ABC$ 向右平移 5 个单位, 再向上平移 1 个单位即可得到 $\triangle A_1B_1C_1$

$\because B(-4, 2)$

$\therefore B_1$ 的坐标是 $(-4+5, 2+1)$, 即 $(1, 3)$

故答案为: $(1, 3)$

【点睛】本题主要考查了坐标与图形, 正确找出平移规律是解答本题的关键.

16. 计算 $\frac{2}{x-1} + \frac{2x}{1-x}$ 的结果为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -2

【解析】

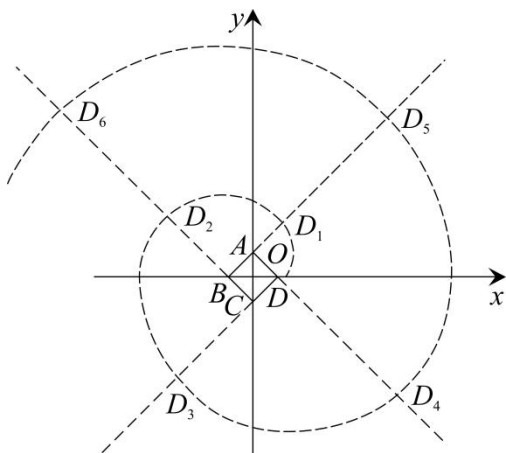
【分析】先变形，再根据同分母分式的加减法进行化简即可.

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】解: } & \frac{2}{x-1} + \frac{2x}{1-x} \\
 &= \frac{2}{x-1} - \frac{2x}{x-1} \\
 &= \frac{2(1-x)}{x-1} \\
 &= -2,
 \end{aligned}$$

故答案为: -2 .

【点睛】本题考查分式的加减，灵活运用分式的加减运算法则是解答的关键.

17. 如图，正方形 $ABCD$ 的中心与坐标原点 O 重合，将顶点 $D(1, 0)$ 绕点 $A(0, 1)$ 逆时针旋转 90° 得点 D_1 ，再将 D_1 绕点 B 逆时针旋转 90° 得点 D_2 ，再将 D_2 绕点 C 逆时针旋转 90° 得点 D_3 ，再将 D_3 绕点 D 逆时针旋转 90° 得点 D_4 ，再将 D_4 绕点 A 逆时针旋转 90° 得点 D_5 ……依此类推，则点 D_{2022} 的坐标是_____.



【答案】 $(-2023, 2022)$

【解析】

【分析】由题意观察发现：每四个点一个循环， $D_{4n+2}(-4n-3, 4n+2)$ ，由 $2022 = 505 \times 4 + 2$ ，推出

$D_{2022}(-2023, 2022)$.

【详解】解：∵将顶点 $D(1,0)$ 绕点 $A(0,1)$ 逆时针旋转 90° 得点 D_1 ，

∴ $D_1(1,2)$ ，

∵再将 D_1 绕点 B 逆时针旋转 90° 得点 D_2 ，再将 D_2 绕点 C 逆时针旋转 90° 得点 D_3 ，再将 D_3 绕点 D 逆时针旋转 90° 得点 D_4 ，再将 D_4 绕点 A 逆时针旋转 90° 得点 D_5 ……

∴ $D_2(-3,2)$ ， $D_3(-3,-4)$ ， $D_4(5,-4)$ ， $D_5(5,6)$ ， $D_6(-7,6)$ ，……，

观察发现: 每四个点一个循环, $D_{4n+2}(-4n-3, 4n+2)$,

$$\because 2022 = 4 \times 505 + 2,$$

$$\therefore D_{2022}(-2023, 2022);$$

故答案为: $(-2023, 2022)$.

【点睛】 本题考查坐标与图形的变化—旋转, 等腰直角三角形性质, 规律型问题, 解题的关键是学会探究规律的方法, 找到规律再利用规律求解.

三、解答题: 本大题共 7 个小题, 共 70 分. 解答要写出必要的文字说明, 证明过程或演算步骤.

18. 解方程组:
$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = \frac{13}{4} \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 整理方程组得
$$\begin{cases} x - 2y = 3 \text{ ①} \\ 2x + 3y = 13 \text{ ②} \end{cases}$$
, 继而根据加减消元法解二元一次方程组即可求解.

【详解】 解: 整理方程组得
$$\begin{cases} x - 2y = 3 \text{ ①} \\ 2x + 3y = 13 \text{ ②} \end{cases},$$

$$\text{①} \times 2 - \text{②} \text{ 得 } -7y = -7,$$

$$y = 1,$$

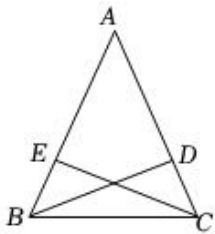
$$\text{把 } y = 1 \text{ 代入 ① 得 } x - 2 = 3,$$

$$\text{解得 } x = 5,$$

$$\therefore \text{方程组的解为 } \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}.$$

【点睛】 本题考查了解二元一次方程组, 正确的计算是解题的关键.

19. 如图, $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 点 D, E 分别在腰 AC, AB 上, 且 $BE = CD$, 连接 BD, CE . 求证: $BD = CE$.



【答案】证明见解析

【解析】

【分析】根据等腰三角形的性质得出 $\angle EBC = \angle DCB$ ，进而利用 SAS 证明 $\triangle EBC$ 与 $\triangle DCB$ 全等，再利用全等三角形的性质解答即可。

【详解】证明： $\because \triangle ABC$ 是等腰三角形，

$$\therefore \angle EBC = \angle DCB,$$

在 $\triangle EBC$ 与 $\triangle DCB$ 中，

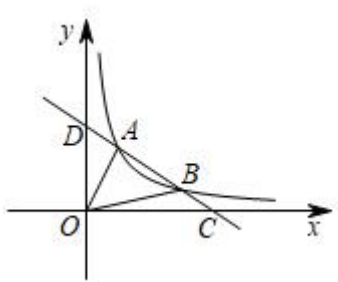
$$\begin{cases} BE = CD \\ \angle EBC = \angle DCB, \\ BC = CB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EBC \cong \triangle DCB (SAS),$$

$$\therefore BD = CE.$$

【点睛】此题考查全等三角形的判定和性质，解题的关键是利用 SAS 证明 $\triangle EBC$ 与 $\triangle DCB$ 全等。

20. 如图，直线 $y=kx+b$ 与双曲线 $y=\frac{m}{x}$ 相交于 $A(1, 2)$ ， B 两点，与 x 轴相交于点 $C(4, 0)$ 。



(1) 分别求直线 AC 和双曲线对应的函数表达式；

(2) 连接 OA ， OB ，求 $\triangle AOB$ 的面积；

(3) 直接写出当 $x > 0$ 时，关于 x 的不等式 $kx+b > \frac{m}{x}$ 的解集。

【答案】(1) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ ， $y = \frac{2}{x}$ ；

(2) $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{8}{3}$ ；

(3) $1 < x < 3$

【解析】

【分析】(1) 将点 $A(1, 2)$ 代入 $y = \frac{m}{x}$, 求得 $m=2$, 再利用待定系数法求得直线的表达式即可;

(2) 解方程组求得点 B 的坐标, 根据 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} - S_{\triangle BOC}$, 利用三角形面积公式即可求解;

(3) 观察图象, 写出直线的图象在反比例函数图象的上方的自变量的取值范围即可.

【小问 1 详解】

解: 将点 $A(1, 2)$ 代入 $y = \frac{m}{x}$, 得 $m=2$,

$\therefore$ 双曲线的表达式为: $y = \frac{2}{x}$,

把 $A(1, 2)$ 和 $C(4, 0)$ 代入 $y=kx+b$ 得:

$$y = \begin{cases} k+b=2 \\ 4k+b=0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k=-\frac{2}{3} \\ b=\frac{8}{3} \end{cases},$$

$\therefore$ 直线的表达式为: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$;

【小问 2 详解】

$$\text{解: 联立 } \begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3} \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases},$$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(1, 2)$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(3, \frac{2}{3})$,

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} - S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}OC \cdot |y_A| - \frac{1}{2}OC \cdot |y_B|$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 - \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{8}{3},$$

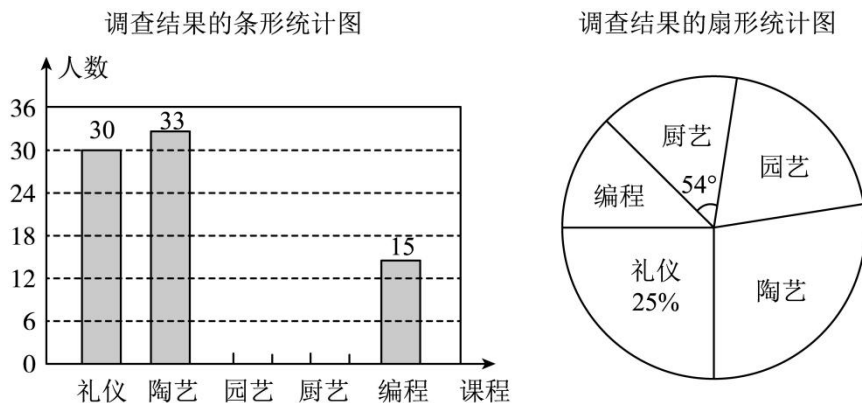
$\therefore \triangle AOB$ 的面积为 $\frac{8}{3}$;

【小问 3 详解】

解: 观察图象可知: 不等式 $kx+b > \frac{m}{x}$ 的解集是 $1 < x < 3$.

【点睛】本题考查反比例函数与一次函数图象的交点问题, 解题的关键是熟练掌握待定系数法确定函数解析式, 学会利用方程组求两个函数的交点坐标, 学会利用分割法求三角形面积.

21. 某中学积极落实国家“双减”教育政策, 决定增设“礼仪”“陶艺”“园艺”“厨艺”及“编程”等五门校本课程以提升课后服务质量, 促进学生全面健康发展. 为优化师资配备, 学校面向七年级参与课后服务的部分学生开展了“你选修哪门课程(要求必须选修一门且只能选修一门)?”的随机问卷调查, 并根据调查数据绘制了如下两幅不完整的统计图:



请结合上述信息, 解答下列问题:

- (1) 共有__名学生参与了本次问卷调查; “陶艺”在扇形统计图中所对应的圆心角是__度;
- (2) 补全调查结果条形统计图;
- (3) 小刚和小强分别从“礼仪”等五门校本课程中任选一门, 请用列表法或画树状图法求出两人恰好选到同一门课程的概率.

【答案】(1) 120, 99

(2) 见解析 (3) $\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】(1) 由选修“礼仪”的学生人数除以所占百分比得出参与了本次问卷调查的学生人数, 即可解决问题;

(2) 求出选修“厨艺”和“园艺”的学生人数, 即可解决问题;

(3) 画树状图, 共有 25 种等可能的结果, 其中小刚和小强两人恰好选到同一门课程的结果有 5 种, 再由概率公式求解即可.

【小问 1 详解】

解: 参与了本次问卷调查的学生人数为: $30 \div 25\% = 120$ (名),

则“陶艺”在扇形统计图中所对应的圆心角为: $360^\circ \times \frac{33}{120} = 99^\circ$,

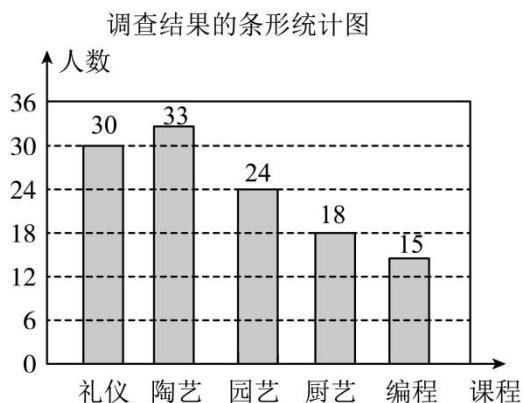
故答案为: 120, 99;

【小问 2 详解】

解: 条形统计图中, 选修“厨艺”的学生人数为: $120 \times \frac{54^\circ}{360^\circ} = 18$ (名),

则选修“园艺”的学生人数为: $120 - 30 - 33 - 18 - 15 = 24$ (名),

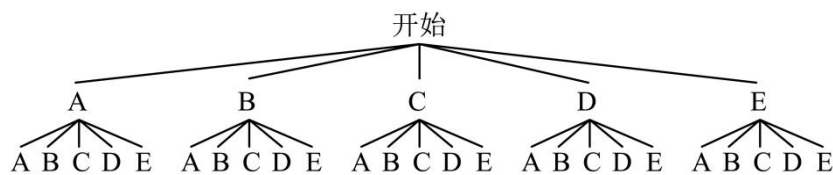
补全条形统计图如下:



【小问 3 详解】

解: 把“礼仪”“陶艺”“园艺”“厨艺”及“编程”等五门校本课程分别记为 A 、 B 、 C 、 D 、 E ,

画树状图如下:

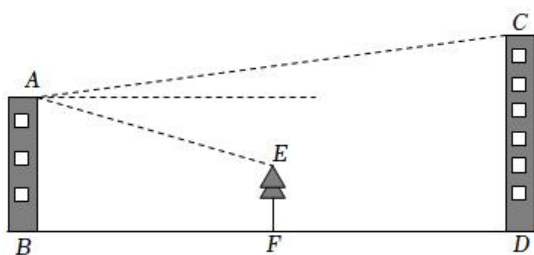


共有 25 种等可能的结果, 其中小刚和小强两人恰好选到同一门课程的结果有 5 种,

$\therefore$ 小刚和小强两人恰好选到同一门课程的概率为 $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

【点睛】 本题考查的是用树状图法求概率以及条形统计图和扇形统计图. 树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果, 适合两步或两步以上完成的事件. 用到的知识点为: 概率 = 所求情况数与总情况数之比.

22. 如图, 希望中学的教学楼 AB 和综合楼 CD 之间生长着一棵高度为 12.88 米的白杨树 EF , 且其底端 B , D , F 在同一直线上, $BF = FD = 40$ 米. 在综合实践活动课上, 小明打算借助这棵树的高度测算出综合楼的高度, 他在教学楼顶 A 处测得点 C 的仰角为 9° , 点 E 的俯角为 16° .



科学计算器按键顺序	计算结果 (已取近似值)
$\sin$ 9 $=$	0.156
$\tan$ 9 $=$	0.158
$\sin$ 16 $=$	0.276
$\tan$ 16 $=$	0.287

问小明能否运用以上数据, 得到综合楼的高度? 若能, 请求出其高度 (结果精确到 0.01 米); 若不能, 说明理由. (解答过程中可直接使用表格中的数据哟!)

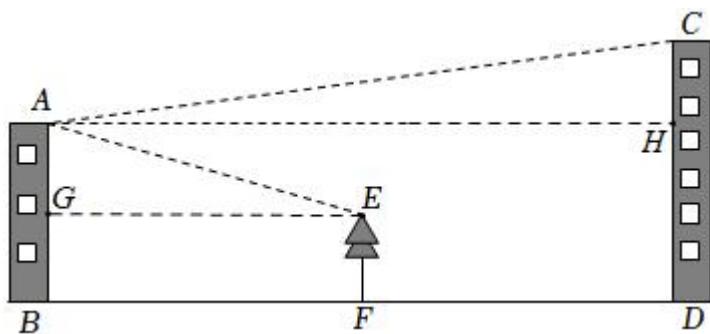
【答案】能, 综合楼的高度约是 37.00 米.

【解析】

【分析】在 $\text{Rt}\triangle AEG$ 中, 利用正切函数求得 AG 的长, 在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中, 利用正切函数求得 CH 的长, 据此求解即可得到综合楼的高度.

【详解】解: 小明能运用以上数据, 得到综合楼的高度, 理由如下:

作 $EG \perp AB$, 垂足为 G , 作 $AH \perp CD$, 垂足为 H , 如图:



由题意知, $EG = BF = 40$ 米, $EF = BG = 12.88$ 米, $\angle HAE = 16^\circ = \angle AEG = 16^\circ$, $\angle CAH = 9^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle AEG$ 中,

$$\tan \angle AEG = \frac{AG}{EG},$$

$$\therefore \tan 16^\circ = \frac{AG}{40}, \text{ 即 } 0.287 \approx \frac{AG}{40},$$

$$\therefore AG = 40 \times 0.287 = 11.48 \text{ (米)},$$

$$\therefore AB = AG + BG = 11.48 + 12.88 = 24.36 \text{ (米)},$$

$$\therefore HD = AB = 24.36 \text{ 米},$$

在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中, $AH = BD = BF + FD = 80$ 米,

$$\tan \angle CAH = \frac{CH}{AH},$$

$$\therefore \tan 9^\circ = \frac{CH}{80}, \text{ 即 } 0.158 \approx \frac{CH}{80},$$

$$\therefore CH = 80 \times 0.158 = 12.64 \text{ (米)},$$

$$\therefore CD = CH + HD = 12.64 + 24.36 = 37.00 \text{ (米)},$$

则综合楼的高度约是 37.00 米.

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用-仰角俯角问题，解决本题的关键是掌握仰角和俯角定义.

23. 已知 $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形， $\angle BAC$ 的平分线与 $\odot O$ 相交于点 D ，连接 DB .

(1) 如图 1，设 $\angle ABC$ 的平分线与 AD 相交于点 I ，求证： $BD=DI$;

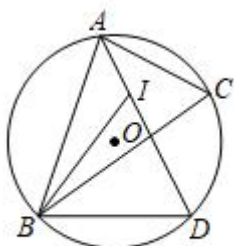


图1

图 1

(2) 如图 2，过点 D 作直线 $DE \parallel BC$ ，求证： DE 是 $\odot O$ 的切线;

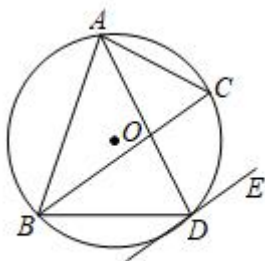


图2

图 2

(3) 如图 3，设弦 BD ， AC 延长后交 $\odot O$ 外一点 F ，过 F 作 AD 的平行线交 BC 的延长线于点 G ，过 G 作 $\odot O$ 的切线 GH (切点为 H)，求证： $GF=GH$.

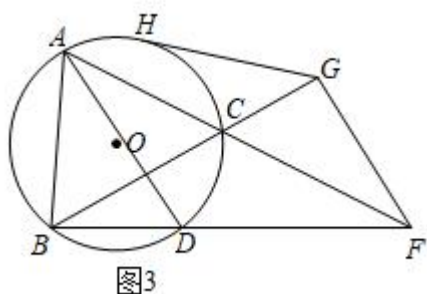


图 3

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 见解析

【解析】

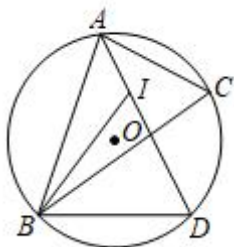
【分析】(1) 由角平分线的定义以及圆周角定理得到 $\angle BAD = \angle DAC = \angle CBD$, $\angle ABI = \angle IBC$, 再根据三角形的外角性质可推出 $\angle BID = \angle DBI$, 利用等角对等边即可证明 $BD = DI$;

(2) 由垂径定理推出 $OD \perp BC$, 由平行线的性质推出 $OD \perp DE$, 即可证明 DE 是 $\odot O$ 的切线;

(3) 设法证明 $\triangle HBG \sim \triangle CHG$, 推出 $GH^2 = GC \times GB$, 再证明 $\triangle GFC \sim \triangle GBF$, 推出 $GF^2 = GC \times GB$, 据此即可证明 $GF = GH$.

【小问 1 详解】

证明: $\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线, BI 是 $\angle ABC$ 的平分线,



$$\therefore \angle BAD = \angle DAC = \angle CBD, \quad \angle ABI = \angle IBC,$$

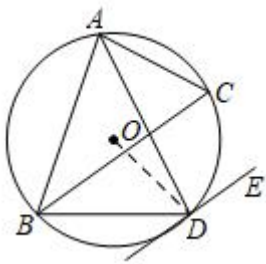
$$\therefore \angle BID = \angle ABI + \angle BAD, \quad \angle DBI = \angle IBC + \angle CBD,$$

$$\therefore \angle BID = \angle DBI,$$

$$\therefore BD = DI;$$

【小问 2 详解】

证明: 连接 OD ,



$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线,

$$\therefore \widehat{BD} = \widehat{CD},$$

$$\therefore OD \perp BC,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

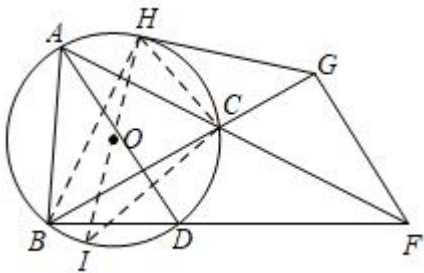
$$\therefore OD \perp DE,$$

$\because OD$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 3 详解】

证明: 过点 H 作 $\odot O$ 的直径 HI , 连接 BH , HC , IC ,



$\because HI$ 是 $\odot O$ 的直径, GH 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore \angle HCI = \angle IHG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle IHC + \angle I = 90^\circ = \angle IHC + \angle GHC,$$

$$\therefore \angle I = \angle GHC,$$

$$\therefore \angle HBG = \angle I,$$

$$\therefore \angle HBG = \angle GHC,$$

$$\therefore \triangle HBG \sim \triangle CHG,$$

$$\therefore \frac{HG}{CG} = \frac{GB}{HG},$$

$$\therefore GH^2 = GC \times GB,$$

$$\therefore AD \parallel FG,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle GFC,$$

$$\because \angle DAF = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle GFC = \angle DBC,$$

$$\therefore \triangle GFC \sim \triangle GBF,$$

$$\therefore \frac{GF}{GB} = \frac{GC}{GF},$$

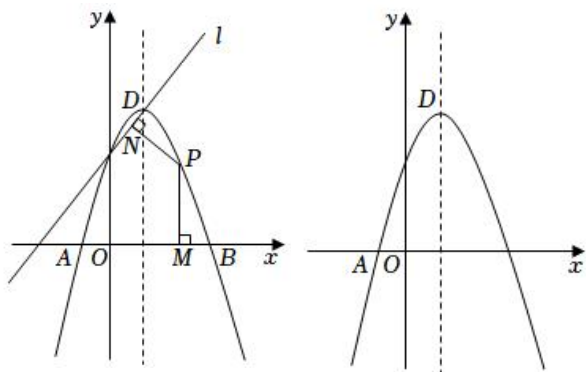
$$\therefore GF^2 = GC \times GB,$$

$$\therefore GF^2 = GH^2,$$

$$\therefore GF = GH.$$

【点睛】本题考查了切线的判定和性质，相似三角形的判定和性质，圆周角定理，垂径定理，解题的关键是正确寻找相似三角形解决问题，学会用转化的思想思考问题.

24. 如图，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴相交于 A, B 两点（点 A 在点 B 的左侧），顶点 $D(1, 4)$ 在直线 $l: y = \frac{4}{3}x + t$ 上，动点 $P(m, n)$ 在 x 轴上方的抛物线上.



(备用图)

- (1) 求这条抛物线对应的函数表达式;
- (2) 过点 P 作 $PM \perp x$ 轴于点 M , $PN \perp l$ 于点 N , 当 $1 < m < 3$ 时, 求 $PM + PN$ 的最大值;
- (3) 设直线 AP, BP 与抛物线的对称轴分别相交于点 E, F , 请探索以 A, F, B, G (G 是点 E 关于 x 轴的对称点) 为顶点的四边形面积是否随着 P 点的运动而发生变化, 若不变, 求出这个四边形的面积; 若变化, 说明理由.

【答案】(1) $y = -x^2 + 2x + 3$

(2) 最大值 $\frac{22}{5}$

(3) 定值 16

【解析】

【分析】(1) 利用顶点式可得结论;

(2) 如图, 设直线 l 交 x 轴于点 T , 连接 PT , BD , BD 交 PM 于点 J , 设 $P(m, -m^2 + 2m + 3)$,

$S_{\text{四边形}DTBP} = S_{\triangle PDT} + S_{\triangle PBT}$, 推出 $S_{\text{四边形}DTBP}$ 最大时, $PM + PN$ 的值最大, 求出四边形 $DTBP$ 的面积的最大值, 可得结论;

(3) 如图, 设 $P(m, -m^2 + 2m + 3)$, 求出直线 AP , BP 的解析式, 可得点 E , F 的坐标, 求出 FG 的长, 可得结论.

【小问 1 详解】

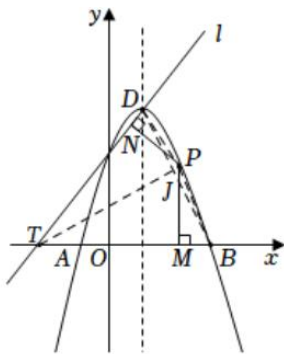
解: $\because$ 抛物线的顶点为 $D(1, 4)$,

$\therefore$ 根据顶点式, 抛物线的解析式为 $y = -(x-1)^2 + 4 = -x^2 + 2x + 3$;

【小问 2 详解】

解: 如图, 设直线 l 交 x 轴于点 T , 连接 PT , BD ,

BD 交 PM 于点 J , 设 $P(m, -m^2 + 2m + 3)$,



点 $D(1, 4)$, 在直线 $l: y = \frac{4}{3}x + t$ 上,

$$\therefore 4 = \frac{4}{3} + t,$$

$$\therefore t = \frac{8}{3},$$

$$\therefore \text{直线 } DT \text{ 的解析式为 } y = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3},$$

令 $y = 0$, 得到 $x = -2$,

$$\therefore T(-2, 0),$$

$$\therefore OT = 2,$$

$$\therefore B(3, 0),$$

$$\therefore BT = 5,$$

$$\therefore DT = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore DT = BT,$$

$$\therefore PM \perp BT, \quad PN \perp DT,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}DTBP} = S_{\triangle PDT} + S_{\triangle PBT} = \frac{1}{2} \times DT \times PN + \frac{1}{2} \times BT \times PM = \frac{5}{2}(PM + PN),$$

$$\therefore S_{\text{四边形}DTBP} \text{最大时, } PM + PN \text{ 的值最大,}$$

$$\therefore D(1,4), \quad B(3,0),$$

$$\therefore \text{直线 } BD \text{ 的解析式为 } y = -2x + 6,$$

$$\therefore J(m, -2m + 6),$$

$$\therefore PJ = -m^2 + 4m - 3,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}DTBP} = S_{\triangle DTB} + S_{\triangle BDP} = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 + \frac{1}{2} \times (-m^2 + 4m - 3) \times 2$$

$$= -m^2 + 4m + 7$$

$$= -(m-2)^2 + 11,$$

$$\therefore \text{二次项系数 } -1 < 0,$$

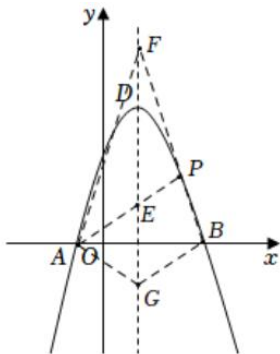
$$\therefore m = 2 \text{ 时, } S_{\text{四边形}DTBP} \text{ 最大, 最大值为 } 11,$$

$$\therefore PM + PN \text{ 的最大值} = \frac{2}{5} \times 11 = \frac{22}{5};$$

【小问 3 详解】

解: 四边形 $AFBG$ 的面积不变.

理由: 如图, 设 $P(m, -m^2 + 2m + 3)$,



$$\therefore A(-1,0), \quad B(3,0),$$

$$\therefore \text{直线 } AP \text{ 的解析式为 } y = -(m-3)x - m + 3,$$

$$\therefore E(1, -2m+6),$$

$\because E, G$ 关于 x 轴对称,

$$\therefore G(1, 2m-6),$$

$$\therefore \text{直线 } PB \text{ 的解析式为 } y = -(m+1)x + 3(m+1),$$

$$\therefore F(1, 2m+2),$$

$$\therefore GF = 2m+2 - (2m-6) = 8,$$

$$\therefore \text{四边形 } AFBG \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \times AB \times FG = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16,$$

$\therefore$ 四边形 $AFBG$ 的面积是定值.

【点睛】 本题属于二次函数综合题, 考查了二次函数的性质, 一次函数的性质等知识, 解题的关键是学会构建二次函数解决最值问题, 学会利用参数解决问题.

